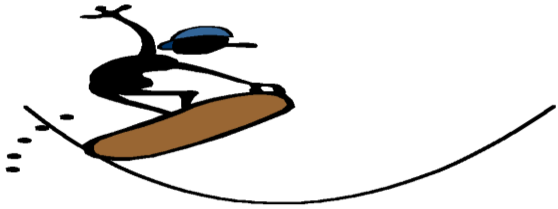
Das ABC der ganzrationalen Funktionen

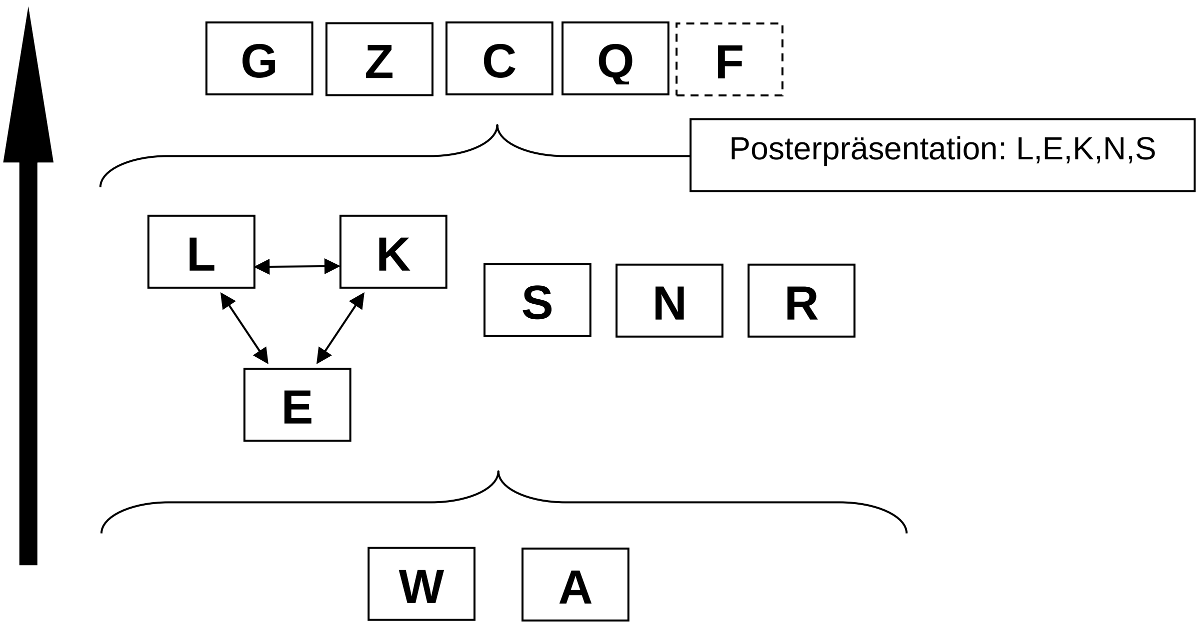


Liebe Schülerinnen und Schüler,

die Analyse von Funktionen ist eine Tätigkeit, ohne die in vielen Bereichen des gesellschaftlichen Lebens (z.B: Wirtschaft, Technik, Versicherungen) nicht professionell gearbeitet werden kann. So ist es beim Planen von Optimierungsprozessen oder beim Erstellen von Prognosen wichtig, über die mathematischen Eigenschaften von Funktionen Bescheid zu wissen und Graphen angemessen interpretieren zu können. Die Untersuchung auf solche Eigenschaften und ihre Bedeutung werden Sie in der vorliegenden Lernwerkstatt an Hand einer wichtigen Funktionenklasse – den ganzrationalen Funktionen - kennenlernen.
Ganzrationale Funktionen sind alle Funktionen, deren Terme aus Vielfachen von Potenzen von x und deren Summe zusammengesetzt sind. (z.B: $f(x)=2x^5-3x^2+x-1$)

Die Werkstatt besteht aus mehreren Stationen, die mit Großbuchstaben bezeichnet sind – das ABC der ganzrationalen Funktionen. Inhaltliche Voraussetzung für die Lernwerkstatt ist, dass Sie mit dem Begriff der Ableitung vertraut sind. Die Bausteine W und A helfen Ihnen, den Ableitungsbegriff zu vertiefen, weshalb Sie mit diesen Bausteinen beginnen sollten.

Es gibt mehrere Wege durch die Stationen, jedoch braucht man für einige Stationen die Kenntnisse aus anderen. Die folgende Graphik verdeutlicht die möglichen Wege, wobei man von unten, von der „Basis“, ausgeht und sich dann nach oben arbeitet. Um die Ergebnisse und Erkenntnisse zu vergleichen und eine gemeinsame Basis zu schaffen, werden nach der 2. Stufe die wichtigsten Bausteine (L, E, K, N, S) im Plenum präsentiert und besprochen.

