1 Allgemeine Hinweise

Inhalte

Mit der vorliegenden Lernwerkstatt haben Sie Materialien, mit denen sich Schülerinnen und Schüler des 11. Jahrgangs selbstständig die **Elemente der "klassischen" Kurvendiskussion**, Funktionsuntersuchungen und-bestimmungen, erarbeiten können. Die Sequenz besteht aus mehreren Bausteinen bzw. Stationen, die mit Buchstaben bezeichnet sind – das ABC der ganzrationalen Funktionen. Nicht bei allen Bausteinen gilt die Beschränkung auf ganzrationale Funktionen – die Bausteine, bei denen auch andere Funktionen verwendet werden, sind durch einen entsprechenden Hinweis in den Schülermaterialien gekennzeichnet.

Voraussetzung

Es wird der Begriff der „Ableitung“ vorausgesetzt, wobei die Bedeutung der Ableitung als lokale Änderungsrate (z.B.: als Tangentensteigung) den Schülerinnen und Schülern klar sein sollte. Die Grenzwertbildung vom Differenzenquotienten zum Differential zum Beispiel über die h – Methode oder die $x \to x_0 - Methode$ unter Bezug zum Steigungsdreieck sollte vorentlastet werden.

Ziele

Fachkompetenz:

Die Schülerinnen und Schüler sollen sich über einen Zeitraum von ca. 6 Wochen die Thematik selbstständig mit den vorgegebenen Schülermaterialien erarbeiten. Dabei sollen sie die besonderen Eigenschaften von ganzrationalen Funktionen kennen lernen. Sie sollen im Einzelnen:

- besondere Punkte der Graphen mit den jeweiligen Bedingungen (Schnittpunkt mit den Achsen, Extrempunkte, Wendepunkte) kennen und bestimmen,
- den Verlauf des Graphen vorhersagen, beschreiben und interpretieren– lokal und global,
- die unterschiedlichen Darstellungsarten von Funktionen in ihrer Funktionalität kennen (Term, Graph, Tabelle, Situation),

Sozialkompetenz/ Methodenkompetenz:

Neben den inhaltlichen Zielen soll vor allem auch die Eigenverantwortung und Motivation für den eigenen Lernprozess gestärkt werden.

Medienkompetenz:

Die Schülerinnen und Schüler sollen selbstständig entscheiden, wann, wozu und welches Medium zum Bearbeiten der einzelnen Probleme nützlich ist. Zu „Medien“ zählen neben den elektronischen Medien auch das Schulbuch und weitere Nachschlagewerke.

Einstieg

Es empfiehlt sich, die Lernwerkstatt mit einer gemeinsamen Aufgabe im Klassen- oder Kursverband zu beginnen, die die Notwendigkeit der Untersuchung von Funktionen deutlich macht und anregt. Eine Möglichkeit für den Einstieg stellt die nachstehende Aufgabe dar, der Einsatz eines Experimentes böte sich auch an.

Ertragsoptimierung

Die Kosten K(x) - in 100€ - einer Ziegelei bei einer täglichen Produktion von x Einheiten à 10 000 Ziegel können durch die Funktion K(x) erfasst werden:

$$K(x) = 0.25\,x^3 - 3\,x^2 + 12x + 17$$

Untersuchen Sie die Ertragslage der Firma, wenn die Ziegel für 0.80 € pro Stück verkauft werden können. Diskutieren Sie das Problem aus der Sicht des Unternehmers.

Diese Aufgabe sollte in Kleingruppen erörtert werden, bevor im Plenum die Lösungsansätze vorgestellt werden. Eine Darbietung oder fragendes Entwickeln von fertigen Lösungswegen sollte vermieden werden, um die Motivation für die eigenständige Untersuchung nicht zu stören.
Dieses Einstiegsproblem kann nach der Arbeit an der Werkstatt wieder aufgegriffen werden und Lösungsmöglichkeiten mit den neu erworbenen Kenntnissen neu diskutiert werden.

2 Zum Rechnereinsatz

Die Lernwerkstatt ist gedacht zum integrierten Einsatz von Rechnern (besonders Funktionenplotter, grafikfähige Taschenrechner oder ein Computer-Algebra-System). Nur bei wenigen Aufgaben ist der Rechnereinsatz zwingend erforderlich. Er hilft jedoch bei fast allen Bausteinen als Werkzeug durch Visualisierung, systematisches Probieren sowie Generieren von Beispielen um die zentrale Idee zu verstehen und zu abstrahieren. Besonders CAS helfen durch Kontrollmöglichkeit der eigenen Ergebnisse beim selbstständigen Lernen. Deshalb sollte möglichst der Rechner allen Schülerinnen und Schülern stets zur Verfügung stehen (wie bei einem Klassensatz Laptops, CAS-Handhelds, Tablets bzw. ständiger Arbeit im Computerraum). Es genügt aber auch, wenn nur einzelne Computer wie zum Beispiel in einer Medienecke, im Computerraum oder im Selbstlernzentrum der Schule zugänglich sind. In diesem Fall müssen dann zeitliche Absprachen zur Nutzung des Computers zwischen den einzelnen Gruppen getroffen werden.

Folgende Rechner-Kenntnisse sollten die Schüler/innen beherrschen:
- Funktionsgraphen zeichnen lassen,
- Graphik-Fenster sinnvoll einstellen, Zoom-Funktion,
- Umgang mit Wertetabellen, z.B. Tabellen "verfeinern"

.. und zusätzlich bei Rechnern mit Computeralgebrasystem:
- Ableitungen bestimmen
- Gleichungen und Gleichungssysteme lösen.

Für den Einsatz von Computer-Algebra-Systemen (CAS) wie TI Nspire CAS (Handheld oder Software) sowie Geogebra finden Sie auf den Seiten 8 und 9 sowie unter im Internet unter https://tiunterrichtsmaterialien.net/materialien oder (etwas älter: https://wiki.zum.de/wiki/TI-Nspire/Glossar) Hinweise.
Zudem existieren zu beinahe allen Funktionen Lernvideos z.B.:
https://www.youtube.com/watch?v=8bDN4WSV37c

3 Zu den einzelnen Bausteinen

Baustein W	**W**erkzeug: Ableitungsbegriff, Ableitungsregeln
Inhalt	Wiederholung und Vertiefung des Ableitungsbegriffs, Ermitteln der Ableitungsregeln aufgrund von Beispielen
Erfahrungen/ Anmerkungen	Eine mathematische Herleitung und Beweis der Regeln wird hier nicht angeregt – falls dies gewünscht wird, müssen diese Aspekte vorher oder nachher im Unterricht erarbeitet werden.

Baustein A	„Ich gehe eine **A**bleitungsfunktion“
Inhalt	Es werden Zeit- Entfernungs- und Zeit- Geschwindigkeits-Diagramme interpretiert und der Bezug zu Graphen von Funktionen und deren Ableitungsfunktionen hergestellt. Steht ein Ultraschallmessgerät zur Verfügung, können Bewegungsabläufe unmittelbar graphisch aufgezeichnet werden.
Erfahrungen/ Anmerkungen	Die Fragen des Bausteins können auch ohne ein Ultraschallmessgerät bearbeitet werden, dann entfällt lediglich der Zusatz in Aufgabe 2. Jedoch ist der Einsatz eines solchen Gerätes von großem Vorteil, da damit der Begriff der Ableitung und Ableitungsfunktion durch eigene experimentelle Erfahrungen gestützt werden kann. Ein solches Ultraschallmessgerät ist zum Beispiel das CBR (Computer Based Ranger) der Firma Texas Instruments, das auch ausgeliehen werden kann[1]. Im Anhang Seite 11 finden Sie ein Hinweisblatt mit technischen Informationen zur Arbeit mit dem CBR. Ein Einsatz des programmierbaren Fahrzeuges TI Rover ist zu empfehlen.

Bausteine L, E und K	„**L**ange Leitung“ (höhere Ableitungen), **E**xtremes und „Sanft **K**rümmt sich…“
Inhalt	Bestimmen (lokaler) Extremstellen, Erarbeiten der Bedeutungen der 1. und 2. Ableitung Wendepunkt, Links- und Rechtskurve
Erfahrungen/ Anmerkungen	Diese drei Bausteine sind inhaltlich stark vernetzt, da die Aspekte eines Bausteins jeweils zum Verständnis der beiden anderen beitragen. Es hat sich gezeigt, dass Schülerinnen und Schüler häufig vor der fertigen Bearbeitung eines der 3 Bausteine zunächst einen der anderen beginnen. Dieses Vernetzen sollte bewusst gewährt werden, um die Aspekte im Zusammenhang zu begreifen. Aus diesem Grund sind die drei Bausteine in der Erarbeitungsübersicht zyklisch angeordnet. Das Merkposter (siehe Anhang, Seite 10) kann zur Visualisierung ausgelegt oder ausgehängt werden. In Baustein E wird bewusst nach den Unterschieden und Möglichkeiten der drei verschiedenen Darstellungsarten einer Funktion (Term, Tabelle, Graph) gefragt. (s. auch Baustein N

[1] Unter https://education.ti.com/de/forms/wolop-teacher sind Ausleihen von bis zu 30 Rechnern möglich.

	und G) Während der Gruppenarbeit kann es hilfreich sein, verschiedene Möglichkeiten der hinreichenden Bedingung einzubeziehen. Folgende Wege wurden bisher bei Schülergruppen beobachtet: • Betrachten der Steigung für x-Werte etwas kleiner bzw. etwas größer als der mögliche Extrempunkt (Vorzeichenwechselkriterium) • Einsetzen von Funktionswerten für x-Werte etwas kleiner bzw. etwas größer als der mögliche Extrempunkt • Betrachten des Graphen Das traditionell verwendete Einsetzen in die 2. Ableitung wurde nur von Gruppen benutzt, die „Wiederholer“ in der Gruppe hatten oder wenn das Verfahren aus dem Schulbuch übernommen wurde. Die Notwendigkeit des Adjektives „lokal“ im Gegensatz zu „absolut“ war für die meisten selbstverständlich, dennoch sollte dies während der Präsentation noch einmal betont werden.

Baustein N	Die **N**ull-Linie
Inhalt	Bestimmen von Nullstellen
Erfahrungen/ Anmerkungen	Ähnlich wie in den Bausteinen E und G werden hier bewusst die drei Darstellungsarten von Funktionen (Term, Tabelle, Graph) einbezogen und die jeweiligen Vorteile bei der Bestimmung der Nullstellen erfragt. Polynomdivision wurde hier nicht aufgenommen, um die gesamte Thematik der Lernwerkstatt zu begrenzen.

Baustein S	**S**ymmetrien
Inhalt	Erkunden der Symmetrieeigenschaften von Graphen
Erfahrungen/ Anmerkungen	Es geht um Symmetrien zwischen verschiedenen Funktionsgraphen und Symmetrieeigenschaften einzelner Funktionsgraphen. Auch wenn durch die Frage „Erkennt man am Term schon die Symmetrie?“ die Unterscheidung in gerade und ungerade Funktionen nahe gelegt wird, bleibt die Frage nach der konkreten Symmetrieachse oder dem Spiegelpunkt bewusst offen. Manche Schülergruppen haben auch Symmetrieeigenschaften zu Parallelen zur y-Achse oder zu anderen Punkten als dem Nullpunkt einbezogen. Die verschiedenen Ansätze sollten gegebenenfalls in der ganzen Klasse während der Präsentationsphase verglichen werden.

Baustein R	**R**eiterspiel
Inhalt	Vertiefen der neuen Erkenntnisse
Erfahrungen/ Anmerkungen	Ähnlich wie bei dem Legespiel Z bietet dieses Spiel viel Gesprächsanregung über die Inhalte und wurde von den Schülerinnen und Schüler zur Vertiefung der Kenntnisse sehr positiv bewertet. Die Kopiervorlage für den Spielplan finden Sie in Anhang auf Seite 14. Es ist ratsam, den Spielplan mehrfach zu kopieren, damit eine Mehrfachnutzung des Spiels möglich ist. Der

	Spielplan sollte laminiert ausgelegt werden. Dazu sollten Würfel und Spielfiguren zur Verfügung gestellt werden.

Baustein C	**C**heck up
Inhalt	Überprüfen der Erkenntnisse aus den Bausteinen E, L und K
Erfahrungen/ Anmerkungen	Dieser Baustein dient der Selbstkontrolle und ist zunächst eine Sammlung von Aussagen, die begründet als wahr oder falsch zu erkennen sind.

Baustein G	**G**eheimnis lüften
Inhalt	Anwenden der neuen Erkenntnisse
Erfahrungen/ Anmerkungen	Bei einer klassischen Kurvendiskussion ist eine Funktion durch einen Term gegeben und die Aufgabenstellung lautet: „Untersuche diese Funktion“. In Baustein G wird die gleiche Aufgabenstellung genutzt – jedoch nicht nur auf eine Funktion, die durch einen Term gegeben ist, sondern auch auf Funktionen, die alleine durch den Graphen oder alleine durch eine Tabelle gegeben sind. Damit soll einmal mehr die Reflektion über Vor- und Nachteile der verschiedenen Darstellungsarten einer Funktion (Term, Graph, Tabelle) angeregt werden.

Baustein Q	**Q**uiz
Inhalt	Reflektieren der neuen Erkenntnisse
Erfahrungen/ Anmerkungen	Die Schülergruppen sollen sich jeweils drei Quizfragen zu Aspekten der Lernwerkstatt ausdenken. Es bietet sich an, diese Quizfragen zusammen zu stellen und allen als Übungsmöglichkeit und Selbstkontrolle anzubieten. Wird der Voyage 200 der Firma Texas Instruments eingesetzt, so lassen sich diese Fragen zu einem elektronischen Quiz zusammenfassen (als sogenannte „study cards“). Das Besprechen bzw. Spielen des Quiz bietet sich als Abschluss der Lernwerkstatt an.

Baustein F	„**F**unktionen-Suchdienst“
Inhalt	Bestimmen der Funktionsgleichung aufgrund gegebener Bedingungen
Erfahrungen/ Anmerkungen	Bei dieser Art Aufgaben, auch „Steckbriefaufgaben“ genannt, werden die neuen Kenntnisse angewendet. Dieser Baustein kann auch als Teil der Lernwerkstatt entfallen, um die Gesamtzeit der selbstständigen Arbeit zu verkürzen. In diesem Fall könnte die Bearbeitung dieses Bausteins im Anschluss an die Lernwerkstatt – eventuell nach der Lernkontrolle oder Klausur - als eigener Themenblock erfolgen.

