Abiturprüfungsaufgaben in der Notes-Applikation nachvollziehbar aufbereiten am Beispiel einer Grundkursaufgabe aus Berlin

Gerade in der Zeit vor den Abiturprüfungen bedienen sich viele Lehrkräfte an dem umfangreichen Pool an Prüfungsaufgaben vergangener Jahre, um mit den Schülerinnen und Schülern das Aufgabenformat zu üben. Doch wie verbindet man als Lehrkraft die Arbeit im TI-Nspire mit der notwendigen Dokumentation, die die Schülerinnen und Schüler zu erbringen haben? Beides ist für die Lernenden wichtig.
Vielfach läuft es so: Jemand (Lehrkraft oder Schülerin bzw. Schüler) rechnet mit der TI-Nspire-Software vor (oder mit) und schreibt parallel dazu die Lösungsansätze und die geforderten Rechnungen an die Tafel. Dieser Weg ist sowohl für die Schülerinnen und Schüler als auch für die Lehrkraft anstrengend, denn beide Seiten müssen hochkonzentriert sein, um den Überblick zu behalten.

Eine Variante, beides in der TI-Nspire-Software zu erledigen, bietet sich mit der Notes-Applikation. Zugegebenermaßen sind einige Schritte zu beachten, aber mit ein wenig Übung kann man als Lehrkraft eine für die Schülerinnen und Schüler nachvollziehbare Aufgabenlösung erstellen. Für die Lernenden bietet dieser Weg eine Möglichkeit, die Aufgabenstellung, die TI-Nspire-Eingaben und die zu notierenden Ansätze und Lösungsschritte im Blick zu haben. Darüber hinaus kann die Lehrkraft den Lernenden sowohl die TI-Nspire-Datei als auch die Screenshots der Unterrichtseinheit zur Verfügung stellen. Je nach technischer Voraussetzung kann das in der Schulcloud, auf der Lernplattform der Schule oder zumindest in Form einer analogen Kopie geschehen. Diese Variante eignet sich darüber hinaus auch zur Erstellung von Erwartungshorizonten zu einer Leistungsermittlung oder Klausur.

Zunächst sei hier der Weg beschrieben, der sich in der täglichen Unterrichtsarbeit bewährt hat.

1. Aufgabenstellungen aufteilen und die entsprechende Teilaufgabe in die Notes-Applikation einbinden:
   - Wenn die Aufgabe im Word-Format vorliegt, kann der Text per Copy & Paste in die Notes-App eingesetzt werden.
   - Liegt die Aufgabe im pdf-Format vor, bietet sich das Windows-eigene Snipping-Tool zur Erstellung eines Screenshots des Aufgabenteils an, das man bearbeiten möchte. Auch hier lässt sich das Bild mit Copy & Paste einfügen, ohne es vorher abspeichern zu müssen. Für Mac-OS bietet schon die Vorschau-App ein entsprechendes Tool an.

2. Für die Aufgabenlösung bietet sich an, in der TI-Nspire-Software auf den Computermodus umzuschalten, so kann man selbst in der kleinsten zur Verfügung stehenden Schriftgröße alles gut lesen und es passt wesentlich mehr auf eine Seite. Ist die Seite voll, sollte man einfach eine neue Seite öffnen, das macht die nachträgliche Erstellung der Screenshots komfortabler.

   In der Teilaufgabe kann man nun die Mitschrift mit der reinen TI-Nspire-Rechnung (in der Mathe-Box) kombinieren. Wichtig ist hierbei, den Schülerinnen und Schülern anzutrainieren, dass die TI-Nspire-Befehle (meist) nicht unverändert in die handschriftliche Lösung übernommen werden dürfen. Das der Notes-Applikation eigene Farbkonzept (blaue Schrift für die Eingaben und grüne Schrift für die Ausgaben) unterstützt die Unterscheidung zwischen Annotation und TI-Nspire-Rechnung. Hier ist bei der Erstellung zu beachten, wirklich alle Ansätze und Ergebnisse in der mathematisch üblichen Form bereitzustellen. Komfortabel bei der beschriebenen Vorgehensweise ist einerseits die Mischung von Schrift und Mathe-Box in einer Zeile (auch mehrfach), andererseits aber auch die Möglichkeit der Nutzung der Sonderzeichen aus der TI-Nspire-Tastatur. Wenn man z. B. im Textmodus einen Bruch darstellen will, kann man auf der virtuellen Tastatur des TI-Nspire einfach die Tastenkombination ctrl + ÷ verwenden, ohne dazu eine Mathe-Box zu öffnen.