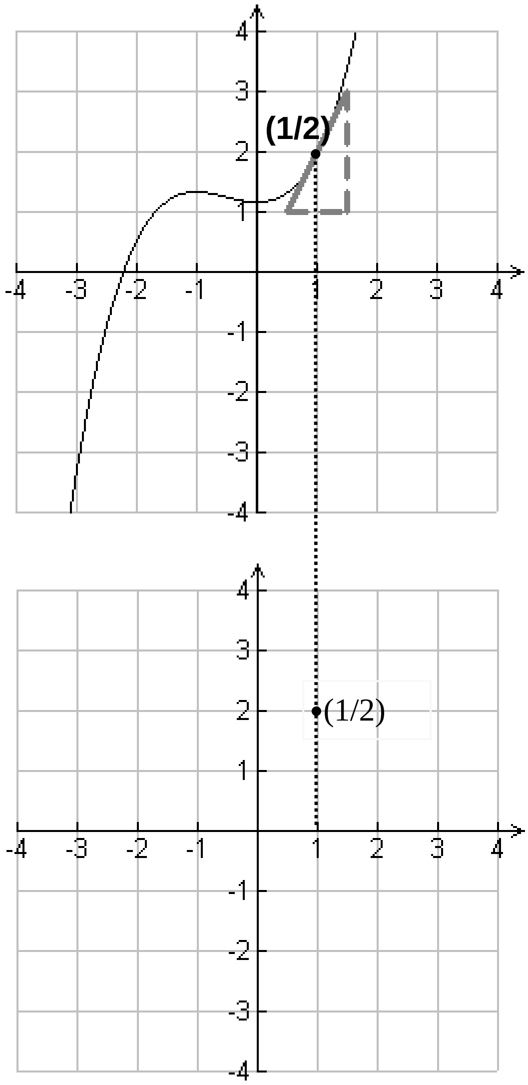


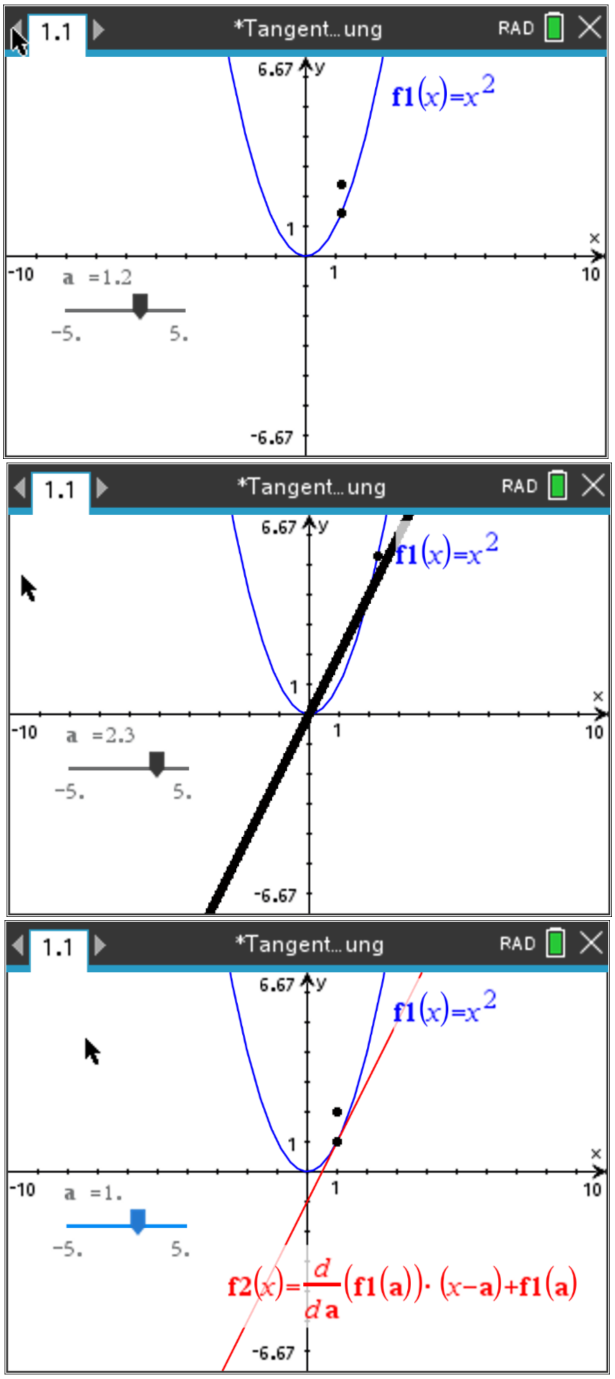
W Werkzeuge

Sie erarbeiten die Grund-Werkzeuge **„Ableitung“** und **Ableitungsregeln**.

Vorausgesetzte Bausteine: keine

Graphisch:
Lesen Sie für mehrere Stellen im Graphen von f die ungefähre Tangentensteigung ab. Übertragen Sie die Werte in das untere Koordinatensystem. Für die Stelle x=1 wurde dies bereits durchgeführt.





Rechnerisch:
Ermitteln Sie mit Hilfe des Rechners den Term der Ableitungsfunktion zu einigen Funktionen und stellen Sie diese in einer Tabelle zusammen.

f(x)	f´(x)

Schließen Sie aufgrund Ihrer Beispiele auf allgemeine Ableitungsregeln für ganzrationale Funktionen und überprüfen Sie diese an weiteren Beispielen.

A Ich gehe den Ableitungsgraphen

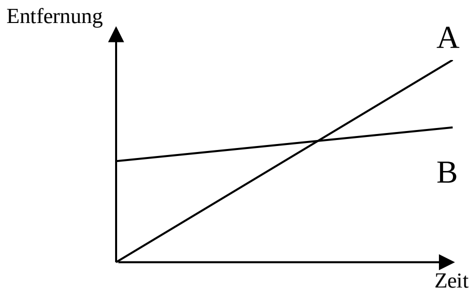
Hier geht es um
Ableitungen als Modell für den Zusammenhang zwischen Entfernung und Geschwindigkeit

Vorausgesetzte Bausteine: keine

Hier geht es nicht nur um ganzrationale Funktionen!!

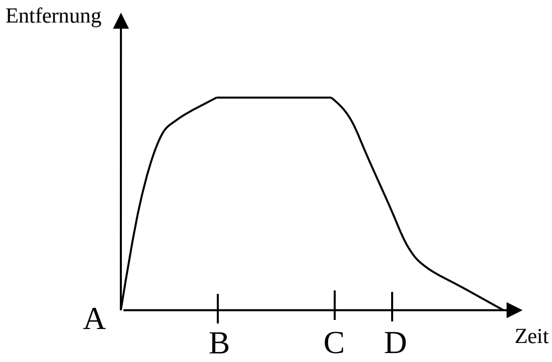
1. Welche der folgenden Aussagen sind wahr, welche sind falsch? Markieren Sie mit **W** oder **F.**

Situation a): Zwei Läufer (A und B) laufen auf einem gemeinsamen Weg. Die Graphen geben ihre Entfernungen vom Startpunkt aus in Abhängigkeit von der Zeit an.