4 Zur Organisation des Unterrichts während der Lernwerkstatt

Zu empfehlen ist:

- Die Schülerinnen und Schüler sollten **in Gruppen** zu 3-4 Schülern zusammenarbeiten, wobei mindestens eine Schülerin bzw. Schüler leistungsstark sowie, ein/eine andere(r) leistungsschwach sein sollte.
- Die Erfahrungen haben gezeigt, dass **6 Wochen** (à 3 Unterrichtsstunden) für die Lernwerkstatt eingeplant werden sollten. Um die Zeit gegebenenfalls zu verkürzen, kann Baustein F als Teil der Lernwerkstatt entfallen und als eigene Thematik im Abschluss bearbeitet werden.
- Jede Schülerin/ jeder Schüler erhält ein Heft der **Schülermaterialien**. Dies kann auch digital erfolgen (bei Tablet- oder Laptopklassen).
- Es gibt **keine speziellen Hausaufgaben**, die Schülerinnen und Schüler sind gehalten, auch zu Hause an den Materialien zu arbeiten und entsprechende Absprachen in der Gruppe zu treffen.
- Eine Tabelle (siehe Anhang, Seite 15) kann den Arbeitsfortschritt der Schülergruppen dokumentieren. Dieser Plan sollte im Klassenraum aushängen, um so allen einen **Überblick über den gesamten Arbeitsfortschritt** und die Zeitplanung zu verschaffen. Die Schülergruppen tragen dort ein, welche Bausteine sie bereits erarbeitet haben. Gerade zu Beginn der Einheit empfiehlt sich eine Beratung bezüglich des Arbeitstempos (einige Gruppe beginnen sehr schnell, andere sehr langsam).
- Die Schülerinnen und Schüler sollten ihre Arbeitsergebnisse sorgfältig für sich dokumentieren. Zur **Dokumentation** gehört nicht nur das Aufschreiben von Ergebnissen, sondern insbesondere auch das Festhalten von Merkhilfen, ersten Ideen, Erklärungsversuche, weiteren Erkenntnisse, einleuchtenden Beispielen u.a. Als Anleitung für eine solche Dokumentation kann den Schülerinnen und Schülern ein Merkblatt (Anhang Seite 16) ausgegeben werden. Es ist sehr zu empfehlen, sich jeweils mindestens ein Heft pro Gruppe anzuschauen. Auf diese Weise erhält man zusätzlich zu den Beobachtungen einen Eindruck über den Stand des Lernprozesses. Dadurch erfährt man sowohl sehr schöne Zugänge und individuelle Ideen als auch Fehlvorstellungen, auf die man dann gezielt reagieren kann.
  Für die Dokumentation ist der Einsatz von Tablets/ Laptops von Vorteil, da das Einbinden interaktiver Dateien somit möglich wird.
- Ein oder zwei Kopien der **Lösungen** (siehe Anhang Seite 17/18) sollten zur Lernkontrolle im Klassenraum ausgelegt werden. Erfahrungen zeigen, dass eine Lehrerrolle als Coach von Vorteil ist und jeder Gruppe die Möglichkeit gegeben werden sollte wenigsten einmal in der Stunde mit der Lehrkraft möglich sein.
- Ebenso sollte **Begleitmaterial** (z.B.: verschiedene Schulbücher oder Mathematikduden) bereitgehalten werden. Ab Seite 18 finden sich zudem zusätzliche Hilfen zu mathematischen Inhalten, bei denen gehäuft in der Durchführung Verständnisprobleme auftraten. Diese können als unterstützendes Material (Förderung) oder vertiefend (Forderung) eingesetzt werden.
- Zu einigen Bausteinen wurden digitale Hilfsmaterialien entwickelt, welche die Schülerinnen und Schüler beim Erkenntnisgewinn unterstützen. Die entsprechenden Bausteine sind im Schülermaterial gekennzeichnet.
- Zusatzmaterial, welches mathematische Kenntnisse vertieft und Verknüpfungen zu anderen mathematischen Teilgebieten aufzeigt, existiert für die Stationen N, L und …, Lösungen dazu finden sich im Anhang.

- Um die Erkenntnisse und Ergebnisse zu vergleichen und evtl. zu korrigieren, sollte nach der 1. Stufe eine **Präsentation** der Bausteine K,L,E,N,S im Plenum erfolgen. Es hat sich bewährt, wenn jede Gruppe einen (evtl. zwei) Baustein/e vorstellt. Die Zuordnung, welche Gruppe welchen Baustein präsentiert, sollte nur eine Unterrichtsstunde vor der Präsentation per Los entschieden werden, um eine zu frühe Fixierung auf wenige Bausteine zu vermeiden. Von Vorteil ist es, wenn alle Gruppen „ihr“ Thema an Hand derselben Funktion vorstellen. (z.B.: $f(x)=-6x^4 + 8x^3$)
  Zur Visualisierung der Präsentationen können die einzelnen Gruppen Plakate erstellen mit den jeweils wichtigsten Aspekten. Bei der Arbeit mit einer Lernplattform könnten die Ergebnisse einzelner Gruppen auch digital für alle zur Verfügung gestellt werden, so dass alle Ergebnisse im Klassenraum und zuhause verfügbar sind.
- Im Anhang finden Sie eine **Lernkontrolle** (Anhang Seite 19), die entweder als Test oder als Selbstkontrolle genutzt werden kann. Wird sie als Test genutzt, sollte vorher Zeit zur Klärung offener Fragen im Plenum gewährt werden.
- Im **Anschluss an die Lernwerkstatt** können im Sinne einer Anwendung und Vertiefung der erarbeiteten Bausteine zum Beispiel Optimierungsaufgaben und die Behandlung von Kurvenscharen stehen. Zum Thema „Kurvenscharen“ bietet sich das in der gleichen Reihe erschienene Themenheft „Funktionen mit Parametern, Kurvenscharen“ an.

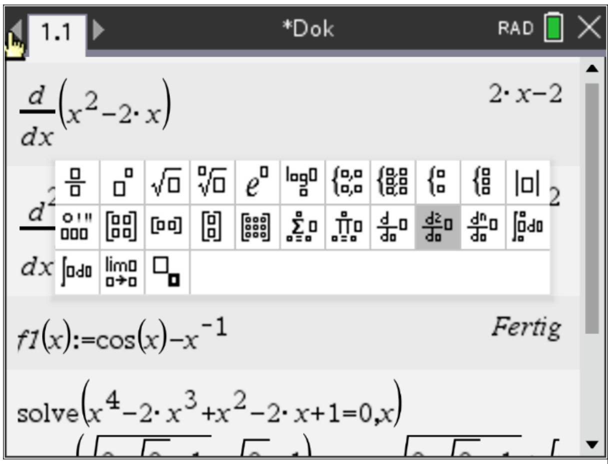
5 Leistungsüberprüfung

Neben der Lernkontrolle finden Sie im Anhang einen Vorschlag für eine **Klausur**, die unmittelbar nach der Sequenz gestellt werden kann (Anhang Seite 20/21).
Die **mündliche Note** sollte sich zusammensetzen aus:

- den allgemeinen Beobachtungen der Lehrperson,
- (evtl.) Prüfungsgespräche mit der Gruppe während der normalen Gruppenarbeitszeit
- evtl. den Lernkontrollen (s. oben bzw. Anhang Seite 19)
- der Abschlusspräsentation (dabei sollte neben der Schlüssigkeit und Korrektheit ein eventuell erstelltes Plakat und die Art des Vortrages mit einbezogen werden).

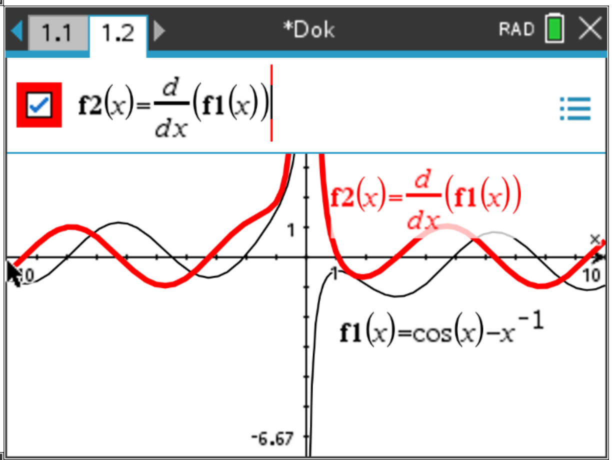
Die **Bewertungskriterien** sollten den Gruppen zu Beginn der Werkstatt mitgeteilt werden. Dies kann in Form eines Informationsblattes geschehen, was an die Schülerinnen und Schüler ausgegeben wird. (Beispiel: Anhang Seite 22)

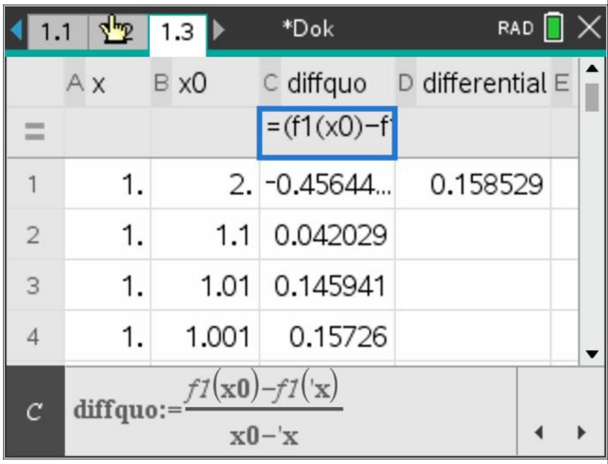
Technische Hinweise TI Nspire / Geogebra



In der Calculator-Applikation kann:
- algebraisch differenziert und integriert werden
- die Lösungsmenge zu Gleichungen und Gleichungssystemen erhalten werden
- eine Termumformung vollständig oder schrittweise durchgeführt werden u.v.m.
- der Grenzwert von Folgen, Summen und Reihen bestimmt werden
- der Wert eines Integrals mit bekannten Integranden und Grenzen bestimmt werden
- man Vektor- und Matrizenoperationen algebraisch durchführen

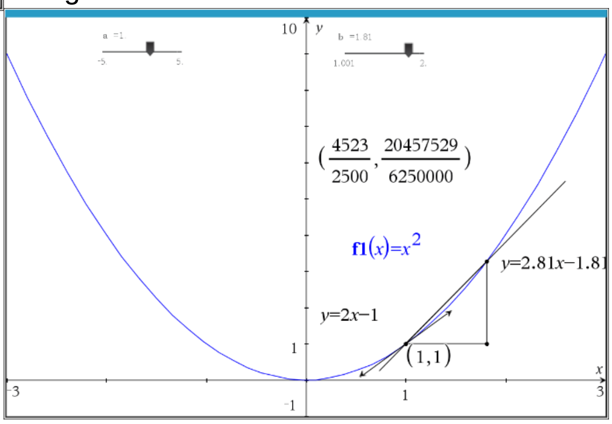
In der Graphs-Applikation können:
- Graphen dargestellt werden
- Ableitungsgraphen zu Graphen visualisiert werden (Vergleich)
- Wertetabellen zu Funktions-graphen ein- und ausgeblendet werden (dynamische Veränderung)
- Parameter durch Schieberegler eingefügt und analysiert werden
- Funktionen bezüglich Nullstellen, Extrema, Wendepunkte u.a. untersucht werden
- Integrale zwischen x-Achse und Graph und zwischen Graphen bestimmt werden u.v.m.



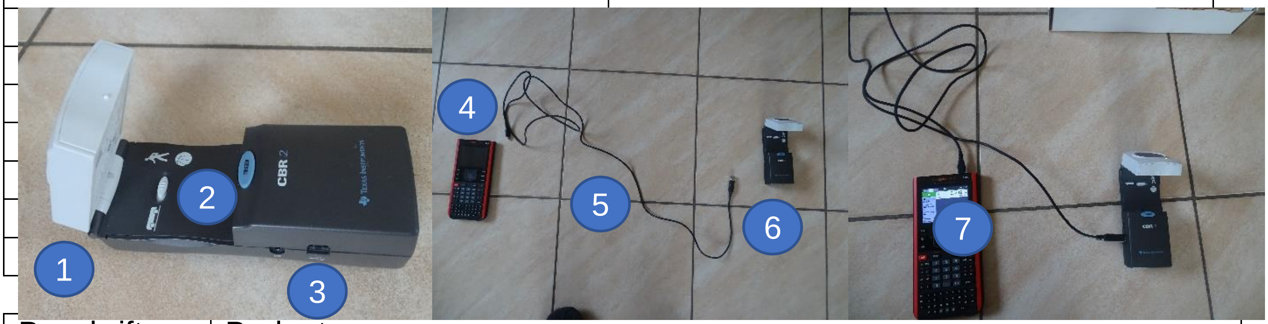


In der List&Spreadsheets-Applikation kann:
- die Eingabe von Daten in Listen erfolgen und die Berechnung statistischer Daten
- eine Ergebnisliste aus einer bekannten Liste berechnet werden
- ein neues Ergebnis aus bereits mit Werten belegten Feldern erzeugt werden
- eine Datenwolke aus einer Graphs-Applikation generiert werden (Geometrischer Ort)
- eine oder mehrere Regression(en) zu gegebenen Daten berechnet werden unter Angabe des Residuenkoeffizienten

Der Einsatz von Schiebereglern (Parametern) erlaubt in vielen Fällen eine gute Visualisierung eines mathematisch abstrakten Zusammenhanges. Die Möglichkeit, sich einem Sachverhalt algebraisch, geometrisch und statistisch zu nähern, begünstigt den Erwerb vernetzten Wissens sowie unterschiedliche Zugänge zu einem mathematischen Sachverhalt. In einer Applikation kann ein gewählter Parameter in verschiedener Repräsentation verknüpft werden.

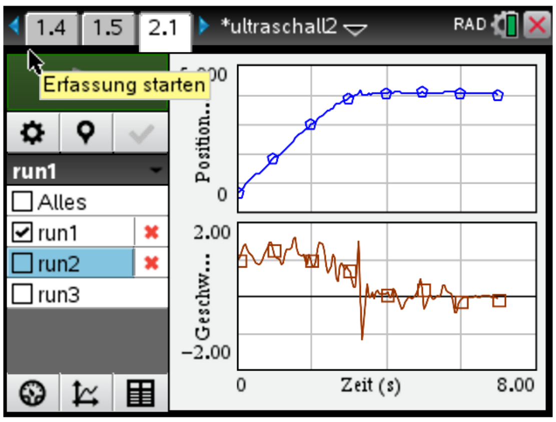


<u>Benutzung eines Ultraschallsensors (hier Texas Instruments CBR 2)</u>



Beschriftung	Bedeutung
1	Beweglicher Kopf des Sensors, die Erfassung erfolgt im Winkel von 30° bis zu einer Entfernung von fünf Metern
2	Schalter zum Wechsel der Erfassungsmodi (links für die Bewegung von Fahrzeugen, rechts für die Bewegung von Fußgängern, Bällen o.ä.)
3	Standard B USB-Anschluss zum Anschließen eines Taschenrechners oder Computers
4	Taschenrechner (hier TI nspire) oder allgemein Datenwandlers
5	Verbindungskabel (möglich sind
6	Ultraschallsensor (hier Texas Instruments CBR 2)
7	Display des Taschenrechners/ Datenwandlers (automatische Erkennung des Sensors und der eingestellten Messmethode z.B. Fahrzeug oder Ball)

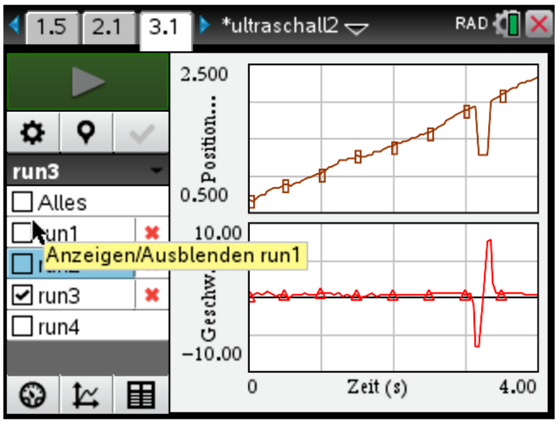
<u>Einrichtung eines Experiments:</u>
Schließt man den Ultraschallsensor an den TI nspire an, so öffnet sich automatisch eine Vernier DataQuest – Applikation. Mithilfe des Cursors und der drei optischen Knöpfe für Modus, Geschwindigkeit und Dauer kann jedes Experiment eingestellt werden. Für die Einführung in die Differential-rechnung am Beispiel von Weg-Zeit- und Geschwindigkeit-Zeit-Diagrammen bietet es sich an im Zeitmodus zu bleiben. Die Geschwindigkeit in Stichproben pro Sekunde kann nicht höher als 200 Stichproben pro Sekunde eingestellt werden, was bei Versuchen zum freien Fall beachtet werden sollte. Das Experiment wird durch Anklicken der grünen Schaltfläche mit dem Cursor begonnen (es gibt manchmal eine kleine Zeitverzögerung im Bereich einer Zehntelsekunde).