3. Oftmals ist es sinnvoll, der Lösung in der Notes-Applikation eine entsprechende Graphik zur Veranschaulichung zur Seite zu stellen. Mit ein wenig Aufwand und Geschick lassen sich auch interaktive Elemente erstellen, so dass die Schülerinnen und Schüler (evtl. im Nachgang) einen Ansatz oder eine Rechnung besser verstehen.

Am Beispiel einer Analysis-Aufgabe aus dem Berliner Grundkursabitur von 2021 sind die hier dargestellten Schritte umgesetzt.

In der Einheit von 2 Unterrichtsstunden wurden die Teilaufgaben a-f und i gemeinsam erarbeitet und die TI-Nspire-Datei im Wesentlichen in der vorliegenden Form gewissermaßen „life“ von der Lehrkraft erstellt. Die restlichen Teilaufgaben waren Hausaufgabe und die gesamte Datei einschließlich der vorliegenden Screenshot-Version wurde den Schülerinnen und Schülern auf der Lernplattform zur Verfügung gestellt.

Ein Wort noch zu den verwendeten Operatoren: Dem von der Aufgabenkommission bereitgestellten Erwartungshorizont ist zu entnehmen, welche Teilschritte zur korrekten Lösung gehören sollen. Es ist ersichtlich, dass es in Berlin nicht ausreicht, den Operator „Ermittle“ oder „Bestimme“ auf eine ausschließlich graphische Lösung zu reduzieren. Dies wurde in einem Fachbrief auch deutlich kommuniziert.

Wir stellen im 2. Teil des Artikels dann noch dar, wie Teile dieser Aufgabe bearbeitet werden könnten, wenn man die vom IQB zur Verfügung gestellten Operatoren nutzt.

Grundkurs Berlin Zentralabitur 2021, Aufgabe 2

Gegeben sind die Funktionen f und p mit den Funktionsgleichungen

$f(x)=\frac{1}{12}x^3-x^2+3x$; $x \in \mathbb{R}$ und $p(x)=-x^2+3{,}8x-1{,}36$; $x \in \mathbb{R}$.

Der Graph der Funktion f ist G_f und der Graph der Funktion p ist die Parabel G_p .

a Bestimmen Sie die Schnittstellen der Parabel G_p mit der x-Achse.

b Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktion f.

a) $p(x):=-x^2+3.8\cdot x-1.36$ ▸ *Fertig* $\text{solve}(p(x)=0,x)$ ▸ $x=0.4$ or $x=3.4$

Die Schnittstellen der Parabel mit der x−Achse liegen bei x=0,4 und x=3,4.

b) $f(x):=\frac{1}{12}\cdot x^3-x^2+3\cdot x$ ▸ *Fertig* $\text{solve}(f(x)=0,x)$ ▸ $x=0$ or $x=6$

Die Nullstellen von f liegen bei x=0 und x=6.

c Ermitteln Sie die Lage und die Art der Extrempunkte des Graphen G_f .

c) 1. Ableitung: $fa(x):=\frac{d}{dx}(f(x))$ $fa(x)$ ▸ $\frac{x^2}{4}-2\cdot x+3$