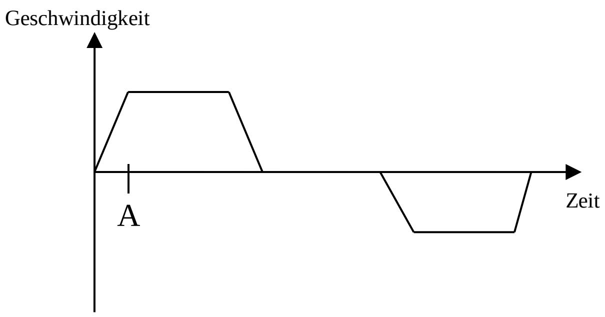
(1) Anfangs läuft B schneller als A.
(2) Wo die Graphen sich schneiden ist der Zeitpunkt gegeben, bei dem A und B dieselbe Geschwindigkeit haben.
(3) A läuft immer schneller als B.

Situation b): Der Graph zeigt, wie sich die Entfernung eines Zuges vom Startpunkt A verändert.



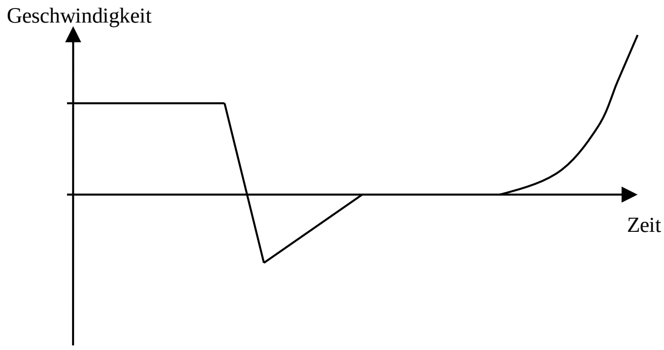
(1) Der Zug wird kurz vor B langsamer.
(2) Der Zug wird kurz vor B schneller.
(3) Der Zug bewegt sich zwischen B und C mit konstanter Geschwindigkeit.
(4) Der Zug steht zwischen B und C still.
(5) Der Zug kehrt zum Ausgangspunkt zurück.
(6) Der Zug wird zwischen C und D langsamer.

Situation c): Der folgende Graph zeigt, mit welcher Geschwindigkeit sich eine Person auf einer Geraden zwischen A und B bewegt. Sie startet bei A.



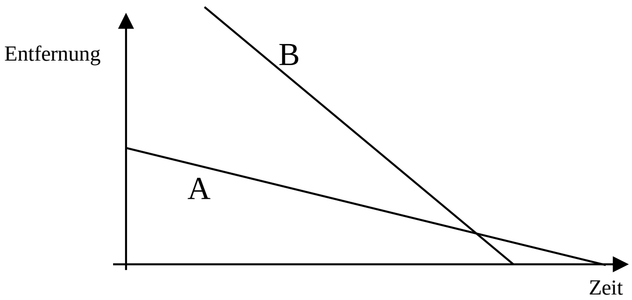
(1) Die Person ist jederzeit in Bewegung.
(2) Die Person bewegt sich im ersten Teilstück (bis zum Punkt A) erst langsam und wird dann immer schneller.
(3) In den Teilstücken, wo der Graph waagerecht ist, stoppt die Person.

2.
Beschreiben Sie den Bewegungsablauf, der im Graphen rechts aufgezeichnet ist.
Falls ein Bewegungsmessgerät zur Verfügung steht:
Vollziehen Sie die Bewegung nach und erzeugen Sie so selbst diesen Graphen.



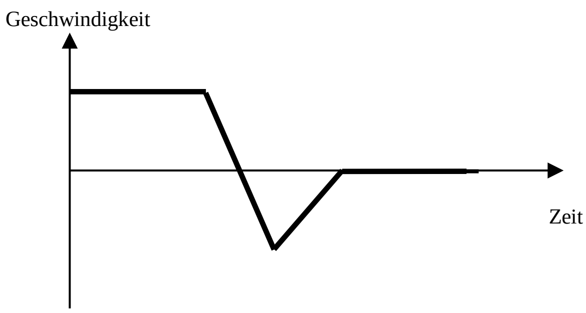
3. Welche der folgenden Aussagen sind wahr, welche sind falsch?

Situation a): Der Graph beschreibt die Endphase eines Wettlaufs bis zum Ziel.



(1) Nur am Anfang ist B schneller als A.
(2) Wo die Graphen sich schneiden ist der Zeitpunkt, bei dem A und B dieselbe Geschwindigkeit haben.
(3) A läuft immer schneller als B.
(4) B gewinnt den Wettlauf.

Situation b): Ein Radfahrer fährt auf einer Wegstrecke AB. Er beginnt genau in der Mitte M zwischen A und B und fährt zuerst in die Richtung von B. Der folgende Graph gibt die Bewegung wieder.



(1) Er fährt stets in die gleiche Richtung.
(2) Er beginnt seine Fahrt mit wachsender Geschwindigkeit.
(3) Am Schluss ruht er sich aus.
(4) Seine Endposition ist zwischen A und M.
(5) Seine Endposition ist zwischen M und B.

4.

Formulieren Sie in Ihren eigenen Worten den Zusammenhang zwischen der Aspekten dieses Bausteins und der Thematik „Ableitung/ Ableitungsfunktion“.

5.* Erläutern Sie für weitere physikalische Größen die Bedeutung der Ableitung bzw. Ableitungsfunktion (z.B. Weg-Geschwindigkeit-Beschleunigung in Abhängigkeit von der Zeit, Arbeit-Kraft in Abhängigkeit des Weges,…).

L Lange Leitungen

Vorausgesetzte Bausteine:
Keine, aber Vernetzung mit K und E)

Sie erarbeiten die **Ableitung der Ableitung**, die **Ableitung der Ableitung der Ableitung**,....

Information

Differenziert man die Ableitungsfunktion f ´, so erhält man eine neue Funktion (f´)´ = f´´ , die Ableitung der Ableitung, genannt „die 2. Ableitung“.

Auf gleichem Weg gelangt man von f´´ zu f ´´´= $f^{(3)}$, der 3. Ableitung, von f ´´´ zu f´´´´= $f^{(4)}$, der 4. Ableitung usw.