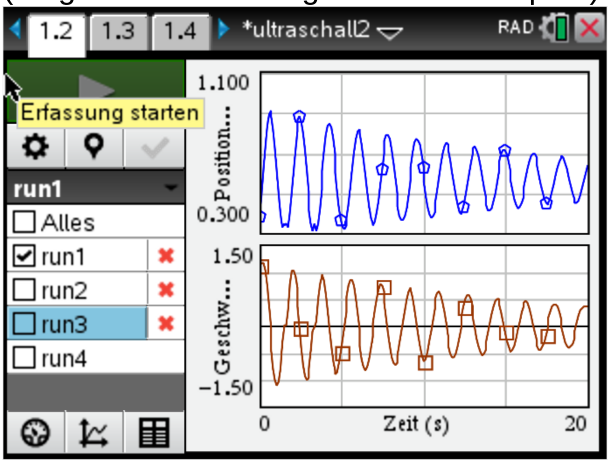
Beispiele für Experimente: Schülerinnen und Schüler werden gebeten:

a) möglichst gleichmäßig vom Sensor weg bzw. auf den Sensor zuzulaufen

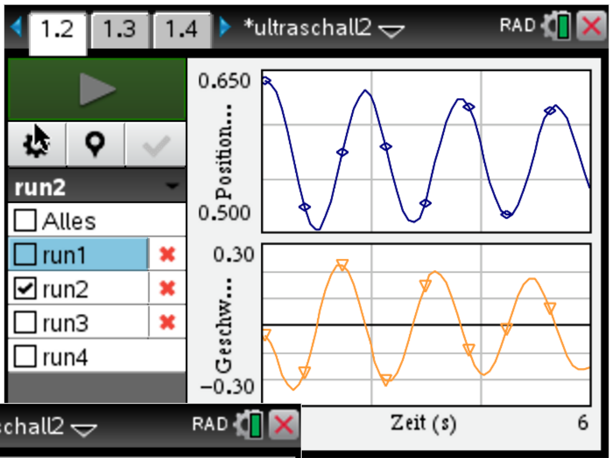
b) möglichst schnell vom Sensor wegzulaufen

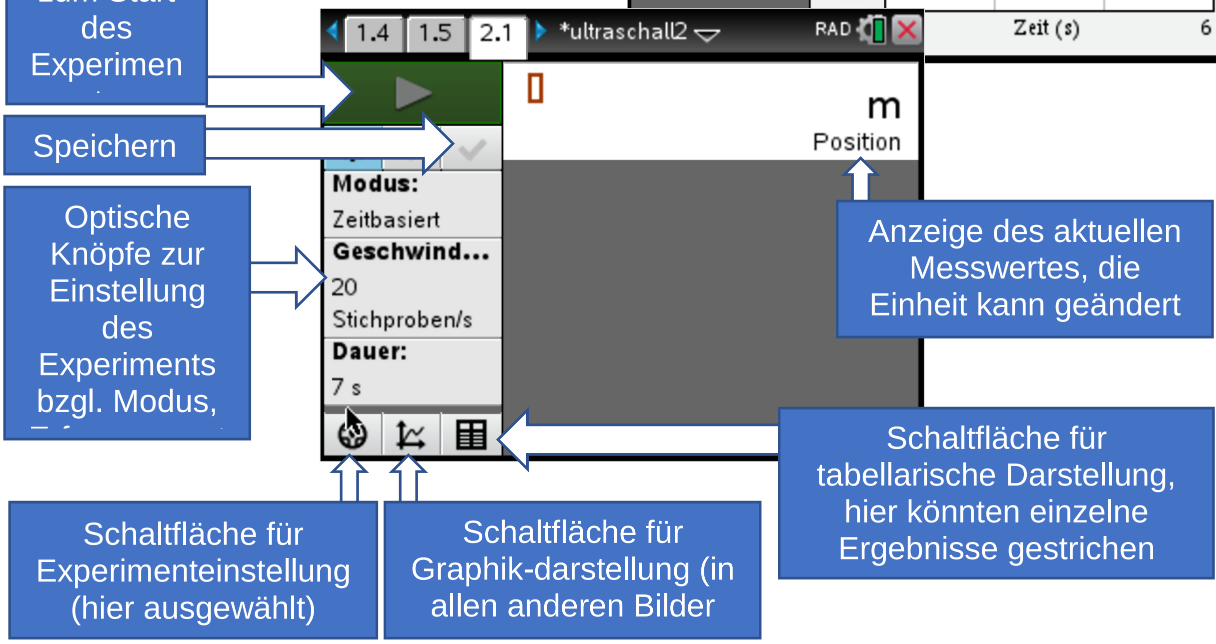


Nebenstehend ist ein Beispiel zu sehen, in dem ein gleichmäßiges Laufen mit Rückprall an der Wand zu sehen ist. Nach einer Messung sollte mit dem Haken gespeichert werden. Mit einem Klick auf die Fläche „run" kann man die darzustellenden Daten wählen. Ein Auto (hierzu kann sehr gut der TI Rover benutzt) fährt eine bestimmte Strecke in einer gleichen bzw. veränderten Geschwindigkeit. Automatisch wird zusätzlich zum Weg-Zeit-Diagramm das Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm erzeugt.Hierbei können Schwankungen auftreten (siehe Graphik), die durchaus zur Thematisierung der mittleren Änderungsrate benutzt werden können (mögliche Anwendung wären Blitzampeln).



Auch Messungen zu periodischen Vorgängen können sinnvoll durchgeführt werden. Hierzu können sowohl Pendel als auch Bälle, die an einem Punkt befestigt werden, Verwendung finden. Durch Klicken auf einen beschrifteten Punkt auf der Achse (hier wurde die 20 auf der Zeit-Achse ausgewählt und mithilfe der Tasten durch eine sechs ersetzt) kann man sich auch nur einen Ausschnitt der Daten anzeigen lassen. Andere Experimente, die sich bezüglich der Durchführung eignen, sind u.a. freier Fall, ungedämpfte Schwingung.





INFO: Fundamentalsatz der Algebra

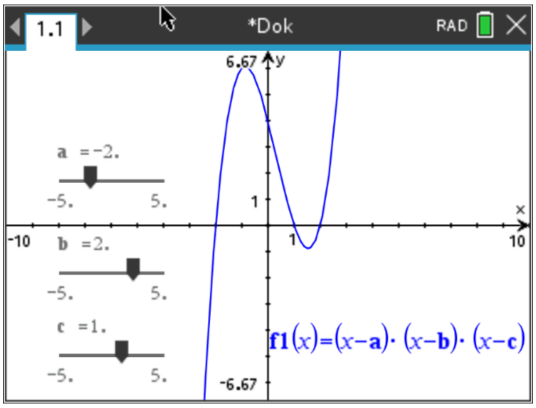


Abbildung 1: fundamentalsatz.tns verfügbar

Schon im späten 18. Jahrhundert bewies Carl-Friedrich Gauß in Rahmen seiner Promotion (Doktorarbeit), dass jedes komplexe[2] Polynom mindestens eine Nullstelle besitzt.
Aus dieser Gesetzmäßigkeit folgt direkt, dass jedes komplexe Polynom vom Grad n genau n Nullstellen besitzt, die aber nicht verschieden sein müssen.

Definition Polynom:
Ein ganzrationales Polynom ist ein Term der Form
$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1 x^1 + a_0 = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$

Satz: Jedes reelle Polynom vom Grad n hat höchstens n Nullstellen ⇔ Die Gleichung $\sum_{i=0}^{n} a_i x^i = 0$ besitzt höchstens n Lösungen, wenn a_i, $x \in \mathbb{R}$ und $i \in \mathbb{N}$

Beweis: Da es Polynome vom Grad n geben muss, welche sich durch Ausmultiplizieren von Termen der Form: $(x - a_0) \cdot (x - a_1) \cdot (x - a_2) \cdot \ldots \cdot (x - a_n)$ ergeben, muss es bei verschiedenen a_i auch insgesamt n verschiedene Lösungen der Gleichung $\sum_{i=0}^{n} a_i x^i = 0$ geben.
Ebenfalls ist klar, dass die Zahl der verschiedenen Lösungen geringer wird, wenn man zulässt, dass die a_i nicht verschieden sein müssen ($\rightarrow$ *Info: mehrfache Nullstellen*). □

Setzt man nur reelle Zahlen ein, kann auch der Fall keiner Lösung auftreten, wenn der Grad des Polynoms gerade ist, da Terme der Form $(x^2 + r)$; $r > 0$ für reelle r nicht negativ oder null werden können. Da auch Terme mit zusätzlichem linearem Summanden immer positiv sein können, genügt es für die Nichtlösbarkeit, wenn ein Polynom in Faktoren zerlegt werden kann, dessen Faktoren immer positiv sind.
Ist der Grad eines Polynoms ungerade, so lässt sich dieses immer in ein Produkt aus einem linearen und einem quadratischen Term zerlegen, weswegen die Gleichung $\sum_{i=0}^{n} a_i x^i = 0$ für ungerade n immer mindestens eine Lösung besitzt.

Technischer Hinweis:
Computer-Algebra-Systeme verfügen grundsätzlich über eine Funktion zum Faktorisieren von Termen. Diese Funktion zerlegt das Polynom in ein Produkt aus Teilpolynomen falls möglich.

Aufgaben: Faktorisiere die nachstehenden Polynome falls möglich

a) $x^2 + 7x + 10$	e) $x^2 + 4$	i) $x^3 - 2x^2 - 15x$
b) $x^4 - 9$	f) $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$	j) $x^5 - 12x^4 + 57x^3 - 134x^2 + 156x - 72$
c) $x^3 - x$	g) $2x^3 - 6x^2 + 6x - 2$	k) $x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 5x^2 - 6x$
d) $x^4 - 2x^2 + 1$	h) $x^4 - 4x^3 + 4x^2$	l) $x^5 + \frac{3}{2}x^4 - \frac{5}{16}x^3 - \frac{15}{32}x^2 + \frac{1}{64}x + \frac{3}{128}$

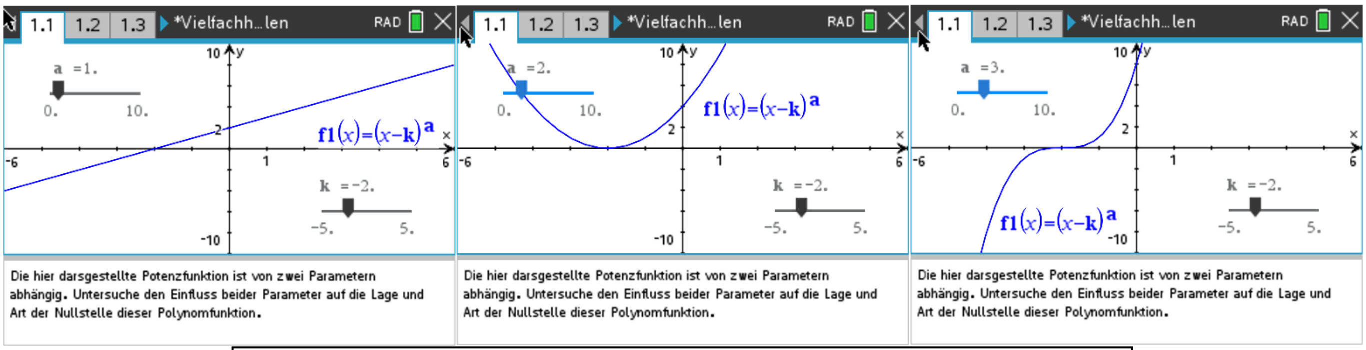
[2] Komplexe Polynome sind Abbildungen der Form: $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, die komplexen Zahlen bilden einen Zahlkörper, in dem man auch Gleichungen der Form $x^2 = a$ mit $a < 0$ lösen kann, die Zahlen haben das Format $a + b \cdot i$ mit $i^2 = -1$

INFO: Vielfachheit von Nullstellen

Durch den Fundamentalsatz der Algebra wissen wir, dass jedes Polynom vom Grad[3] n höchstens n Nullstellen besitzt bzw. die Gleichung

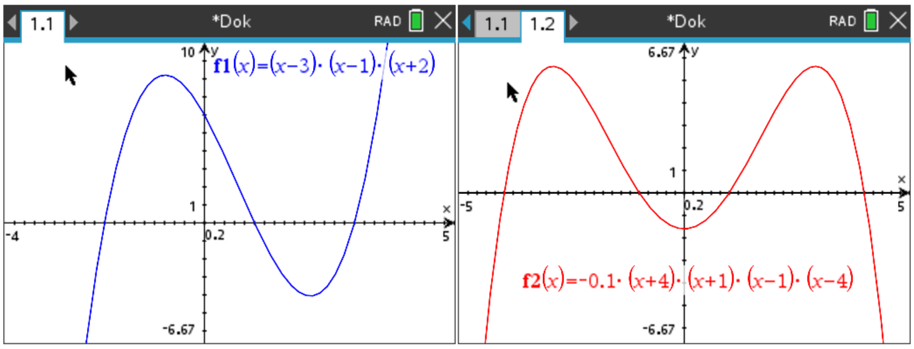
$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_1 x^1 + a_0 = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = 0$$

höchstens n Nullstellen besitzt.

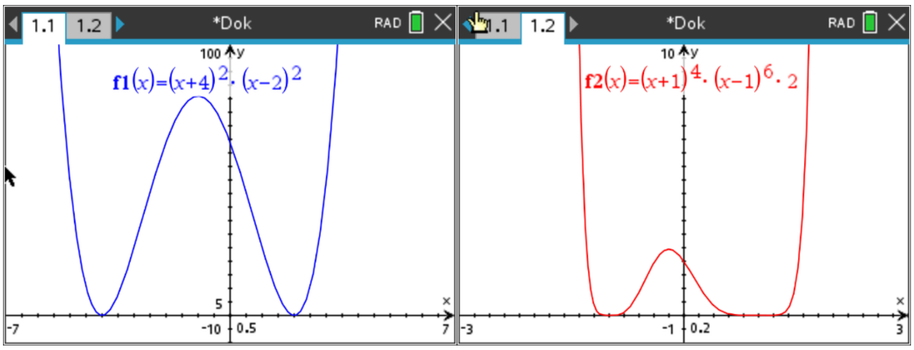


Zur Unterstützung des Lernerwerbs kann die Datei Vielfachheit von Nullstellen.tns genutzt

Enthält ein Polynom in seiner Linearfaktorzerlegung einen linearen Term (x – a) genau einmal, so hat der Graph dieses Polynoms an der Stelle x = a eine einfache Nullstelle, d.h. der Graph schneidet an der Stelle x = a die x-Achse. Das liegt daran, dass dieser Teilterm für alle x > a ein anderes Vorzeichen besitzen muss als für alle x > a.



Beide dargestellte Polynomgraphen besitzen ausschließlich einfache Nullstellen. Diese bleiben auch bei Multiplikation mit einem Faktor erhalten (z.B. c = -0,1). An doppelten, vierfachen oder allgemein an ganzzahligen Nullstellen, die gerade sind, findet kein Vorzeichenwechsel statt. Der Graph berührt dort die x-Achse. Diese Nullstellen treten genau dann auf, wenn Polynome eine Linearfaktorzerlegung besitzen, bei denen ein Linearfaktor doppelt, vierfach oder allgemein ganzzahlig gerade auftritt.



Mit größer werdendem Exponenten schmiegt sich der Graph immer flacher in der Nähe der Nullstelle an die x-Achse an. Ein Faktor (z.B.: 2) beeinflusst die Lage der Nullstellen nicht.