2. Ableitung: $\frac{d}{dx}(fa(x))\rightarrow fb(x)$ $fb(x)$ ▸ $\frac{x}{2}-2$

− notwendige Bedingung f'(x)=0: $\text{solve}(fa(x)=0,x)$ ▸ $x=2$ or $x=6$

− hinreichende Bedingung f''(x)≠0: $fb(2)$ ▸ -1 < 0 => lok. Maximum

$fb(6)$ ▸ 1 > 0 => lok. Minimum

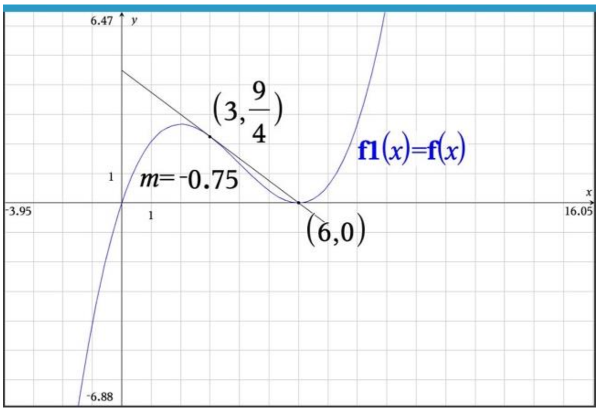
− y−Werte: $f(2)$ ▸ $\frac{8}{3}$ $f(6)$ ▸ 0 $H(2|\frac{8}{3})$ T(6|0)

d Weisen Sie nach, dass die mittlere Steigung der Funktion f im Intervall $[3;6]$ den Wert $-0{,}75$ hat.

Geben Sie ein Intervall $[a;b]$ an, für das die mittlere Steigung der Funktion f einen Wert hat, der kleiner als $-0{,}75$ ist.

Ansatz: $m=\frac{y2-y1}{x2-x1}=\frac{f(6)-f(3)}{6-3}$ ▸ $\frac{-3}{4}$

Die Graphik auf der nächsten Seite zeigt die Sekante im Intervall [3;6]. Daraus ergeben sich die möglichen Intervalle. Wenn man z.B. den Punkt [6|0] "greift" und nach links schiebt, ergeben sich kleinere Steigungen als −0,75, weil alle Punkte zwischen 3 und 6 einen kleineren y−Wert als f(6) aufweisen. Ein mögliches Intervall ist also: [3;5].



e Ermitteln Sie die Gleichung der Tangente t an den Graphen G_f im Punkt P(4 | f(4)) .

Ansatz: $y=m\cdot x+n$

m=f'(4) = −1 $fa(4)$ ▸ -1

n durch Einsetzen des Punktes P berechnen: $f(4)$ ▸ $\frac{4}{3}$

$\text{solve}\left(\frac{4}{3}=-1\cdot 4+n,n\right)$ ▸ $n=\frac{16}{3}$

Tangentengleichung: y = t(x) = − x + $\frac{16}{3}$.

Zur Kontrolle und für die Graphik kann der "tangentline"−Befehl genutzt werden: $t(x):=\text{tangentLine}(f(x),x,4)$ ▸ *Fertig* $t(x)$ ▸ $\frac{16}{3}-x$

weiter mit e):

Begründen Sie, dass es genau einen Punkt Q auf dem Graphen G_p gibt, an dem die Steigung von p genauso groß ist wie die Steigung von t.

Ermitteln Sie die Koordinaten des Punkts Q.

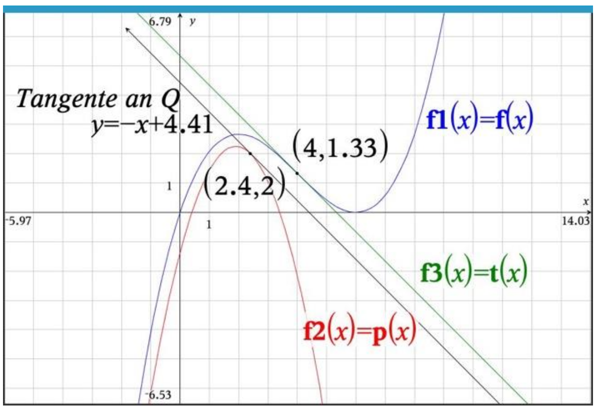
Begründung:

Die Ableitung einer quadratischen Funktion ist eine lineare Funktion. Jede lineare Funktion mit m≠0 durchläuft für y alle reellen Zahlen. Also besitzt die Ableitung von p(x) an irgendeiner Stelle den y−Wert: −1.