Man liest: „f zwei Strich“ für f´´, „f drei Strich“ für f ´´´, „f n Strich“ für $f^{(n)}$

Beispiel:

f (x) = 0.125 ($x^3 - 9x^2 + 15x + 25$)
f ´(x) = 0.125 ($3x^2 - 18x + 15$)
f ´´(x) = 0.125 (6 x - 18)
f ´´´ (x) = 0.125 · 6
$f^{(4)}(x)$ = 0 ....
$f^{(n)}(x)$ = 0 für $n \geq 4$

Wie oft muss man ableiten, bis sich zum ersten Mal der Ableitungsterm Null ergibt?

Stellen Sie folgende Funktionen und alle ihre Ableitungsfunktionen graphisch dar. Benutzen Sie für jede Funktion ein neues Koordinatensystem.
$f(x) = 0,125(x^3 - 9x^2 + 15x + 25)$
$g(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 1$
$h(x) = 0,2x^4 – 0,3x^3 – x^2 + 0.2$
Finden Sie jeweils möglichst viele Zusammenhänge zwischen dem Graphen der Funktion und deren Ableitungen.
Ziehen Sie allgemeine Schlüsse und vervollständigen Sie die Tabelle:
Das Blatt Fundamentalsatz der Algebra vermittelt hier tiefere Einsichten.

Bestimmen Sie alle Ableitungen.

$f(x) = x^2 - 6x + 8$
$g(x) = -2x^3 + 6x^2$
$h(x) = x^5 - 4x^3 + 4x - 7$

Informieren Sie sich darüber, was man unter einem Wendepunkt versteht ***(hierzu kann die Datei: WPunkte.ggb ebenso sinnvoll genutzt werden wie das Mathematikbuch oder die Datei Wendepunkte.tns).***

Grad[1] der Funktion	Max. Anzahl Nullstellen	Max. Anzahl Extrempunkte	Max. Anzahl Wendepunkte

[1] Die höchste vorkommende x-Potenz im Funktionsterm ist der „Grad“ einer Funktion. Zum Beispiel hat eine quadratische Funktion den Grad 2; die Funktion $f(x)=3x^4-2x^3+x-1$ ist eine Funktion 4. Grades usw.

E Extremes

Hier geht es um
das Bestimmen
lokaler Extremstellen

Es ist häufig wichtig zu wissen (z.B. bei Kostenfunktionen), wo Funktionswerte in einem bestimmten Bereich minimal oder maximal werden. Die verschiedenen Darstellungsarten einer Funktion (z.B.: Term, Graph oder Tabelle) haben bei der Bestimmung dieser lokalen Extremstellen verschiedene Vor – und Nachteile.

Aufgaben

1) Beschreiben Sie den Graphen der Funktion f(x) sowie die Graphen der 1. und 2. Ableitung. (TIPP 1)

2) Erläutern Sie die Zusammenhänge zwischen dem Funktionsgraphen mit dem 1. und 2. Ableitungsgraphen bezüglich Extrema. Fassen Sie Ihre Erkenntnisse in einer Tabelle zusammen. (TIPP 2, TIPP 3)

Eigenschaft des Funktionsgraphen	Eigenschaft des 1. Ableitungsgraphen	Funktionswert des 2. Ableitungsgraphen

3) Betrachten Sie die Umgebung des Hoch- und Tiefpunkts (Extrema) genauer. Erläutern Sie, wie sich die Steigung vor und nach den Extrempunkten sowie an den Extrempunkten verhält. Erklären Sie einen Zusammenhang.

4) Verallgemeinern Sie Ihre Erkenntnisse bezüglich der Hoch- und Tiefpunkte der Funktion und den dazugehörigen Eigenschaften der Graphen der 1. Ableitung und der 2. Ableitung, indem Sie eine **notwendige** und eine **hinreichende** Bedingung formulieren.

   Überprüfen Sie Ihre allgemeinen Erkenntnisse mit Hilfe der GeoGebra-Datei.

5) Ermitteln Sie ein **algebraisches** Verfahren, Extrempunkte sowie die Differenzierung zwischen Hoch- und Tiefpunkten zu bestimmen.

6) Wenden Sie das Verfahren auf die folgenden Funktionen an. Überprüfen Sie Ihr Ergebnis mit Hilfe des jeweiligen Graphen.

   $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x$ $\qquad$ $g(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - x^2$

7) Erläutern Sie den Unterschied zwischen lokalen und globalen Extrema. Begründen Sie, warum das Wort lokal wichtig ist. (Bild mit Beschreibung)

8) *„Ist die Tangentensteigung 0, liegt ein lokales Extremum vor!“*

   Beurteilen Sie diese Aussage und verbessern Sie gegebenenfalls.

K Sanft krümmt sich......

Vorausgesetzte Bausteine:
keine (aber Vernetzung mit E und L)

Hier geht es um
Links- und Rechtskurven und Wendepunkte, an denen sich das Krümmungsverhalten ändert

Krümmung und Wendepunkte

Aufgaben

Gegeben ist der Graph der Funktion $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 7$ sowie die Graphen der 1., 2. und 3. Ableitung von f(x).

Du kennst nun schon Nullstellen sowie Hoch- und Tiefpunkte von Graphen. Im Folgenden wirst du dich mit Wendepunkten von Graphen auseinandersetzen **(Datei: Wpunkte.ggb)**.

1) Beschreibe den Graphen der Funktion f bezüglich seiner Krümmung. Nenne auch eine Vermutung, was der Wendepunkt einer Funktion sein könnte. Begründe. (TIPP: Krümmung)

2) Betrachte den Wendepunkt der Funktion in der Datei. Stimmt deine Vermutung? Erläutere den Zusammenhang zwischen der Krümmung eines Graphen und seinem Wendepunkt.

3) Erläutere die Zusammenhänge zwischen dem Funktionsgraphen mit dem 2. und 3. Ableitungsgraphen bezüglich des Wendepunkts. (TIPP 1)

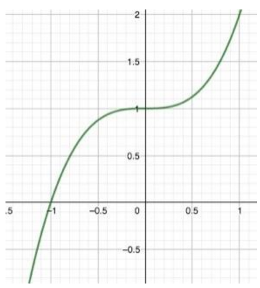
4) Verallgemeinere deine Erkenntnisse bezüglich des Wendepunkts der Funktion und den dazugehörigen Eigenschaften der Graphen der 2. Ableitung und der 3. Ableitung, indem du eine **notwendige** und eine **hinreichende** Bedingung formulierst. (TIPP 2 und TIPP 3)

   Überprüfe deine allgemeinen Erkenntnisse mit Hilfe der GeoGebra-Datei.