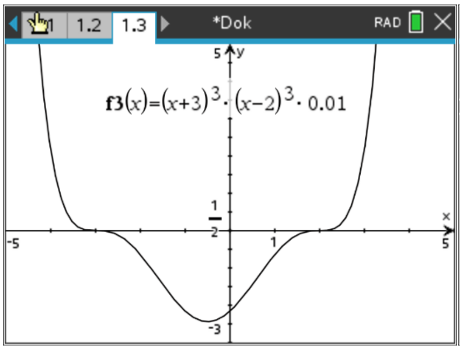
Verständnisaufgabe:

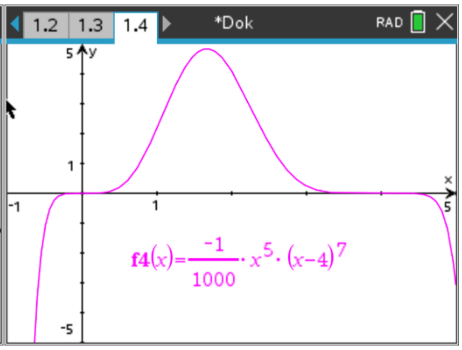
1. Erkläre, warum der Graph die x-Achse nicht schneidet.
2. Erläutere, ob es Funktionen geben kann, die doppelte, vierfache,… Nullstellen besitzen, bei denen der Graph die x-Achse von unten berührt.

---

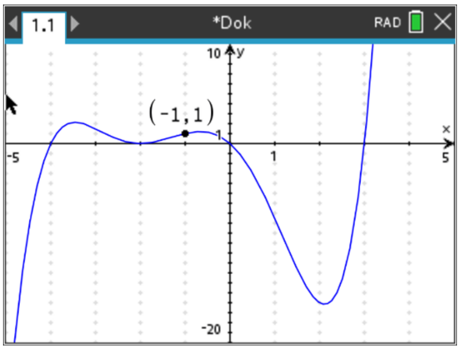
[3] Als Ergänzung zu diesem Blatt enthält das Informationsblatt zum Fundamentalsatz der Algebra zusätzliche Informationen zu Polynomen, deren Grad sowie der Lösungsmenge entsprechender Gleichungen.

An dreifachen, fünffachen oder allgemein an ganzzahligen Nullstellen, die ungerade und von eins verschieden sind, findet ein Vorzeichenwechsel statt. Der Graph berührt dort die x-Achse und schneidet diese anschließend (Sattelpunkt). Diese Nullstellen treten genau dann auf, wenn Polynome eine Linearfaktorzerlegung besitzen, bei denen ein Linearfaktor dreifach, fünffach oder allgemein ganzzahlig ungerade auftritt.





Mit größer werdendem Exponenten schmiegt sich der Graph immer flacher in der Nähe der Nullstelle an die x-Achse an.
Ein Faktor beeinflusst die Lage der Nullstellen nicht.
Sind bei Graphen die Nullstellen leicht abzulesen, so kann ein Funktionsterm anhand der Art und Lage der Nullstellen leicht angegeben werden. Da ein Faktor die Lage und Art der Nullstellen nicht beeinflusst, muss dieser in der Regel noch bestimmt werden.



Dies kann durch Einsetzen eines Punktepaares in den allgemeinen Funktionsterm erfolgen:
Im vorliegenden Beispiel hat der Graph drei einfache Nullstellen bei $x_1 = -4$, $x_2 = 0$ und $x_3 = 3$ sowie eine doppelte Nullstelle bei $x_{4/5} = -2$. Somit ergibt sich ein möglicher Funktionsterm mit:

$f(x) = (x+4)\cdot(x+2)^2\cdot x\cdot(x-3)\cdot k$

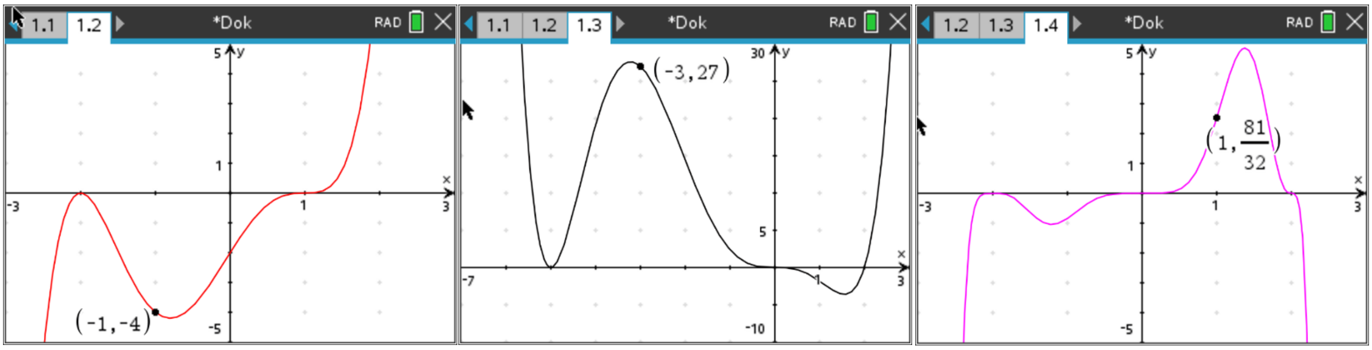
Da der Punkt P(-1/1) auf dem Graphen liegt, gilt zudem:

$$f(-1) = (-1+4)\cdot(-1+2)^2\cdot(-1)\cdot(-1-3)\cdot k = 1$$

$$\Leftrightarrow (3)\cdot(1)^2\cdot(-1)\cdot(-4)\cdot k = 1 = 12\cdot k \Leftrightarrow k = \frac{1}{12}$$

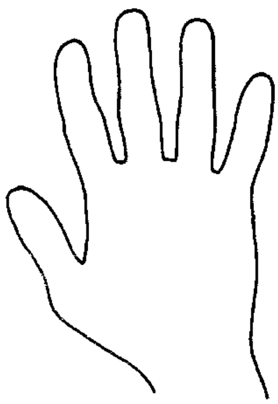
Also gilt: $f(x) = (x+4)\cdot(x+2)^2\cdot x\cdot(x-3)\cdot\frac{1}{12}$

Bestimme jeweils einen möglichen Funktionsterm zu den nachstehend abgebildeten Graphen!



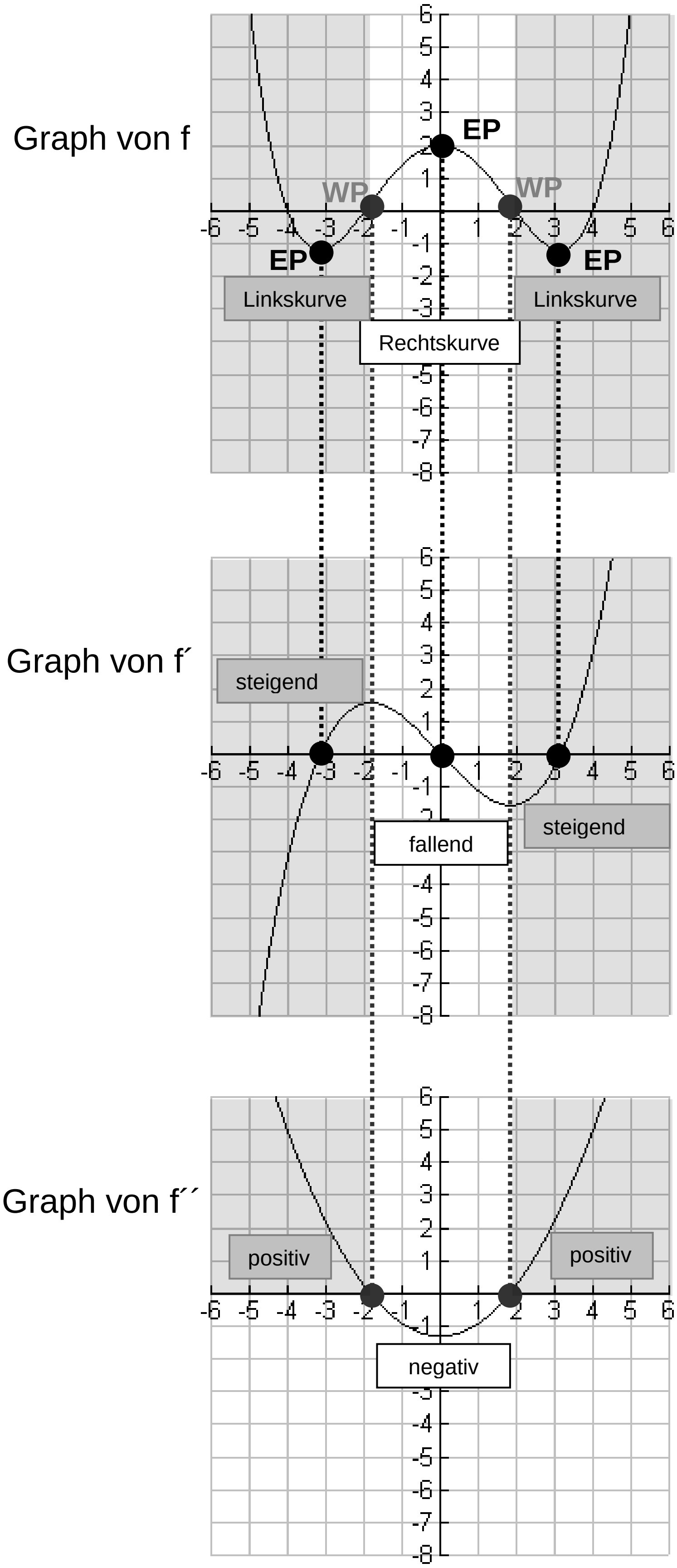
Zusatz für Kreative:

Versuche einen Graphen zu erzeugen, bei dessen Verlauf dem Umriss eines Handabdruckes ähnelt. Dokumentiere Dein Vorgehen.



Merkblatt

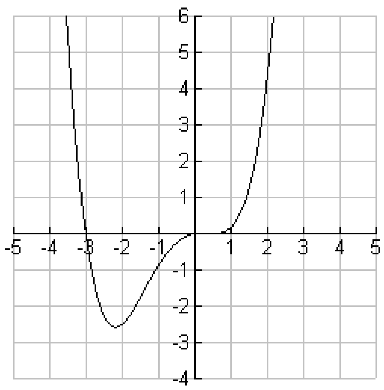
Zusammenhänge zwischen den Graphen von f, f´und f´´

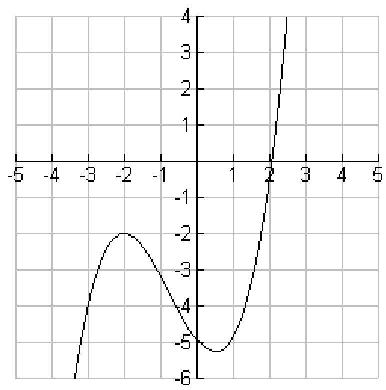


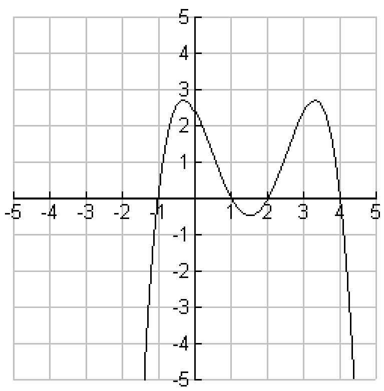
Spiel: Was gehört zusammen? (Material zu Station Z)

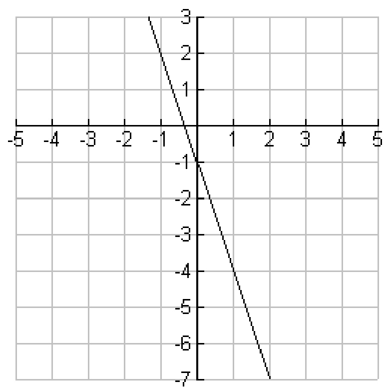
Ziel:
Die Schülerinnen und Schüler sollen aus 13 verschiedenen Graphen jeweils drei zusammengehörende Graphen (die zu f, f´ und f´´) erkennen und in einer Tabelle einordnen.
(Die Lösung entnehmen Sie bitte der übernächsten Seite/ Anhang 9, die vier Graphen auf dieser Seite sind zusätzliche Legeteile.)

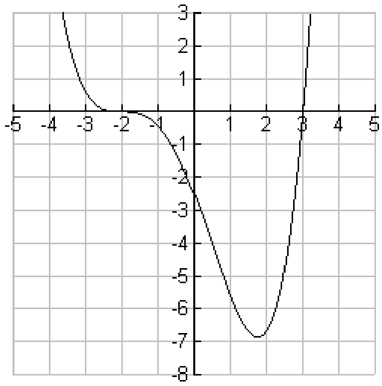
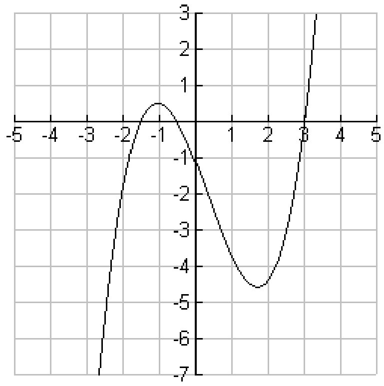
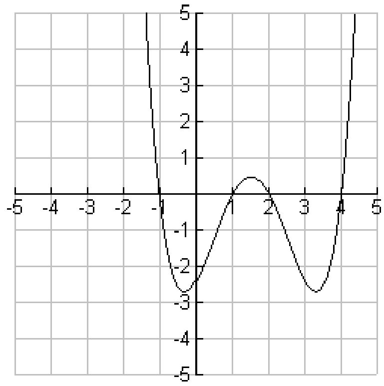
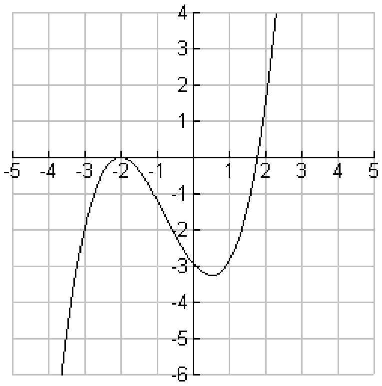
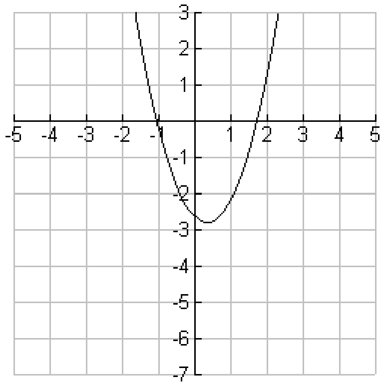
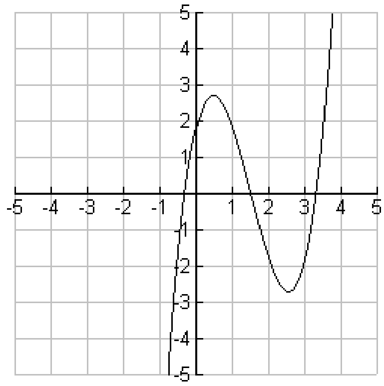
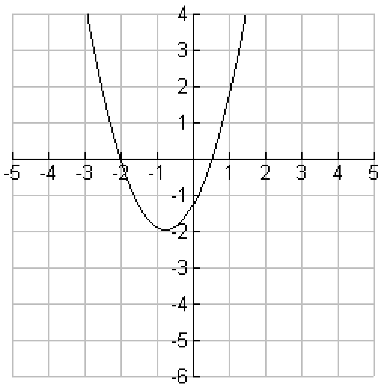
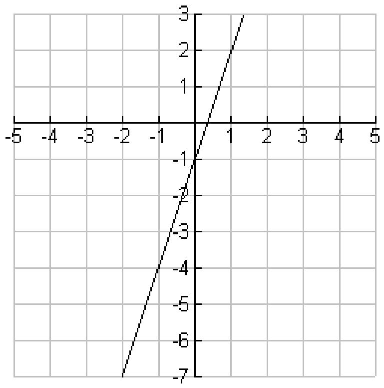
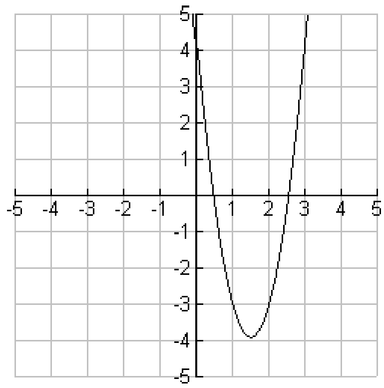
Vorbereitung:
Kopieren Sie die leere Tabelle als Spielplan sowie die 13 Legeteile mit den Graphen und schneiden Sie alle 13 Graphen (4 auf dieser und 9 auf der übernächsten Seite) einzeln aus.
Es empfiehlt sich, Spielplan und Legeteile zu laminieren.
(Als Kontrollmöglichkeit für die Schülerinnen und Schüler kann man vor dem Laminieren und Zerschneiden der 9 Lösungsgraphen – Tabelle übernächste Seite - noch ein beliebiges Bild auf die Rückseite malen oder aufkleben. Natürlich sollten dann auf den 4 zusätzlichen Graphen auch Bildteile vorkommen.)