Punkt Q:

$pa(x):=-2\cdot x+3.8$ ▸ *Fertig* $\text{solve}(pa(x)=-1,x)$ ▸ $x=2.4$ $p(2.4)$ ▸ $2.$

Der gesuchte Punkt Q hat die Koordinaten: Q(2,4|2).



f Bestimmen Sie die Größe der Fläche, die von der Geraden g mit $g(x) = \frac{8}{3}$ und dem Graphen G_f begrenzt ist.

Die Graphik auf der nächsten Seite zeigt die gesuchte Fläche.
Es handelt sich um eine Fläche zwischen Funktionsgraphen.

1. Schnittstellen von f und g berechnen:

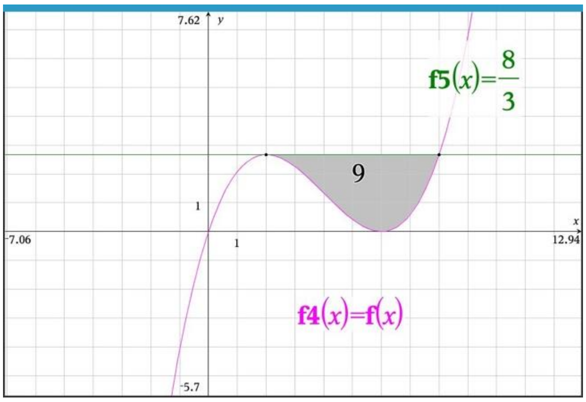
$\mathbf{g}(x):=\frac{8}{3}$ ▸ *Fertig* solve$(\mathbf{f}(x)=\mathbf{g}(x),x)$ ▸ $x=2$ or $x=8$

2. Flächenberechnung:

– Stammfunktion: $\int(\mathbf{g}(x)-\mathbf{f}(x))\,dx$ ▸ $\frac{-x^4}{48}+\frac{x^3}{3}-\frac{3\cdot x^2}{2}+\frac{8\cdot x}{3}$

– Flächenberechnung: $\int_2^8(\mathbf{g}(x)-\mathbf{f}(x))\,dx$ ▸ 9

=> Die gesuchte Fläche ist 9 FE groß.



g Zeigen Sie, dass der Abstand zwischen dem Hochpunkt des Graphen G_f und dem Scheitelpunkt der Parabel G_p größer als $\frac{5}{12}$ ist.

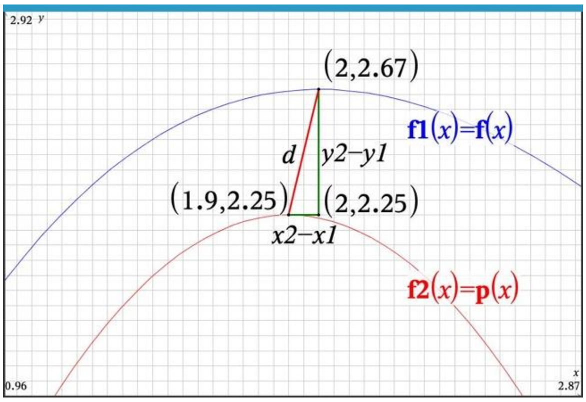
Der Hochpunkt von f ist bekannt H[2|$\frac{8}{3}$], der Scheitelpunkt von p muss noch berechnet werden:

solve$(\mathbf{pa}(x)=0,x)$ ▸ $x=1.9$ $\mathbf{p}(1.9)$ ▸ 2.25 => S[1,9|2,25]

Der Abstand zweier Punkte ergibt sich als Länge der Hypothenuse im rechtwinkligen Dreieck gemäß der Graphik auf der nächsten Seite.

$d^2 = (x2-x1)^2+(y2-y1)^2$ => d = $\sqrt{(2-1.9)^2+\left(\frac{8}{3}-2.25\right)^2}$ ▸ 0.4285

$\frac{5}{12}$ ▸ 0.4167 => Der Abstand von 0,4285 ist größer als $\frac{5}{12}$.