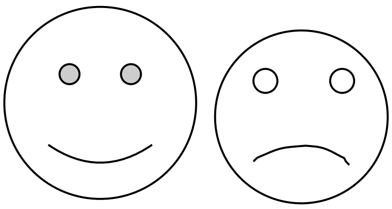
5) Ermittle ein **algebraisches** Verfahren, Wendepunkte sowie die Art des Wendepunkts zu bestimmen.

6) Wenden Sie das Verfahren auf die folgenden Funktionen an. Überprüfen Sie Ihr Ergebnis mit Hilfe des jeweiligen Graphen.

7) Ein Sattelpunkt ist ein besonderer Fall eines Wendepunkts.
   Die Funktion $\boldsymbol{h(x) = x^3 + 1}$ hat an der Stelle x= einen Sattelpunkt. Betrachte die 1.,2. und 3. Ableitung der Funktionen h(x) und f(x) an den Stellen der Wendepunkte und vergleiche sie. Was fällt dir auf?

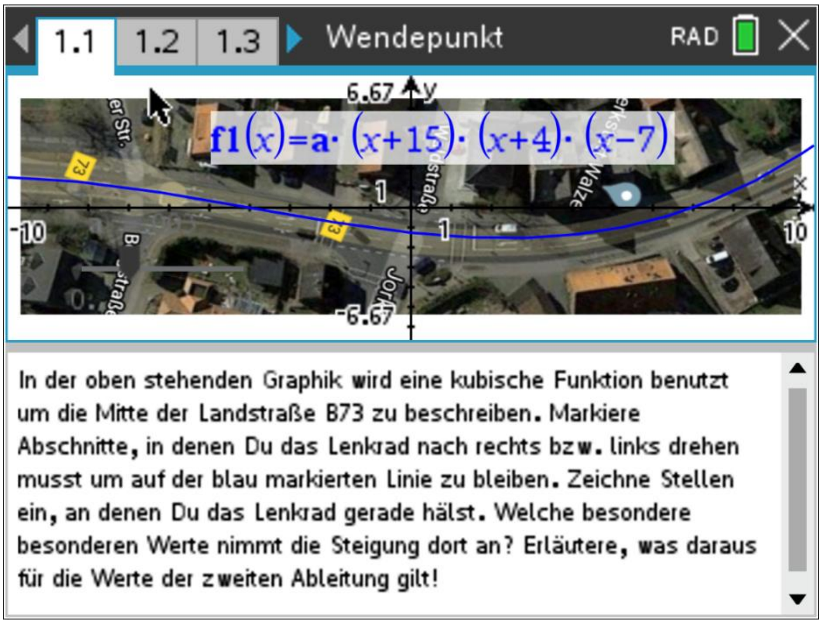


8) Entwickle ein algebraisches Verfahren zur Bestimmung eines Sattelpunktes.



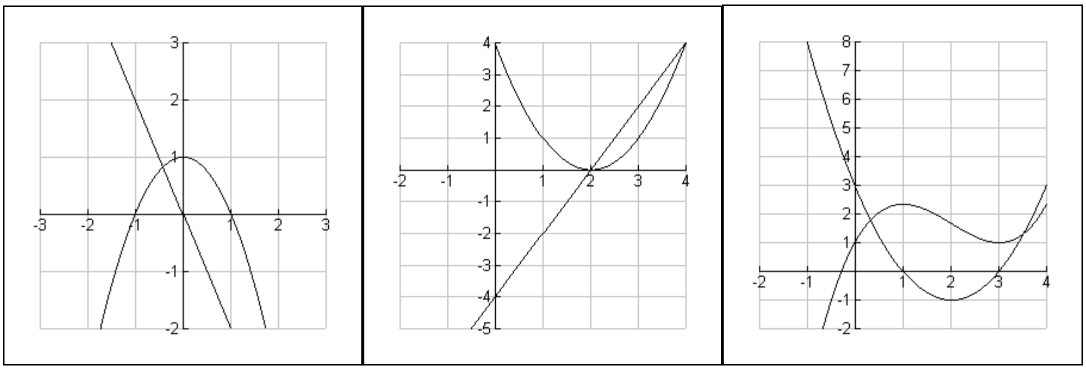
Fortsetzung von K: (Die Reihenfolge ist beliebig!)

9. Erkläre mithilfe des nebenstehenden Arbeitsauftrages, welcher Zusammenhang zwischen Wendepunkten, dem Krümmungs-verhalten und den in Aufgabenteil 4) gefundenen Kriterien besteht.



10. Gegeben ist $f''(x) = a\,x - 2$. Wie muss a gewählt werden, damit der Graph von f bei x = 1 die Kurvenart (d.h. von Links- zur Rechtskurve oder umgekehrt) wechselt?

11. Die Abbildungen zeigen jeweils die Graphen von f´ und f´´. Zeichnen Sie jeweils den Graphen einer passenden Funktion f. (Wie viele Funktionen f gibt es jeweils?)



12. Von einer ganzrationalen Funktion f ist bekannt: f´´ ist für x < 4 negativ und für x > 4 positiv. Skizzieren Sie den Graphen einer Funktion f in der Nähe der Stelle x = 4 !

13. f´´ hat die Gleichung $f''(x) = x^2 - x - 2$.
In welchen Bereichen macht der Graph von f eine Linkskurve bzw. eine Rechtskurve?

14. Wo können Wendepunkte der folgenden Funktionen liegen?

$f(x) = x^3 - x^2$ $\qquad$ $g(x) = x^4 - 16x^3 + 72x^2$ $\qquad$ $h(x) = -5x^2 + 7x - 6$

N Die Null-Linie

Hier geht es um
die Stellen, an denen eine Funktion null wird

Vorausgesetzte Bausteine: keine

Auch bei der Bestimmung von Nullstellen kann man entweder vom Graphen der Funktion, von einer Tabelle oder vom Term ausgehen, wobei auch hier jede Darstellungsart ihre Vor- und Nachteile hat. Bestimmen Sie jeweils die Nullstellen.
Als Hilfe kann das Informationsblattes Mehrfachheit von Nullstellen gewonnen werden (besonders, wenn Aufgabe 4 Schwierigkeiten bereitet).