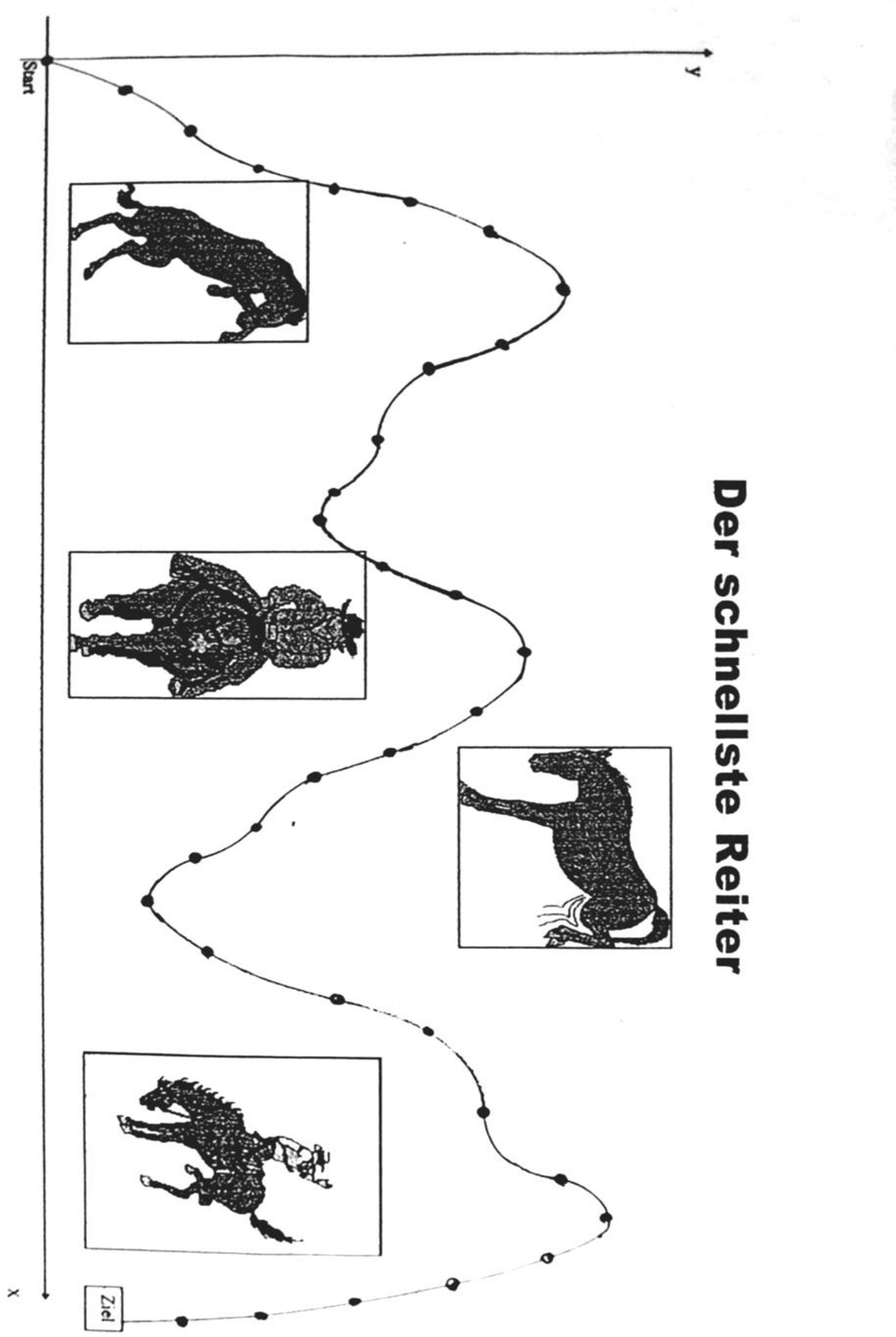






	1	**2**	**3**
f			
f´			
f´´			

Reiterspiel (Spielplan zu Station R)



Lernwerkstatt: „Das ABC der ganzrationalen Funktionen“

Name	W	E	L	K	S	A	N	Z	G	R	C	F	Q

Tipps für die Dokumentation

Gestalten Sie Ihr Heft zu dieser Lernwerkstatt so, dass es auch später noch (z.B.: bei der Abiturvorbereitung) als hilfreiches Nachschlagewerk dienen kann!

Damit dies gelingt:

- Aufgaben- und Problemstellung sollten immer klar sein. Seitenangaben, die sich auf ein Buch beziehen, was später nicht mehr vorliegt, bringen nichts.
- Neben fertigen Ergebnissen sollten Sie auch „Eselsbrücken“, Merkhilfen, gelungene Erklärungen (in Ihrer Sprache), überzeugende Beispiele u.ä. notieren.
- Die Sprache sollte korrekt und für Sie verständlich zugleich sein!
- Nehmen Sie auch Verallgemeinerungen (evtl. auch aus Lehrbüchern übernommen) an passender Stelle mit auf.

Ihr Heft soll

- Fragen beantworten,
- neue Fragen und eigene Gedanken enthalten,
- sprachlich klar und eindeutig verfasst sein,
- Zusammenfassungen von Gesprächen und Überlegungen im Unterricht wiedergeben,
- eine Arbeitsrückschau enthalten bzw. ermöglichen.

Datum

Aufgaben - /Problemstellung : ....
...usw

Erste Überlegungen:
..
...
........................usw

- Vermutungen
- Offene Fragen
- Wissenslücken
- Erste Ideen
- ...

So bin ich / sind wir vorgegangen:
(Natürlich kann man das auch anders nennen: Struktur des Vorgehens, Arbeitsplan,....!)
..
...
........................usw

- Lösungsideen
- Lösungen
- Aha-Erlebnisse
- Reflexionen (z.B.: Gemachte Fehler?, Was hätte man besser machen können?)
- ..

Verallgemeinerung:
..
..
........................usw

- Begriffe: Definitionen und Sätze (Selbst formuliert oder aus Lehrbüchern übernommen)
- Evtl. Beispielaufgaben
- Standortbestimmung
- ..

Anmerkungen:
(entweder hier oder zwischendurch)
....

- Persönliche Anmerkungen.
- Persönliche Bewertungen
- Verbindungen zwischen Thema und Alltag??
- Gedanken über den Unterrichtsstil und zum persönlichen Lernen
- ...

Lösungen zu den Aufgaben in der Lernwerkstatt

W **Zeichnerisch:** Man erhält bei diesen Konstruktionen den Graphen der Ableitungsfunktion
Unterstützend kann die Datei steigungsdreieckdiffquo.tns und Tangentensteigung.tns benutzt werden.
Rechnerisch: Zu $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ gehört: $f'(x) = n a_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + \ldots + 2a_2 x + a_1$

A 1. a): 1f, 2f, 3w b) 1w, 2f, 3w ($v = 0\frac{m}{s}$), 4w, 5w, 6f c) 1f, 2w, 3f

2. Die Person läuft zuerst mit konstanter Geschwindigkeit, verzögert dann konstant bis eine Richtungsänderung erfolgt (sie rückwärts läuft). Anschließend läuft sie langsamer werdend rückwärts (wieder konstante Beschleunigung), stoppt für einen längeren Zeitraum und beschleunigt dann nicht konstant (eine lineare Beschleunigung könnte aus quadratisch ansteigender Geschwindigkeit vermutet warden).

3. a) 1f, 2f, 3f, 4w, b) 1f, 2f, 3w, 4f, 5w

4. Geschwindigkeit ist <u>ein</u> Beispiel für eine Anwendung von „Ableitung/ Ableitungsfunktion“. Die Ableitung beschreibt dabei die Momentangeschwindigkeit (momentane Änderungsrate) zu einem bestimmten Zeitpunkt, die Ableitungsfunktion stellt die Geschwindigkeiten während eines Bewegungsablaufs dar. Andere Anwendungsbereiche für Ableitungen sind momentane Änderungsraten bei wirtschaftlichen Prozessen, Wachstumsprozesse oder Steigungen bei Passstraßen. Auch Temperatur- und Druckänderungen werden im Bereich der Meteorologie mithilfe von Differentialen beschrieben und sogar bei Wasserleitungen im Haus.

L <u>Ableitungen von f, g und h</u>

$f(x) = x^2 - 6x + 8$, $f'(x) = 2x - 6$, $f''(x) = 2$, $f'''(x) = 0$
$g(x) = -2x^3 + 6x^2$, $g'(x) = -6x^2 + 12x$, $g''(x) = -12x + 12$, $g'''(x) = -12$, $g''''(x) = 0$
$h(x) = x^5 - 4x^3 + 4x - 7$, $h'(x) = 5x^4 - 12x^2 + 4$, $h''(x) = 20x^3 - 24x$, $h'''(x) = 60x^2 - 24$, $h''''(x) = 120x$, $h^{(V)}(x) = 120$, $h^{(VI)}(x) = 0$

<u>„Wie oft muss man ableiten, bis zum 1. Mal der Ableitungsterm Null ergibt?“</u> Wenn n der Grad der Funktion ist, dann ist $f^{(n+1)} = 0$.

<u>Die Zusammenhänge zwischen den Graphen und ihren Ableitungsgraphen: (vgl. Merkposter!!)</u>

f(x)	Nullstelle	Extremstelle	Wendepunkt	Rechtskurve	Linkskurve
f´(x)	----	Nullstelle	Extremstelle	fällt	Steigt
f´´(x)	----	----	Nullstelle	negativ	Positiv

Grad der Funktion	Max. Anzahl Nullstellen	Max. Anzahl Extrempunkte	Max. Anzahl Wendepunkte
3	3	2	1
n	n	n - 1	n - 2

Zusatz: Fundamentalsatz:

a) $(x + 2)(x + 5)$ b) $(x^2 - 3)(x^2 + 3)$ c) $x(x + 1)(x - 1)$ d) $(x^2 - 1)^2$ e) keine Faktorisierung möglich
f) $(x - 3)(x - 2)(x - 1)$ g) $2(x - 1)^3$ h) $x^2(x - 2)^2$ i) $x(x - 5)(x + 3)$ j) $(x - 2)^3(x - 3)^2$
k) $x(x - 3)(x - 2)(x - 1)(x+1)$ l) $(x - 0{,}5)(x - 0{,}25)(x + 0{,}25)(x + 0{,}5)(x + 1{,}5)$

Zusatz: Vielfachheit von Nullstellen:

1) Da beide Teilterme beider Funktionen nur gerade Exponenten enthalten, können die Ergebnisse der Klammern nur positiv sein. Da kein negativer Faktor oder Summand existiert, müssen auch die Produkte nicht-negativ sein. Deswegen kann null als y-Wert nicht unterschritten werden.

2) Bei einem negativen Koeffizienten vor den Linearfaktoren ergäben sich ausschließlich nicht-positive y-Werte (trotz der positiven Vorzeichen der Ergebnisse der Klammern). Ein Beispiel wäre $f(x) = -(x - 1)^2(x + 1)^4$

E

1) Der Graph der Funktion steigt aus dem negativ Unendlichen kommend bis zum lokalen Maximum monoton an, danach fällt er bis zum Erreichen des lokalen Minimums monoton (wobei ein Wendepunkt auf der Hälfte der lokalen Extrema liegt) und steigt danach weiter monoton ins Unendliche. Der parabelförmige Graph der ersten Ableitung fällt monoton, hat eine Nullstellen an den Extremstellen von f(x) und ein lokales Minimum, wo der Wendepunkt der Funktion f(x) liegt. Nach diesem lokalen Minimum steigt der Graph streng monoton. Der lineare Graph der zweiten Ableitung steigt streng monoton an.

2)

Eigenschaften des Funktionsgraphen	Eigenschaften des Graphen der ersten Ableitung	Eigenschaften des Graphen der zweiten Ableitung
steigt monoton	positive Funktionswerte	
Ist rechtsgekrümmt (mit dem Uhrzeigersinn)		negative Funktionswerte
Lokales Minimum oder Maximum	Funktionswert ist null	Bei Minimum positiver Funktionswert, bei Maximum negativer Funktionswert
fällt monoton	negative Funktionswerte	
ist linksgekrümmt (gegen den Uhrzeigersinn)		positive Funktionswerte
Punkt mit maximaler/minimaler Steigung	lokales Maximum oder Minimum	Nullstelle

3) An einem lokalen Extremum ändert sich das Vorzeichen der Steigung. Vor einem lokalen Maximum war die Steigung positiv, danach ist sie negativ. Bei einem lokalen Minimum ist es umgekehrt.

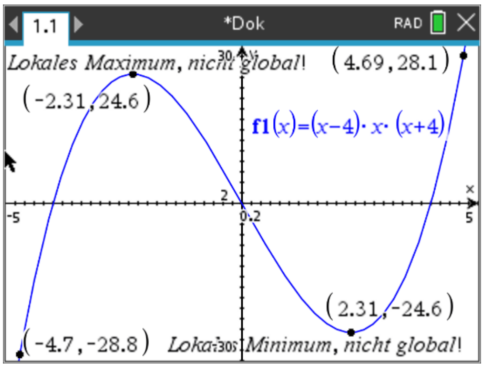
4) Man sagt : $f'(x_0) = 0$ ist eine **notwendige Bedingung** für ein lokales Extremum. **Hinreichende Kriterien** erlauben die Unterscheidung in lokale Minima und Maxima sowie Sattelpunkte, die keine lokalen Extrema sind. Die wichtigsten hinreichenden Kriterien sind das Vorzeichenwechselkriterium:
$f'(x_E - h) > 0 \; und \; f'(x_E + h) < 0 => bei \;\; x_E \; liegt \; ein \; lokales \; Maximum \; vor, f'(x_E - h) < 0 \; und \; f'(x_E + h) > 0 =>$
$bei \;\; x_E \; liegt \; ein \; lokales \; Minimum \; vor$
und das f´´-Kriterium mit:
$Ist \; f''(x_E) < 0, liegt \; bei \; x_E \; ein \; lokales \; Maximum \; vor, ist \; f''(x_E) > 0, liegt \; bei \; x_E \; ein \; lokales \; Minimum \; vor.$

5) <u>Rechnerischer Weg zur Bestimmung eines lokalen Extremums:</u>
Um alleine aufgrund des Terms zu entscheiden, ob wirklich ein Extremum vorliegt, muss zusätzlich zur 1. Ableitung noch die Umgebung dieses Punktes betrachtet werden. Z.B.: $f'(x) = x^2 - 1 = 0$ für x=1 und x=-1. Dies sind die beiden einzigen <u>möglichen</u> Extremstellen von f. Ob sie tatsächlich Extremstellen sind, kann auf verschiedene Weisen ermittelt werden (hier z.B. für x=1):
- Betrachten von Funktionswerten in der Nähe der Stelle (z.B.: f(0)=0, f(1)=-2/3, f(2)=2/3 – also bei (1|-2/3) ein lok. TP). Anstelle von 0 und 2 hätte man auch andere Werte kleiner bzw. größer als 1 einsetzen können (z.B.: 0,9 und 1,1) – die Werte dürfen hier nur nicht kleiner/größer als die weiteren möglichen Extremstellen sein (hier nicht kleiner als -1).