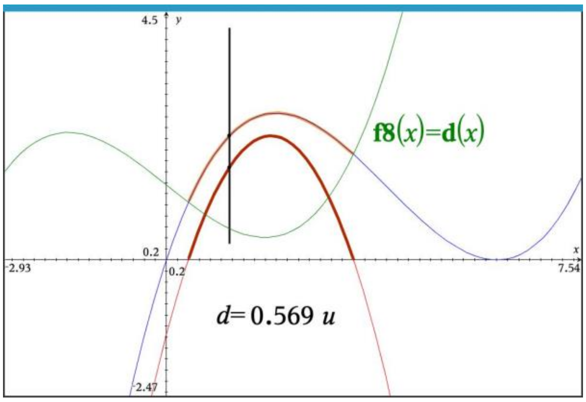


h Für $0{,}4 \le x \le 3{,}4$ verlaufen die beiden Graphen G_f und G_p im 1. Quadraten und der Graph G_f verläuft oberhalb des Graphen G_p.
Die Funktion $d(x) = f(x) - p(x)$ beschreibt den senkrechten Abstand der beiden Graphen im Intervall $0{,}4 \le x \le 3{,}4$.

Die nachfolgende Graphik zeigt den Sachverhalt. Bewegt man den oberen der beiden Punkte, kann man den Verlauf des Abstandes der beiden Punkte nachvollziehen.

$\mathbf{d}(x):=\mathbf{f}(x)-\mathbf{p}(x)$ ▸ *Fertig* $\mathbf{d}(x)$ ▸ $\frac{x^3}{12}-0.8\cdot x+1.36$

Auf der nachfolgenden Seite ist der Graph von d(x) grün dargestellt.



weiter mit h:

Ermitteln Sie, in welchem Intervall der Graph von d steigend und in welchem Intervall der Graph von d fallend ist.
Geben Sie den Wertebereich von d an.

Die Monotonie von d(x) ergibt sich aus der 1. Ableitung von d(x).

$\mathbf{da}(x):=\frac{d}{dx}(\mathbf{d}(x))$ ▸ *Fertig* $\mathbf{da}(x)$ ▸ $0.25\cdot x^2-0.8$

Ist die 1. Ableitung > 0, so ist d steigend, ist sie < 0, so ist d fallend. In den Nullstellen der 1. Ableitung wechselt die Monotonie.

solve$(\mathbf{da}(x)=0,x)$ ▸ $x=-1.789$ or $x=1.789$

fallend: $0{,}4 \le x \le 1{,}789$; wachsend: $1{,}789 \le x \le 3{,}4$

Der Wertebereich ist begrenzt durch den y−Wert des Tiefpunktes im Intervall und des größeren y−Werts der beiden Intervallgrenzen:

$\mathbf{d}(1.789)$ ▸ 0.4059 $\mathbf{d}(3.4)$ ▸ 1.915 Wertebereich: [0,406|1,915]

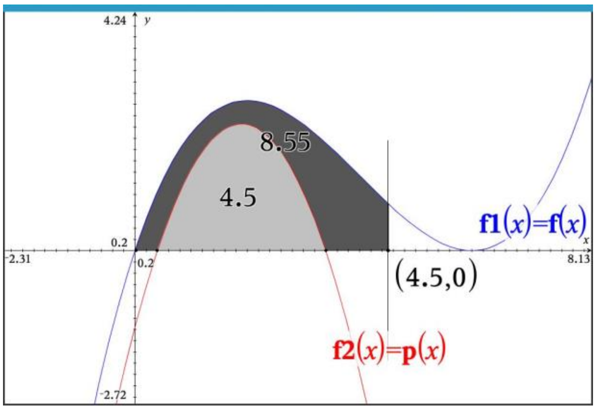
Die Abbildung zeigt die Querschnittsfläche einer Turbinenschaufel. Sie ist eingeschlossen von den Graphen G_f und G_p, der x-Achse und der Geraden $x = 4{,}5$.
(1 LE = 10 cm.)

i Berechnen Sie den Flächeninhalt der Querschnittsfläche der Turbinenschaufel.