Tabelle

x	y
-1	-2.25
0	-2
1	-1.75
2	6
3	58.75
4	254
5	779.25
6	1942

Wo liegt die Nullstelle?
Was können Sie aus der Tabelle ablesen?

Bestimmen Sie die Nullstelle genauer, indem Sie die Tabelle verfeinern.
Die Funktionsgleichung lautet:
$y(x) = 0.25\, x^5 – 2$

Graph

Zeichnen Sie den Graphen der folgenden Funktion mit dem Rechner und ermitteln Sie durch fortgesetztes Zoomen im Graphikfenster die Nullstellen möglichst genau.
$y(x) =$
$0.2x^3 – 1.4\, x^2 + 0.7x + 6.5$

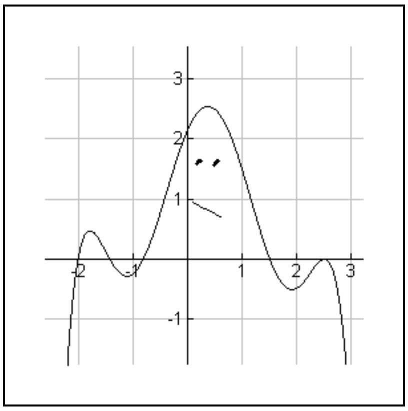
Term

Schreiben Sie den Term als Produkt und bestimmen Sie die Nullstellen:

a) $f(x) = x^2 - 5x$
b) $f(x) = x^2 - 6x + 9$
c) $f(x) = x^2 + x + 1$
d) $f(x) =$
$(x-4)(x+1)^3$
$(x^2+2x-3)(x^2 + 1)$
e) $f(x) = x^3 - 4x^2 - 5x$

Bei Schwierigkeiten bietet sich sich die Benutzung eines CAS an für das Faktorisieren.

1. Erkläre, wann sich welches Vorgehen anbietet.
2. Geben Sie die Gleichung einer ganzrationalen Funktion an, die
a) den Grad 2 und die Nullstellen 7 und 8 hat[2]
b) den Grad 3 und die Nullstellen 2 ; 5 und – 3 hat.
3. Bestimmen Sie a so, dass $f(x) = x^2 – 5.5\, x + a\cdot 1.5$ eine Nullstelle $x_0 = 3$ hat und berechnen Sie anschließend die weitere Nullstelle!
4. Stellen Sie den „Geist" der nebenstehenden Graphik auf Ihrem Bildschirm dar.
5.* Bearbeiten Sie die Zusatzaufgabe für Kreative auf dem Infoblatt



[2] Die höchste vorkommende x-Potenz im Funktionsterm ist der „Grad" einer Funktion. Zum Beispiel hat eine quadratische Funktion den Grad 2; die Funktion $f(x)=3x^4-2x^3+x-1$ ist eine Funktion 4. Grades usw.

Mehrfachheit von Nullstellen oder erzeugen Sie andere eigene Figuren mithilfe von Polynomen.

Hier geht es um
Symmetrieeigenschaften von Funktionsgraphen und wie man sie manchmal schon am Term erkennen kann

Hier geht es nicht nur um ganzrationale Funktionen!!

S Symmetrien

Vorausgesetzte Bausteine: keine

Symmetrie von ganzrationalen Funktionen

Aufgaben

Gegeben ist der Graph der Funktion f(x): Asymmetrie.ggb

1) Betrachte den Graphen der Funktion detailliert mittels Datei und vervollständige die folgende Tabelle. (TIPP 1, TIPP 2 und TIPP 3)

x	-3	-2	-1	1	2	3
f(x)						

2) Entwickle ein allgemein anwendbares algebraisches Kriterium zur Prüfung, ob die beobachtete Symmetrie (TIPP 4 und TIPP 5) vorliegt.

Gegeben ist der Graph der Funktion g(x): PSymmetrie.ggb

3) Betrachte den Graphen der Funktion detailliert mittels Datei und fülle die folgende Tabelle aus. Notiere deine Beobachtungen. (TIPP 1, TIPP 2 und TIPP 3)

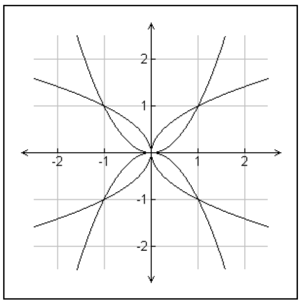
x	-3	-2	-1		1	2	3
f(x)							

4) Entwickle ein allgemein anwendbares algebraisches Kriterium zur Prüfung, ob die beobachtete Symmetrie vorliegt.

Übungen

5) Untersuche die folgenden Funktionen algebraisch mit Hilfe deiner Kriterien auf Achsensymmetrie zur y-Achse bzw. Punktsymmetrie zum Ursprung.
(1) $f(x) = \sin(x)$ (2) $g(x) = \cos(x)$
(3) $h(x) = 2^{x^2}$ (4) $k(x) = \sqrt{x}$

6) Untersuche die Funktionen auf Symmetrie anhand deiner Kriterien. Überprüfe dein Ergebnis mittels CAS.
(1) $f(x) = 0.5\,x^4 - x^2 + 4$ (2) $f(x) = 7\,x^3 - x + 1$
(3) $f(x) = 0.2\,x^7 - 3.1\,x^5 + x^3$ (4) $f(x) = x + x^2 + x^3$
(5) $f(x) = x^{13} + 5\,x^{11} - x^9 + 8x^6 - 6$



7) Symmetrische Bilder erhält man natürlich auch mit Hilfe mehrerer Graphen. Welche Funktionen benötigt man zum Beispiel für die „Blume"?

8)* Untersuche die folgenden Produkte und Quotienten auf Achsensymmetrie zur y-Achse bzw. Punktsymmetrie zum Ursprung.
a) $f_1(x) = x^2 \cdot \sin(x)$ b) $f_2(x) = x \cdot \cos(x)$
c) $f_3(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ d) $f_4(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$
e) $f_5(x) = 2^{\sin(x)}$ f) $f_6(x) = \sqrt[3]{x} \cdot \cos(x)$

Hier geht es darum die neuen Kenntnisse an Hand eines Spieles zu vertiefen.