- Betrachten der Ableitungswerte in der Nähe (für die Wahl der Werte gilt das gleiche wie oben): z.B.: f´(0)=-1, f´(2)=3 – also ist der Graph für x<1 fallend und für x>1 steigend, damit liegt bei (1|-2/3) ein lok. TP vor.
- Falls der Graph der Funktion vorhanden ist bzw. benutzt werden darf, reicht ein Betrachten des Graphen, um zu entscheiden, ob die möglichen Extremstellen tatsächlich Extremstellen sind.

6) Ergebnisse: f: (-1|2/3) lok.HP, (1|-2/3) lok.TP ; bei g: (2|-8/3) lok.TP, (0|0) lok.HP, (-1|-5/12) lok.TP

7) Aus der Skizze muss hervorgehen, dass lokale Extrema die kleinsten bzw. Werte auf einem gegebenen Intervall sind, nicht zwangsläufig aber die größten bzw. kleinsten Werte, die zum Beispiel für unendlich kleine bzw. große x-Werte angenommen werden:



8) Die Aussage stimmt nicht, denn es gibt Fälle, bei denen die Tangentensteigung 0 ist, aber kein Extremum vorliegt – siehe Funktion 1. Dort liegt bei x = 0 eine waagerechte Tangente vor, aber kein Extrempunkt. Ein solcher Punkt heißt **Sattelpunkt**.

K

1.) Graph von f: Rechtskurve für x < -2 : f´(x) fällt in diesem Bereichmonoton f´´(x) hat in diesem Bereich negative Funktionswerte
Graph von f: Linkskurve für x ≤ 2: f´(x) steigt in diesem Bereich monoton, f´´(x) hat in diesem Bereich positive Funktionswerte

2) Falls die Vermutung lautet, dass sich am Wendepunkt die Art der Krümmung ändert (von links nach rechts oder umgekehrt) so war sie richtig.

3) Wendepunkt sind Punkte, an denen die Steigung eines Funktionsgraphen lokal maximal oder lokal minimal wird. Somit liegen an den Wendestellen in der ersten Ableitung lokale Extrema vor. Daraus folgt direkt, dass in der zweiten Ableitung Nullstellen an den Wendestellen vorliegen müssen.

4.) und 5.) notwendiges Kriterium: f´´(x) = 0, hinreichendes Kriterium (Vorzeichenwechsel): f´´(x - h) und f´´(x + h) haben verschiedene Vorzeichen, wobei ein Vorzeichenwechsel von + nach – ein lokales Steigungsmaximum (Links->Rechtswendepunkt anzeigt und ein Vorzeichenwechsel von- nach + ein lokales Steigungsminimum anzeigt.

Merke:
Bei allen lokalen Maxima liegt eine Rechtskrümmung vor, bei lokalen Minima eine Linkskrümmung (f´´(x)-Kriterium)!

6.a) $f_1(x) = -x^3 + 6x^2 => f_1''(x) = -6x + 12 => x_w = 2\ und\ f_1''(1) > 0, f_1''(3) < 0\ sowie\ f_1(2) = 16 => WP(2|16)$

6.b) $f_2(x) = -x^4 + 6x^3 => f_2''(x)' = -24x^2 + 36x => x_{w1} = 0\ oder\ x_{w2} = 1{,}5\ und\ f_2''(-1) < 0, f_2''(1) > 0$
$sowie\ f_2''(2) < 0\ und\ f_2(0) = 0\ bzw.\ f_2(1{,}5) = \frac{243}{16} => WP_1(0|0) \text{ und } WP_2\left(1{,}5\middle|\frac{243}{16}\right)$

c)* $f_3(x) = \frac{1}{2}x^2 - \cos(x) => f_3''(x) = 1 + \cos(x) => x_w = \pi\ und\ f_3''(3) > 0, f_3''(4) < 0;\ f_3(\pi) = \frac{1}{2}\pi^2 + 1 => WP\left(\pi\middle|\frac{1}{2}\pi^2 + 1\right)$

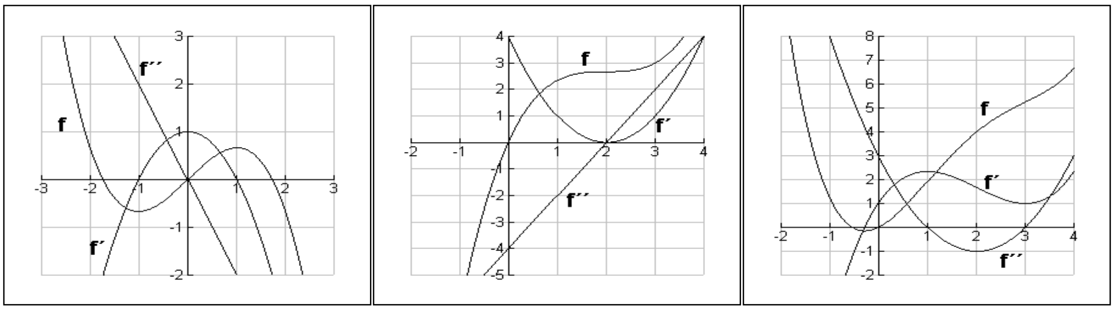
Somit sind die Wendepunkte aus a) und c) sowie W_2 aus b) Links->Rechts-Wendepunkte und damit lokale Steigungsmaxima und nur W1 aus b) ein Rechts->Links-Wendepunkt und damit ein lokales Steigungsminimum.

7. + 8 Da ein Sattelpunkt ein Wendepunkt mit Steigung null ist, sind sowohl die erste als auch die zweite Ableitung an Stellen, an denen ein Sattelpunkt vorliegt, null. Das gilt aber auch für Nullstellen geradzahliger Vielfachheit. Somit muss geprüft werden, dass f´(x) = 0 = f´´(x). Zudem dürfen f´´(x – h) und f´´(x + h) nicht das gleiche Vorzeichen haben.

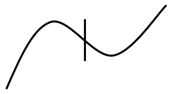
9. Linkskrümmung und Rechtskrümmung haben auch eine alltägliche Bedeutung, z.B. beim Steuern von Fahrzeugen. Die durch einen Funktionsgraphen modellierte Straße weist im Verlauf einen Wendepunkt auf. An diesem hielte man das Lenkrad gerade, d.h. es läge dort keine Krümmung vor (was mit der Definition von Krümmung verträglich ist). Daraus ergibt sich auch die notwendige Bedingung: f´´(x) = 0.

10. Bedingung: Notw. Bed.: f´´(1) = 0, also f´´(1)= a – 2 = 0 also a = 2

11. Hinweis: Der Graph von f(x) kann in y-Richtung verschoben sein, da beim Ableiten eine eventuell vorhandene Konstante verloren geht. Deshalb gibt es jeweils unendlich viele Lösungen! Jeweils <u>eine</u> Möglichkeit ist:



12. Für x < 4: Rechtskurve, für x > 4 : Graph hat Linkskurve: Graph von f (Aufgabe 12) :



13. Für x < -1: Linkskurve, für –1 < x < 2: Rechtskurve, für x > 2 : Linkskurve.
14. f´´(x) = 6x –2 = 0 W(1/3|-2/27), g´´(x) = 12x^2 - 96x +144 = 0 W_1(2/176), W_2(6/432), h´´(x) = - 10 (kein WP)

N

<u>Tabelle – links:</u> a) Nullstelle muss zwischen x=1 und x=2 liegen (Vorzeichenwechsel!).
b) Intervallschachtelung : [1.5 ; 1.6] [1.51 ; 1.52] [1.515 ; 1.516] [1.5157 ; 1.5158] ...
<u>Tabelle – Mitte:</u> x ≈ - 1.736 und x ≈ 3.735 und x = 5
<u>Tabelle – rechts</u>: a) f(x) = x (x – 5) : x_1 = 0; x_2 = 5 b) f(x) = (x - 3)²: $x_{1,2}$= 3 („Doppelnullstelle") c) keine Nullstelle
d) f(x) = (x- 4) (x + 1)³ (x-1) (x+3) (x² + 1) : x_1= 4; x_2= -1 und x_3=1 und x_4= -3 e) f(x)=x(x+1)(x-5) : x_1= 0; x_2= -1 und x_3=5

	Vorteil/e	Nachteil/e
Tabelle	Schneller Überblick, wo die Nullstelle liegt; Genauigkeit kann durch „Einzoomen" / Intervallschachtelung erhöht werden	Nur ungenau möglich/ Nur Näherungswerte; unklar, ob noch weitere Nullstellen vorliegen
Graphik	Schneller Überblick, wo die Nullstelle liegt; Genauigkeit kann durch „Einzoomen" / Intervallschachtelung erhöht werden	Nur ungenau möglich/ Nur Näherungswerte; unklar, ob noch weitere Nullstellen vorliegen

Term	sehr genau möglich (z.B.: Wurzelwerte); genaue Anzahl an Nullstellen kann bestimmt werden	Rechnung notwendig*

*Zur Berechnung setzt man f(x)=0 und löst diese Gleichung. Wenn möglich, sollte man f(x) in ein Produkt zerlegen („faktorisieren"), dessen Faktoren dann einzeln Null gesetzt werden können, um die Nullstellen zu erhalten.

2. a) $f(x) = (x - 7)(x - 8) = x^2 -7x -8x +56 = x^2 -15x +56$ (oder Vielfache des Terms wie z.B. $f(x) = 2x^2 -30x + 112$)
b) $f(x) = (x-2)(x-5)(x+3) = (x^2 - 7x +10)(x + 3) = x^3 -7x^2 + 10x + 3x^2 - 21x +30 = x^3 -4x^2 - 11x + 30$ (oder Vielfache des Terms)

3. Aus $f(3) = 3^2 - 5.5\cdot 3 + a\cdot 1.5 = 0$ folgt a =5 Weitere Nullstelle: $x_2 = 2.5$

4. Hier: $f(x) = -0.1(x+2)(x+1.5)(x+0.8)(x-1.5)(x-2.5)^2$ „Mund": f(x)=-0.5x+1 im Intervall [0.1,0.6] „Augen": f(x)=x+1.4 im Intervall [0.165, 0.235] und f(x)=x+1.1 im Intervall [0.465, 0.535] (Um die Augen zugleich als Punkte und als Funktionsgraphen darzustellen, muss man die Begrenztheit des Rechners ausnutzen – deshalb die Wahl der Intervallgrenzen.)

S

1. – 4.: Graphen können Achsensymmetrien und Punktsymmetrien aufweisen, z.B. Symmetrien zur y-Achse oder Symmetrien zum Nullpunkt. Diese beiden Symmetrien kann man schon am Term erkennen. Bei Symmetrie zur y-Achse gilt: f(-x) = f(x)
Und bei Symmetrie zum Ursprung: f(-x) = - f(x). Ganzrationale Funktionen mit ausschließlich geradzahligen Exponenten bei x sind symmetrisch zur y-Achse, mit ausschließlich ungeraden Exponenten symmetrisch zum Nullpunkt. Kommen gerade und ungerade Exponenten vor, so liegt keine dieser beiden Symmetrien vor, allerdings können die Graphen durchaus symmetrisch sein, wobei dann die Symmetrieachsen oder Symmetriezentren verschoben sind. Eine mögliche Klassifizierung wäre:

5.a) $\sin(x) = -\sin(-x)\ aber\ \sin(x) \neq \sin(-x)$ Der Graph der Funktion ist punktsymmetrisch zum Ursprung.
5.b) $\cos(x) = \cos(-x)\ aber\ \cos(x) \neq -\cos(-x)$ Der Graph der Funktion ist achsensymmetrisch zur y-Achse.
5.c) $2^{x^2} = 2^{(-x)^2}\ aber\ 2^{x^2} \neq -2^{(-x)^2}$ Der Graph ist achsensymmetrisch zur y-Achse aber nicht punktsymmetrisch zum Ursprung.
5.d) $\sqrt{x} \neq \sqrt{-x}\ und\ \sqrt{x} \neq -\sqrt{-x}$ Der Graph ist weder achsensymmetrisch zur y-Achse noch punktsymmetrisch zum Ursprung.

6. a) symm. zur y-A. b) punktsymm., aber nicht zu (0|0) c) symm. zu (0|0)
d),e) keine Symmetrie am Term abzulesen

Symmetrisch zur y-Achse	Symmetrisch zu (0|0)	Nicht symmetrisch
x^2, x^4, x^{-2}, $2^{(x^{\wedge}2)}$, $\lvert x^2 - 1\rvert$	x^3, x^5, x^{-1}, x, sin(x)	2x – 1, 2^x, $\sqrt{x}$

7. Funktionen zur Erzeugung der „Blume": $f(x) = x^2$, $f(x) = -x^2$, $f(x)= x^{1/2}$, $f(x)= -x^{1/2}$, $f(x)= (-x)^{1/2}$ und $f(x)= -(-x)^{1/2}$

8.a) $x^2\cdot\sin(x) \neq (-x)^2\cdot\sin(-x) = x^2\cdot\sin(-x)$ aber $x^2\cdot\sin(x) = -(-x)^2\cdot\sin(-x) = -x^2\cdot\sin(-x)$ => PS, keine AS

8.b) $x\cdot\cos(x) \neq -x\cdot\cos(-x) = -x\cdot\cos(x)$ aber $x\cdot\cos(x) \neq -(-x\cdot\cos(-x)) = x\cdot\cos(x)$ => PS, keine AS

8.c) $\frac{\sin(x)}{x} = \frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{-\sin(x)}{-x} = \frac{\sin(x)}{x}$ aber $\frac{\sin(x)}{x} \neq -\frac{\sin(-x)}{-x} = -\frac{-\sin(x)}{-x} = -\frac{\sin(x)}{x}$ => AS, keine PS

8.d) $\frac{\cos(x)}{\sin(x)} \neq \frac{\cos(-x)}{\sin(-x)} = \frac{\cos(x)}{-\sin(x)}$ aber $\frac{\cos(x)}{\sin(x)} = -\frac{\cos(-x)}{\sin(-x)} = -\frac{\cos(x)}{-\sin(x)} = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$ => PS, keine AS

8.e) $2^{\sin(1)} \approx 1{,}79\ aber\ 2^{\sin(-1)} \approx 0{,}56 \Rightarrow\ -2^{\sin(-1)} \approx -0{,}56$ => weder AS noch PS

8.f) $\sqrt[3]{x}\cdot\cos(x) \neq \sqrt[3]{-x}\cdot\cos(-x) = -\sqrt[3]{x}\cdot\cos(x)$ aber $\sqrt[3]{x}\cdot\cos(x) = -\sqrt[3]{-x}\cdot\cos(-x) = \sqrt[3]{x}\cdot\cos(x)$ => PS, keine AS

C

Zwischen 2 benachbarten Extrema einer ganzrationalen Funktion liegt immer ein Wendepunkt	W	Es muss eine Kurvenänderung zwischen zwei Extrempunkten erfolgen.
Besitzt eine ganzrationale Funktion 2 WP, muss sie mindestens 4. Grades sein.	W	Die 2. Ableitung muss mind. den Grad 2 haben und kann also 2 Nullstellen haben
Wenn $f'(x_0) = 0$, dann ist in x_0 eine Extremstelle	F	Es könnte auch ein Sattelpunkt sein - siehe **E**
Wenn in x_0 eine Extremstelle vorliegt, dann ist dort die 1. Ableitung Null	W	Waagerechte Tangente ist notwendige Bedingung
Wenn die Steigung in x_0 null ist, dann hat f in x_0 eine Wendestelle.	F	WP sind Punkte mit maximaler oder minimaler Steigung.
Wenn $f''(x_0) = 0$, dann hat f dort sicher einen Wendepunkt	F	Nein, es gibt Fälle, für die dann ein Extremum und kein WP vorliegt, z.B.: für $f(x)=x^4$ gilt $f''(0) = 0$, aber es liegt bei (0|0) kein WP sondern Extremum vor.
Wo die Steigung lokal am größten ist, liegt ein Wendepunkt.	W	Es liegt dann ein lok. Max. der 1.Ableitung vor, also ein Wendepunkt der Funktion.
Aus „Steigung in (1/0) ist 2" kann ich nur die Bedingung aufstellen, dass $f'(1)= 2$ ist.	F	..und zusätzlich dass f(1)=0

2. a) HP($-\frac{\sqrt{3}}{3}$ \| 0,385), TP($\frac{\sqrt{3}}{3}$ \| –0,385), b) $g'(3) = - 108 - 27a = 0$ also a = - 4, c) $h'(2) = a - 8 = 0$ also a = 8

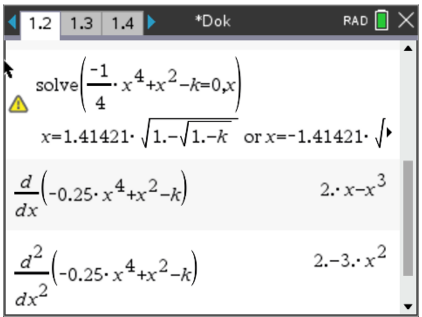
3. Das rechte Bild ist der Graph der Ableitungsfunktion f ´ zu den Funktionen im linken Bild. Die Terme dieser Funktionen unterscheiden sich nur durch eine additive Konstante, die Graphen sind in y-Richtung verschoben.

G

1. keine Symmetrie **|** Nullstellen: $x_1 = -2.5$; $x_2 = 2$ (Doppelnullstelle) | Extremwerte: $f'(x) = 0$: E1(2/0) TP, E2(-1/9) HP | Kurvenverhalten: $f''(x) = 4x - 2$: für x < 0.5 Rechtskurve, für x = 0.5 Wendestelle, für x > 0.5 Linkskurve
2. keine Symmetrie | Nullstellen ($x_1 = -1$, $x_2 = 1$ und $x_{3,4} = 2$ (Doppelnullstelle)) – d.h. f ist mind. 4.Grades | Extrema (ungefähr!): E_1(-0.5/-4.5), E_2(1.3/0.3), E_3(2/0) | Wendepunkte (ungefähr!): W_1 (0.5\|-1.6), W_2 (1.75\|0.2) | Kurvenverhalten: für x < 0.5 Linkskurve, für 0.5 < x < 1.75 Rechtskurve und für x > 1.75 Linkskurve.
3. symmetrisch zur y-Achse | Nullstellen: $x_1 = -2$, $x_2 = 2$ und $x_{3,4} = 0$ (Doppelnullstelle)- d.h. f ist mind. 4.Grades | drei Extrema, Vermutung: TP zwischen –2 und 0 und zwischen 2 und 0, ein HP bei x = 0
Monotonie, Vermutung: Graph ist bis ca. x = -1.5 fallend, dann steigend bis x = 0, fallend bis x = 2 und steigend für x > 2 | Kurvenverhalten, Vermutung: für x < -1 Linkskurve, (-1\|-3) WP, für -1 < x < 1 Rechtskurve, (1\|-3) WP, für x > 1 Linkskurve
4. Analog zu den vorigen Ausführungen ermöglicht die algebraische Darstellung eine exakte rechnerische Bestimmung, auch wenn die Punkte schwer ablesbar sind. Im Bereich der Globaleigenschaften (Symmetrie und Asymptoten/Verhalten im Unendlichen) ist der Funktionsterm den beiden anderen Darstellungsformen bezüglich der mathematischen Argumentation überlegen. Die graphische Darstellung erlaubt eine direkte Zählung der charakteristischen Punkte (bei vollständiger Darstellung) sowie die Angabe der Lage, wenn die Punkte gut ablesbar sind. Die tabellarische Darstellung ist insbesondere bei der Prüfung hinsichtlich der hinreichenden Kriterien hilfreich und erlaubt eine ungefähre Abschätzung der Lage von Null- Extrem- und Wendestellen sowie des Globalverhaltens und ermöglicht eine Skizze des Graphen.
5. Hier wird ein ungefähres Ablaufschema einer Kurvendiskussion als Musterlösung gegeben, die Dokumentation wird durch einen Hinweis auf technische Einsatzmöglichkeiten eines CAS-Systems ergänzt.

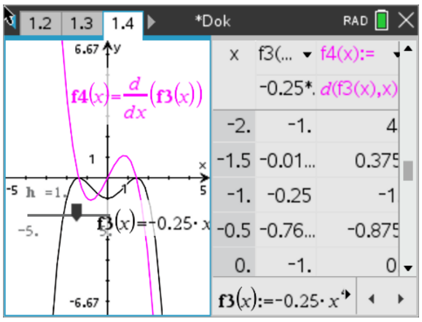
(I) Definitionsbereich: $D = \mathbb{R}$

(II) Symmetrien: $f_k(x) = -\frac{1}{4}x^4 + x^2 - k\ und\ f_k(-x) = -\frac{1}{4}(-x)^4 + (-x)^2 + k = -\frac{1}{4}x^4 + x^2 -$



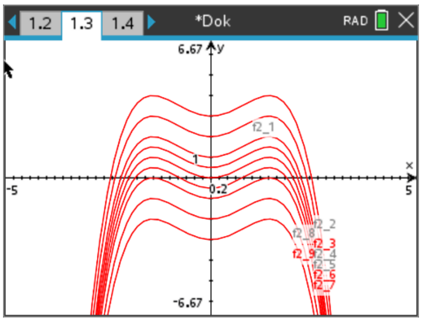
$k = f_k(x)$
Aufgrund des Vorliegens ausschließlich gerader Exponenten sind alle Graphen der Schar achsensymmetrisch zur y-Achse. Eine Punktsymmetrie zum Ursprung liegt nicht vor.
(III) Verhalten im Unendlichen/Asymptoten: Aufgrund der Symmetrie zur y-Achse genügt die Betrachtung von $\lim_{x\to\infty} f_k(x) = -\infty$, *da der größte Exponent gerade und der zugehörige* Koeffizient negativ sind. Die Funktion divergiert für sehr große und sehr kleine Werte gegen minus unendlich.
(IV) Achsenschnittpunkte
a) Nullstellen mit $f_k(x) = 0 \Leftrightarrow 0 = -\frac{1}{4}x^4 + x^2 - k \Leftrightarrow x^4 - 4x^2 + 4k \Leftrightarrow z^2 - 4z + 4k = 0 \;\Leftrightarrow z_{\frac{1}{2}} = 2 \pm \sqrt{4-4k} \Leftrightarrow x_{1/2} = \sqrt{2 \pm \sqrt{4-4k}}\; oder\; x_{3/4} = -\sqrt{2 \pm \sqrt{4-4k}}$
Man sieht, dass die Wurzeln für k > 1 nicht existieren. Für 0 < k < 1 existieren vier Nullstellen, für k = 0 drei Nullstellen und für k = 1 und k < 0 jeweils zwei Nullstellen.
b) y-Achsenschnittpunkt mit x = 0 => $f_k(0) = -k => Y(0|-k)$
(V) Lokale Extrema: Es gilt: $f_k{'}(x) = -x^3 + 2x$
Notwendiges Kriterium : $f_k{'}(x) = -x^3 + 2x = 0 \Leftrightarrow -x \cdot (x^2 - 2) = 0 \;\Leftrightarrow x_{E1} = 0\; oder\; x^2 - 2 = 0 => x_{E2} = \sqrt{2}\; oder\; x_{E3} = -\sqrt{2}$
Hinreichendes Kriterium:

x	-2	$-\sqrt{2}$	-1	0	1	$\sqrt{2}$	2
$f_k{'}(x)$	4 > 0	0	-1 < 0	0	1 > 0	0	-4 < 0



Die Bestimmung der y-Werte ergibt $f_k(-\sqrt{2}) = f_k(\sqrt{2}) = 3 - k\; sowie\; f_k(0) = -k$.
Somit liegen lokale Maxima (in diesem Fall sind es auch globale) bei $H_1(-\sqrt{2}|3-k)$ und $H_2(\sqrt{2}|3-k)$ und ein lokales Minimum bei $T_1(0|-k)$.
(VI) Wendepunkte: Es gilt: $f_k{''}(x) = -3x^2 + 2$
Notwendige Bedingung: $f''(x) = -3x^2 + 2 = 0 \;\Leftrightarrow x^2 = \frac{2}{3} \;\Leftrightarrow x_{W1/W2} = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$
Hinreichende Bedingung: $f'''(x) \neq 0\; mit\; f'''(x) = -6x\; und\; f'''\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right) < 0, f'''\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}\right) > 0$
Die Bestimmung der y-Werte ergibt: $f_k\left(\pm\sqrt{\frac{2}{3}}\right) = -\frac{1}{9} + \frac{2}{3} - k = \frac{5}{9} - k$
Somit liegt ein Wendepunkt mit lokalem Steigungsmaximum bei $W_1\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\middle|\frac{5}{9} - k\right)$, bei dem sich um einen Links->Rechts-Wendepunkt handelt und ein Wendepunkt mit lokalem Steigungsminimum bei $W_2\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}\middle|\frac{5}{9} - k\right)$, bei dem es sich um einen Rechts->Links-Wendepunkt handelt.
(VII) Monotonie: Laut den Ergebnisse aus Punkt (III) und (V) lässt sich sagen, dass alle Graphen der Schar monoton wachsend sind in den Intervallen $]-\infty; -\sqrt{2}]\; und\; in\; [0; \sqrt{2}]$ sowie monoton fallend in den Intervallen $[-\sqrt{2}; 0]\; und\; in\; [\sqrt{2}; \infty[$

(VIII) Skizze:
Bei einer einfachen Funktion zeichnet man in der Regel einen aussagekräftigen Ausschnitt des Graphen, in dem die unter (II) – (VI) bestimmten Punkte und Eigenschaften erkennbar sind.
Bei einer Kurvenschar bietet sich der Einsatz eines wenigstens graphikfähigen Taschenrechners an, um verschiedene Repräsentanten anzuzeigen (hier zum Beispiel solche mit 0; 2; 3 und 4 Nullstellen.
(IX) Wertebereich: Da aufgrund der lokalen Maxima, ein y-Wert für die globalen Maxima existiert und beliebig kleine Werte angenommen werden können laut Unterpunkt (III), gilt:
$W = \mathbb{R}$



F

1. Ansatz: f(x) = ax³+bx²+cx+d ; f´(x) = 3ax²+2bx+c
   f hat Steigung bei x = 0 von 2 — f´(0) = 2 => c = 2
   P(0|0) liegt auf dem Graphen von f — f (0) = 0 => d = 0
   f hat Steigung 0 bei x = -3 — f´ (-3) = 0 => 27a – 6b + c = 0
   P(-3|-2) liegt auf dem Graphen von f — f (-3) = -2 => -27a + 9b – 3c + d = -2

   Daraus: f (x) = $\frac{2}{27}$ x³ + $\frac{2}{27}$ x² + 2x

2. Ansatz: f(x) = ax³+bx²+cx+d ; f´(x) = 3ax²+2bx+c
   Nullstellen wie x²-x-2 d.h. x_1 = 2 — f (2) = 0 => 0 = 8a + 4b +2c +d
   Nullstellen wie x²-x-2 d.h. x_1 = -1 — f (-1) = 0 => 0 = -a +b –c +d
   f hat Steigung (Anstieg) bei x=0 von m=-3 — f´(0) = -3 => -3 = c
   P(0|-2) liegt auf dem Graphen von f — f (0) = -2 => -2 = d

   Daraus: f (x) = x³ - 3x -2

3. Ansatz für die Funktionsgleichung: f(x) = ax⁴+bx³+cx²+dx+e ; f´(x) = 4ax³+3bx²+2cx+d
   Eigenschaften der Funktion f und Umsetzen der Eigenschaften in Gleichungen
   f hat bei x=0 eine Extremstelle — f´(0) = 0 => d = 0
   da f bei x=-1 einen Sattelpunkt hat: Steigung 0: — f´(-1) = 0 => 0 = -4a + 3b – 2c +d
   da f bei x=-1 einen Sattelpunkt hat: Wendepunkt: — f´´(-1) = 0 => 0 = 12a – 6b + 2c
   Tangente bei x=1 => m = 48 — f´(1) = 48 => 48 = 4a + 3b +2c +d
   Tangente bei x=1 => P(1|0) — f (1) = 0 => 0 = a + b + c + d + e

   Daraus: f (x) = 3x⁴ + 8x³ + 6x-17

4. 1. Parabel p1(x) = a x² – 20 ; 2. Parabel p2(x) = b (x – 200)² + 12 ; 3. Parabel symm. zu p2(x), zunächst nicht betrachtet
(I) Schnittpunkt: p1(x_0) = p2(x_0) ; (II) gleiche Steigung im Schnittpunkt: p1´(x_0) = p2´(x_0) (III)Parabeln gleichweit geöffnet: a = -b.

Resultat: p1(x) = $\frac{1}{625}$ x² – 20 , p2(x) = - $\frac{1}{625}$ (x – 200)² + 12 , p3(x) = - $\frac{1}{625}$ (x + 200)² + 12

Lernkontrolle am Ende der Lernwerkstatt: (Zeit: 45 min)

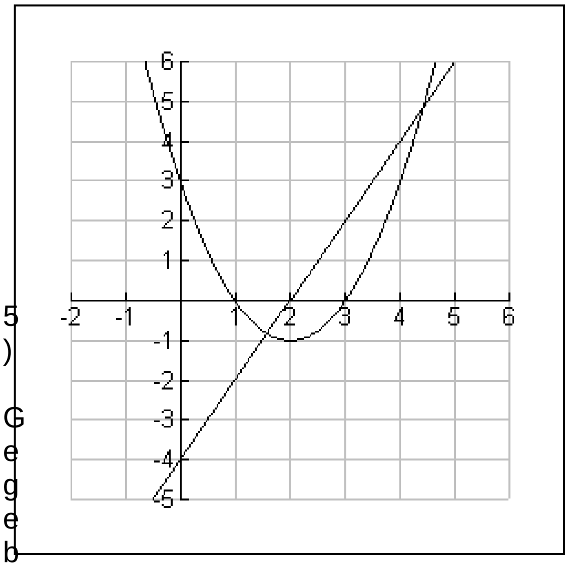
1) Erläutern Sie:
Was versteht man unter einem Wendepunkt einer Funktion f und wie werden dessen Koordinaten berechnet?

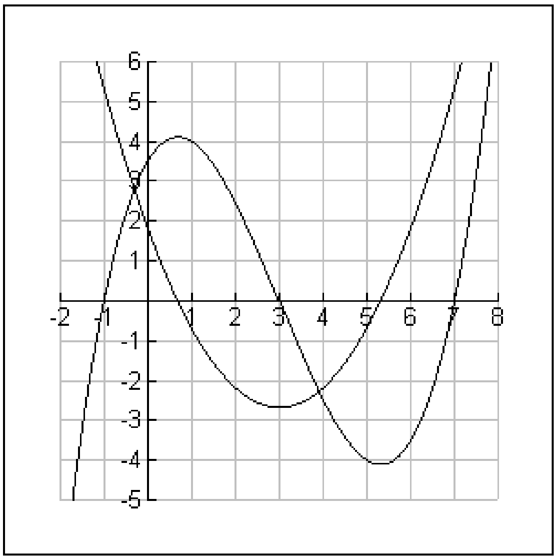
2) Gegeben ist f durch die Gleichung: $f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x + 2$.
(Begründen Sie Ihre Antworten auf die folgenden Fragen durch eine Rechnung.)
a) In welchen Bereichen hat der Graph zu f eine Links- bzw. Rechtskurve?
b) Ermitteln Sie die Gleichung einer Tangente an f im Punkt P(1 / f(1)).
c) In welchen Punkten hat der Graph zur Funktion f den Anstieg (-1)?