R Reiterspiel (für 4 Spieler/innen)

Vorausgesetzte Bausteine: L, E, K, N, S

Vorbereitung:
Bekleben Sie einen Spielwürfel mit den Aufschriften $f'(x)=0$, $f'(x)<0$, $f'(x)>0$, $f''(x)=0$, $f''(x)<0$, $f''(x)>0$.

Bringen Sie bitte selbst Spielfiguren mit, der Spielpan liegt aus!

Anleitung:
JedeR wählt eine Spielfigur (Pferd) und stellt diese auf das Startfeld. Man würfelt nacheinander und galoppiert zum nächsten (nicht übernächsten!!) Feld, bei dem der Kurvenverlauf mit der Würfelaufschrift übereinstimmt.
Steht dort bereits ein Reiter, so darf man diesen zurück auf das Startfeld setzen.
Gewonnen hat der erste Reiter, der das Ziel erreicht.

C Check up

Hier geht es darum neue Erkenntnisse zu überprüfen

Vorausgesetzte Bausteine: L, E, K

Eine Aussage ist genau dann wahr, wenn sie ohne Ausnahme gültig ist. In der Korrektur können Ausnahmen genannt werden.

1. Wahr oder falsch?

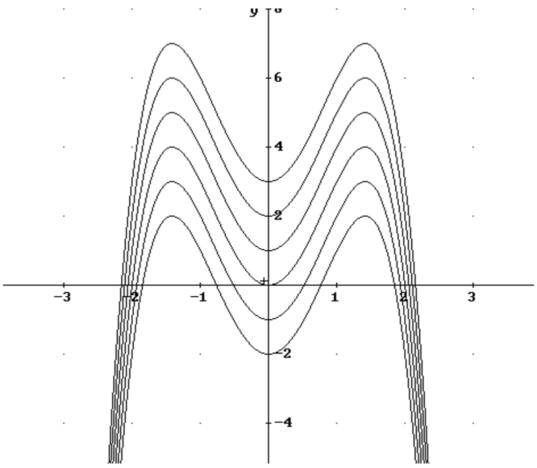
Aussage	Wahr/falsch	Begründung, ggf. Korrektur
Zwischen 2 benachbarten Extrema einer ganzrationalen Funktion liegt immer ein Wendepunkt.		
Besitzt der Graph einer ganzrationalen Funktion zwei Wendepunkte, dann muss sie mindestens 4. Grades sein.		
Wenn $f'(x_0) = 0$ gilt, dann ist x_0 eine Extremstelle.		
Wenn x_0 eine Extremstelle ist, dann hat dort die 1. Ableitung den Wert 0.		
Wenn die Steigung des Graphen an der Stelle x_0 null ist, dann hat f in x_0 eine Wendestelle.		
Wenn $f''(x_0) = 0$ ist, dann hat der Graph von f dort einen Wendepunkt.		
Wo die Steigung des Graphen lokal am größten ist, liegt ein Wendepunkt.		
Aus „Steigung in (1/0) ist 2“ kann ich als einzige Bedingung schließen, dass $f'(1)= 2$ ist.		

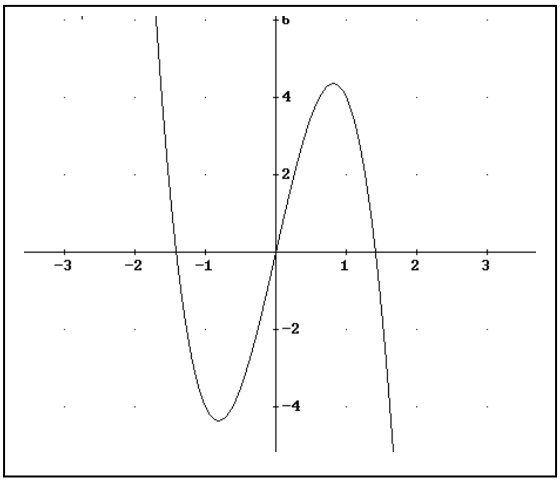
2. a) Bestimmen Sie Hoch- und Tiefpunkte des Graphen von f mit $f(x) = x^3 – x$.

b) Der Graph der Funktion $g(x) = x^4 – a\cdot x^3$ hat bei $x = -3$ eine Extremstelle. Bestimmen Sie a.

c) Der Graph der Funktion $h(x) = x^3 – 5x^2 + a\cdot x$ hat bei $x = 2$ eine Extremstelle. Bestimmen Sie a.

3. Wie hängen diese Bilder zusammen?





G Geheimnis lüften

Hier geht es um
die Aussagekraft der
drei Darstellungsarten von
Funktionen Term, Tabelle, Graph

Vorausgesetzte Bausteine: L, E, N, K, S

1. Von einer Funktion ist der nebenstehende **Term** gegeben:

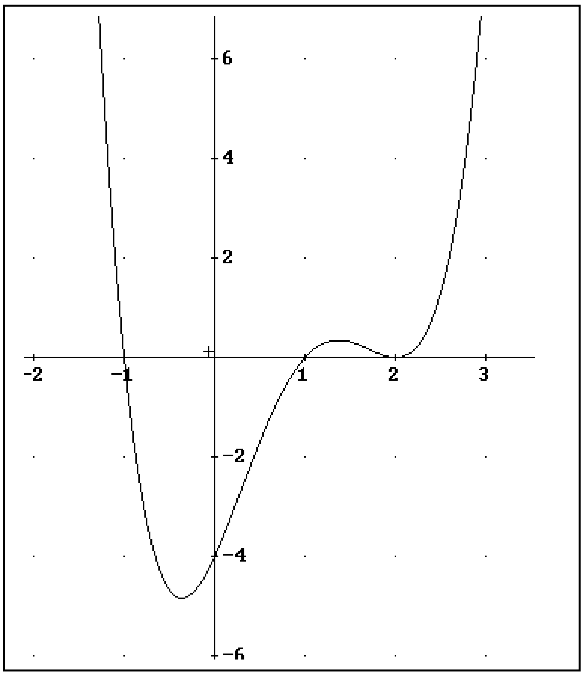
$$f(x) = \frac{2}{3}(x-2)(x^2+\frac{1}{2}x-5)$$

Untersuchen Sie die Funktion mithilfe der Bausteine auf möglichst viele Eigenschaften.