3) Entscheiden Sie - wahr (w) oder falsch (f) !

a) Eine ganzrationale Funktion 4. Grades hat höchstens 2 Wendepunkte.
b) Eine ganzrationale Funktion 3. Grades hat 2 Extrempunkte.
c) Wenn eine ganzrationale Funktion 3. Grades nur eine Nullstelle hat, dann hat sie keinen Extrempunkt.
d) Wenn eine ganzrationale Funktion 3. Grades drei Nullstellen besitzt, dann hat sie zwei Extrempunkte.
e) Wenn eine Funktion f an einer Stelle x_0 eine Maximalstelle besitzt, dann gilt $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) < 0$.

4) Beschriften Sie die Graphen mit f´ und f´´ und skizzieren Sie jeweils den Graphen einer "passenden" Funktion f. Welchen Grad hat die Funktion f ?





5) Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = x^3 - x^2 - x + 1$.
a) Skizzieren Sie den Graphen von f im Intervall $-1.5 \leq x \leq 2$.
b) Bestimmen Sie alle Nullstellen der Funktion f.
c) Ermitteln Sie die Koordinaten der Extrempunkte.
d) Untersuchen Sie den Graphen auf das Vorhandensein von Wendepunkten.

Klausur: (Zeit: 90 min)

Aufgabe 1:
Entscheiden Sie, ob wahr (w) oder falsch (f). Begründen Sie Ihre Entscheidung in kurzen Worten oder durch eine Skizze.
a) Eine ganzrationale Funktion 5. Grades hat mindestens einen Extrempunkt.
b) Eine ganzrationale Funktion 4. Grades hat mindestens einen Extrempunkt.
c) Wenn eine Funktion f an einer Stelle x_0 einen Tiefpunkt besitzt, dann gilt $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) > 0$
d) Besitzt eine ganzrationale Funktion 3 Wendepunkte, muss sie mindestens 5. Grades sein.
e) Ein Wendepunkt ist der Punkt, an dem der Graph die größte oder kleinste Steigung hat.

Aufgabe 2:
Erklären Sie, warum es bei der Bestimmung eines Extrempunktes nicht ausreicht, lediglich die Stellen zu ermitteln, an denen der Graph die Tangentensteigung 0 hat.

Aufgabe 3:
Vom Graphen von f sind die folgenden Angaben gegeben. Skizzieren Sie den Graphen in ein Koordinatensystem.

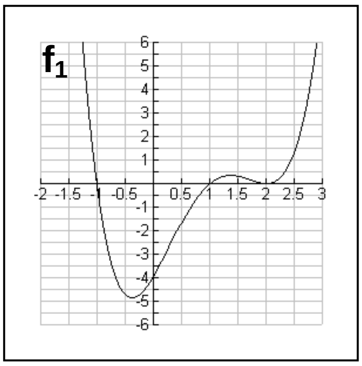
$f(-3.9) = 0$	$f'(-2.5) = 0$	$f''(-1) = 0$	für $x < -1$ gilt: $f'' > 0$
$f(1.1) = 0$	$f'(2.5) = 0$	$f''(2) = 0$	für $-1 < x < 2$ gilt: $f'' < 0$
$f(2) = 0$	$f'(1.5) = 0$		für $x > 2$ gilt: $f'' > 0$
$f(2.8) = 0$			

(*Zusatz: Ist der Graph durch die Angaben eindeutig bestimmt? Begründen Sie.)

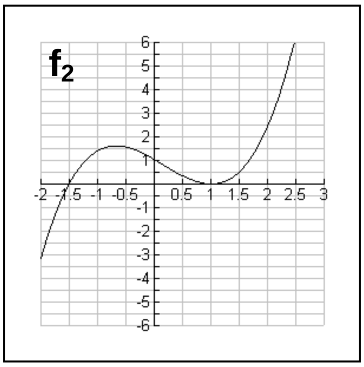
Aufgabe 4:
Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + 2$.
Suchen Sie möglichst viele charakteristischen Punkte und Eigenschaften dieser Funktion und weisen Sie diese (möglichst) rechnerisch nach.

Aufgabe 5:
Bestimmen Sie auf rechnerischem Weg die Nullstellen der Funktion $f(x)=x^3+3x^2-x-3$.
Welche Vorteile bringt die graphische oder tabellarische Bestimmung der Nullstellen?

Aufgabe 6:
Gegeben sind die Funktionsgraphen zu $f_1(x)$ und $f_2(x)$:

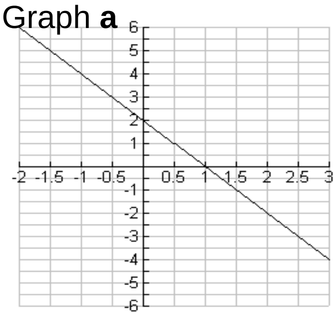


Anhang

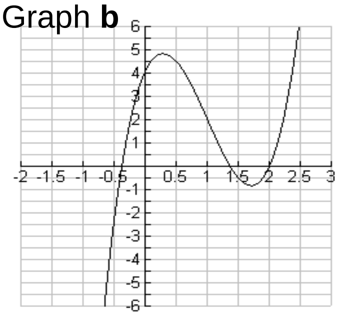


Welche der folgenden Funktionsgraphen stellt den Graphen der ersten bzw. zweiten Ableitungsfunktion zu $f_1(x)$ bzw. $f_2(x)$ dar? (Begründen Sie kurz!)

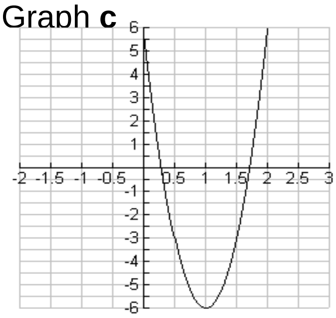
Graph **a**



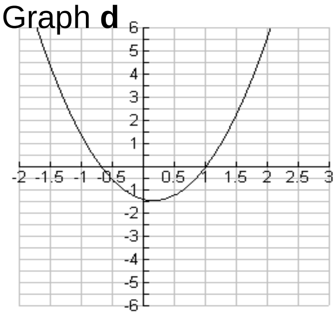
Graph **b**



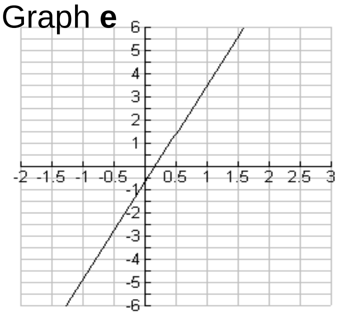
Graph **c**



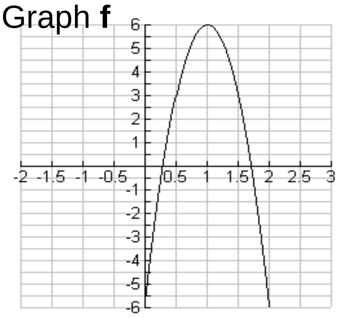
Graph **d**



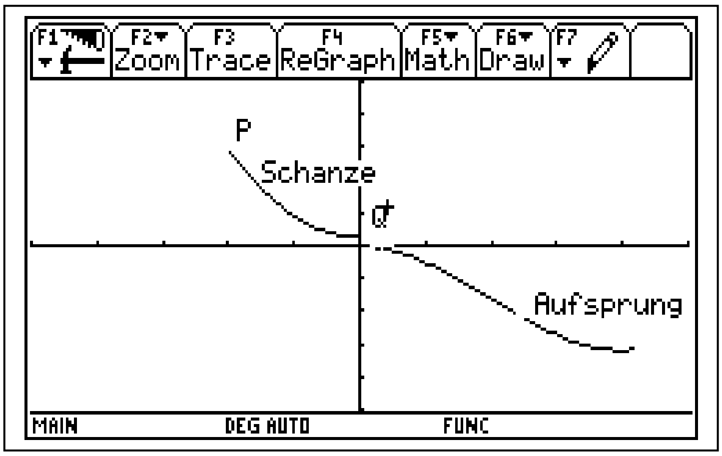
Graph **e**



Graph **f**



Aufgabe 7:



Eine Skisprunganlage mit Schanze und Aufsprunghügel ist im Querschnitt im Koordinatensystem dargestellt. Charakteristische Merkmale und Punkte sind:

- Der Springer startet im Punkt P (-60/88) mit dem Anlauf
- Der Absprung erfolgt horizontal im Punkt Q (0/8)

a) Ermitteln Sie eine Funktion mit möglichst niedrigen Grad, die die Schanze beschreibt.

b) Begründen Sie, warum Sie eine Funktion mit Grad ...... gewählt haben.

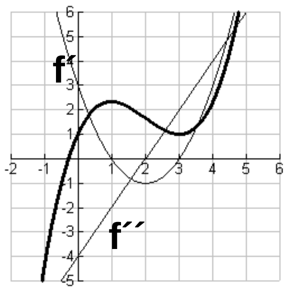
c) Der Aufsprunghügel entspricht der Funktion $g(x) = \frac{1}{9000}x^3 - \frac{1}{50}x^2$ mit 0<x<125.

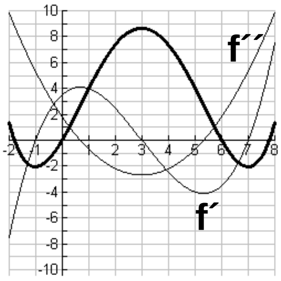
Wenn man alle äußeren Einflüsse außer Acht lässt, dann bewegt sich der Springer auf einer Flugbahn mit der Gleichung $s(x) = -a\,x^2 + h$.
Hier ist h = 8 die Höhe des Absprungs und a ein Parameter abhängig von der Erdanziehungskraft und der Absprunggeschwindigkeit v in m/s.

Für a gilt $a = \frac{9{,}81}{2\cdot v^2}$. Also ist $s(x) = -\frac{9{,}81}{2\cdot v^2}x^2 + 8$ die Gleichung der Sprungkurve.
Mit welcher Geschwindigkeit v ist der Springer Martin Hannawald abgesprungen, wenn er im Punkt L(82 │ ...) gelandet ist?

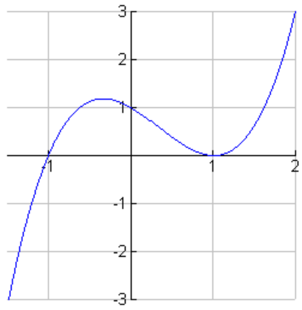
Lösungen zur Lernkontrolle

2. a) Für x>2 Linkskurve, für x<2 Rechtskurve b) t(x) = -x+6 c) $x_1=1$ und $x_2=3$
3. a) w b) f c) f d) w e) w
4.





Graph zu 5.



5. a) Nullstellen: $x_{n1}=1$ (doppelte Nullstelle) und $x_{n2}=-1$

b) lokales Minimum bei (1|0), lokales Maximum $\left\langle -\frac{1}{3} \middle| -\frac{32}{27} \right\rangle$ c) Wendepunkte: $\left\langle \frac{1}{3} \middle| \frac{16}{27} \right\rangle$

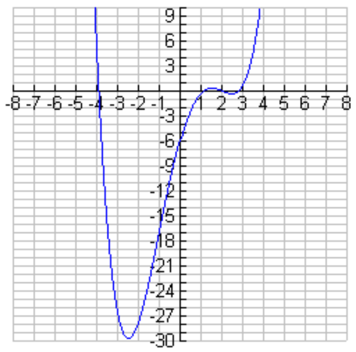
Lösungen zur Klausur

1. a) f b) w c) w d) w e) w
3. (Erwartet wird hier lediglich eine Skizze einer Funktion!)

$$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^3 - 3x^2 + 9x - 6$$

$$f´(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 6x + 9$$

$$f´´(x) = 3x^2 - 3x - 6$$



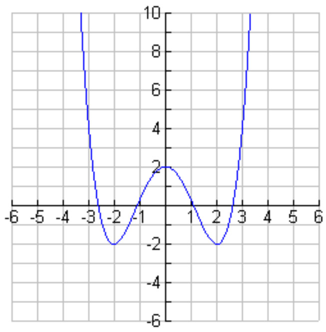
4.

- Graph ist symmetrisch zur y-Achse
- Nullstellen:

$x_{n1} = -\sqrt{4-2\sqrt{2}} \approx$ -1.08 , $x_{n2} = \sqrt{4-2\sqrt{2}} \approx$ 1.08 ,

$x_{n3} = -\sqrt{2\sqrt{2}+4} \approx$ -2.61 , $x_{n4} = \sqrt{2\sqrt{2}+4} \approx$ 2.61

- Extrempunkte: (-2|-2) , (2|-2) , (0|2)
- Wendepunkte: $\left\langle -\frac{2\sqrt{3}}{3} \middle/ -\frac{2}{9} \right\rangle$, $\left\langle \frac{2\sqrt{3}}{3} \middle/ -\frac{2}{9} \right\rangle$
- Linkskurve bis zum 1. Wendepunkt, dann Rechtskurve bis zum 2., dann wieder Linkskurve



5. Nullstellen: $x_{n1}=1$, $x_{n2}=-1$ und $x_{n3}=-3$
6. zu $f_1(x)$ gehört Graph b und c, zu $f_2(x)$ gehört Graph d und e
7. a) $f(x) = \frac{1}{45}x^2 + 8$ b) quadratische Funktion, da drei Bedingungen gegeben sind.

c) y-Koordinate des Aufsprungpunktes berechnet (g(82)) : L (82| $-\frac{82369}{1125}$) bzw. L(82|-73,22)

Einsetzen der y-Koordinate als s(82) in die Gleichung zu s(x) und nach v auflösen (v>0):

v= $\frac{369\sqrt{99592210}}{182738} \approx 20{,}15$

Zur Bewertung der Arbeit im Rahmen der Lernwerkstatt:

Grundsätzlich setzt sich die Mitarbeits-Note für die Zeit der Lernwerkstatt aus zwei Teilnoten zusammen – einer Gruppennote und einer Individualnote.

Die Bewertung der Gruppe:

Inhalte:
- Mathematische Zusammenhänge werden schnell erfasst.
- Die Gruppe hat eigene gute Ideen.
- Die Gruppe erarbeitet sich selbstständig die Inhalte.
- Es werden mehrere Lösungswege berücksichtigt und evtl. verglichen.
- Die Gruppe hat ihre Arbeit zügig erledigt. Auch wenn „Erholungspausen“ gemacht wurden, fand die Gruppe wieder schnell zur Arbeit zurück.

Kooperation:
- Die Gruppe arbeitet gut zusammen, keineR wird außen vorgelassen. Es werden alle mit ihren Fragen und „Nicht-Fragen“ beachtet. Die Gruppenmitglieder sind alle im Blick.
- Die Aufgaben werden besprochen und Lösungen zusammen überlegt.

Organisation:
- Die Zeit ist sinnvoll eingeteilt und alle sorgen dafür, dass die Planung eingehalten wird.
- Die Gruppe hat Absprachen bzgl. Hausaufgaben getroffen, um so zügiger voran zu kommen.
- Anfallende Aufgaben (z.B.: bei der Vorbereitung der Präsentation) sind gerecht und sinnvoll aufgeteilt.

Dokumentation:
- Aus der Dokumentation erkennt man gut den Gedankengang der Arbeit.
- Das Aufgeschriebene ist inhaltlich richtig.
- Die Gliederung ist sinnvoll.

Präsentation:
- Die Präsentation ist sachlich korrekt.
- Die Präsentation ist gut und übersichtlich gegliedert.
- Die Visualisierung unterstützt das Gesagte sehr gut.
- Man spürt, dass alle Gruppenmitglieder an der Vorbereitung der Präsentation beteiligt waren und das Thema durchdrungen haben.
- Die Präsentation hat eine „eigene Handschrift“.

Die Bewertung der/s Einzelnen:

Grundsätzlich gelten hier ähnliche Kriterien wie bei der Gruppennote. Insbesondere wird beachtet, welchen Beitrag der/die Einzelne für den Gesamtertrag der Gruppe leistet und inwieweit er sich mitverantwortlich zeigt.