.

2. Von einer Funktion ist der nebenstehende **Graph** gegeben:

Untersuchen Sie die Funktion mithilfe der Bausteine auf möglichst viele Eigenschaften.



Wertetabelle

x	f(x)
-4	192
-3,5	101,06
-3	45
-2,5	14,06
-2	0
-1,5	-3,94
-1	-3
-0,5	-0,94
0	0
0,5	-0,94
1	-3
1,5	-3,94
2	0
2,5	14,06
3	45
3,5	101,06
4	192

3. Von einer Funktion ist die nebenstehende **Tabelle** gegeben.

Untersuchen Sie die Funktion mithilfe der Bausteine auf möglichst viele Eigenschaften.

4. Nennen Sie auch hier beim Bestimmen von Funktionseigenschaften die Vor- und Nachteile der drei Darstellungsarten.

5.* Die Graphen im Check up Aufgabe 3 auf der linke Seite sind Repräsentanten der Kurvenschar $f_k(x) = -\frac{1}{4}x^4 + x^2 - k$. Untersuche diese Kurvenschar allgemein auf möglichst viele Eigenschaften.

Z Spiel: Was gehört zusammen?

Hier geht es darum
zusammengehörige Graphen von Funktionen und ihren Ableitungen zu finden

Vorausgesetzte Bausteine: L

Das hierfür notwendige Material (eine Tabelle und 13 Legeteile) liegt aus!
Ordnen Sie jeweils passende Legeteile in der Tabelle ein.

Q Quiz

Hier geht es darum
die neuen Kenntnisse in einem Quiz zusammen zu tragen.

Vorausgesetzte Bausteine: alle anderen

Wie viele lokale Extrema hat eine ganzrationale Funktion 4. Grades?

a) genau 3	***b) höchstens 3***
c) mindestens 3	***d) keine Aussage möglich***

Überlegen Sie sich nach diesem Muster drei weitere Fragen mit Antwortmöglichkeiten. Nutzen Sie dazu die in der Lernwerkstatt erarbeiteten Inhalte und gehen Sie auf Aspekte ein, die für Sie wichtig sind – das sind z.B.:

- Stellen, an denen Sie „Gedankenblitze“ hatten,
- Inhaltliches, das Ihnen wichtig erscheint,
- „Eselsbrücken“,
- Stellen, bei denen Sie besondere Schwierigkeiten hatten o.a.
- ...

Aus den Vorschlägen aller Gruppen wird ein Quiz für alle erstellt.

Um die erstellten Ergebnisse mit allen zu teilen, böte sich die Benutzung eines der folgenden Dienste an:

Socrative mit Multiple choice- , Richtig/Falsch-Aufgaben und Fragen mit Antworten, die in der Regel ein Wort umfassen; das Einbinden von Abbildungen und Bildern ist möglich:
https://socrative.com

Kahoot mit der Möglichkeit sehr schnell Multiple-Choice-Quiz´ zu erzeugen:
https://kahoot.com/

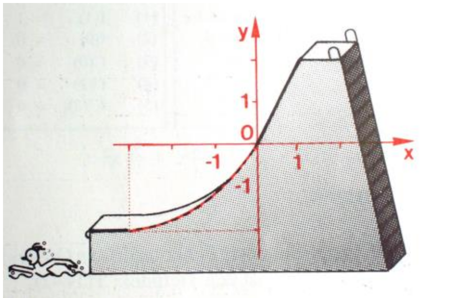
Quizlet mit der Möglichkeit ein Quiz in eine Lernumgebung zu integrieren, so dass bei Unsicherheiten bezüglich der Fragen auch ein wiederholendes Lernen möglich wäre:
https://quizlet.com/de/teachers

Hier geht es um
das Bestimmen von Funktionstermen, wenn einzelne Eigenschaften und Bedingungen gegeben sind.

F Funktionen-Suchdienst

Vorausgesetzte Bausteine: L, E, N, K, S

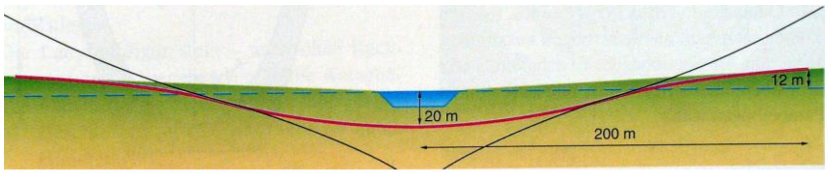
1. „Rutsche"
Aus drei Blechteilen soll eine Rutschbahn für das Schwimmbad so wie in der Abbildung zusammengesetzt werden. Das gebogene Stück (zwischen x=-3 und x=0) soll ohne Knick an die geraden Teile anschließen. Bestimmen Sie eine Funktion, deren Graph passend geformt ist.



2. Eine ganzrationale Funktion 3. Grades hat die gleichen Nullstellen wie $g(x) = x^2 - x - 2$. Ihr Graph schneidet die y-Achse mit der Steigung –3 im Punkt P(0 / -2).

3. Eine ganzrationale Funktion 4. Grades besitzt bei x = 0 ein Extremum und bei x = -1 einen Sattelpunkt[3]. *Die* Tangente bei x = 1 hat die Gleichung y = 48x – 48.

4. Unter einem Kanal soll ein Straßentunnel gebaut werden. Die Fahrbahn soll in der Mitte des Kanals eine Tiefe von 20 m unter der Wasseroberfläche und an den 200 m hiervon entfernten Zufahrten eine Höhe von 12 m über der Wasseroberfläche erreichen.
Die Fahrbahn soll so verlaufen wie in der Abbildung, drei gleich weit geöffnete Parabeln sind so aneinander gesetzt, dass die Zufahrten auf Hochpunkten liegen und die Parabelstücke ohne Knick ineinander übergehen.



[3] Ein Sattelpunkt eines Funktionsgraphen ist ein Wendepunkt mit waagerechter Tangente.