Es gibt verschiedene Ansätze für die Berechnung der markierten Fläche. Ein naheliegender Ansatz ist der nachfolgende:

$$\int_0^{4.5} f(x)\,dx - \int_{0.4}^{3.4} p(x)\,dx \blacktriangleright 4.043 \quad 404{,}3cm^2$$

Die Graphik auf der nächsten Seite verdeutlicht den Sachverhalt.



j Weisen Sie nach, dass gilt: $p'(0{,}4) = f'(0)$.
Erläutern Sie, welche anschauliche Bedeutung diese Eigenschaft im Sachzusammenhang hat.

$pa(0.4) \blacktriangleright 3.\ fa(0) \blacktriangleright 3$

Die Steigungen der beiden Begrenzungslinien an den linken Schnittpunkten mit der x−Achse sind gleich groß, die entsprechenden Tangenten schließen mit der waagerechten Begrenzung den gleichen Winkel ein.

k Bei Materialuntersuchungen bricht eine Turbinenschaufel. Die Bruchlinie liegt auf einer Geraden h mit $h(x) = \frac{4}{3}x - \frac{7}{4}$.
Die Gerade h schneidet den Graphen G_f in einem Punkt S, dessen x-Koordinate im Intervall $[0; 4{,}5]$ liegt. Ermitteln Sie die Koordinaten des Punktes S.

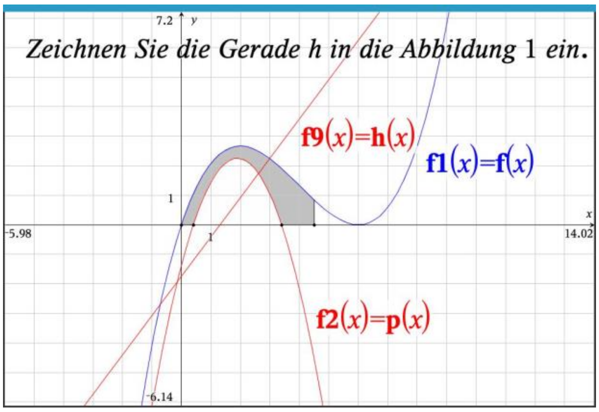
$h(x) := \frac{4}{3}\cdot x - \frac{7}{4} \blacktriangleright \textit{Fertig}$

Schnittpunkte mit f(x):

$\text{solve}(f(x)=h(x),x) \blacktriangleright x=\frac{-(\sqrt{109}-9)}{2} \text{ or } x=3 \text{ or } x=\frac{\sqrt{109}+9}{2}$

Die gesuchte Schnittstelle ist x = 3.

$f(3) \blacktriangleright \frac{9}{4}$ Der gesuchte Schnittpunkt ist S[3|2,25]



Diskussion der Grundkursaufgabe unter dem Blickwinkel der genutzten Operatoren

Betrachtet man die Aufgabe unter Berücksichtigung der vom IQB zur Verfügung gestellten Operatoren[1], so können viele der Teilaufgaben auch auf grafischem Weg gelöst werden. Die Operatoren „Ermitteln", „Bestimmen" und „Untersuchen" bieten damit weitere Lösungsvarianten.

bestimmen, ermitteln	Die Art des Vorgehens kann sofern nicht durch einen Zusatz anders angegeben frei gewählt werden (z. B. Anwenden rechnerischer oder grafischer Verfahren). Das Vorgehen ist darzustellen.
Untersuchen	Die Art des Vorgehens kann sofern nicht durch einen Zusatz anders angegeben frei gewählt werden (z. B. Anwenden rechnerischer oder grafischer Verfahren). Das Vorgehen ist darzustellen.

Wir demonstrieren dies einmal an vier ausgewählten Teilaufgaben.

a Bestimmen Sie die Schnittstellen der Parabel G_p mit der x-Achse.

b Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktion f.

c Ermitteln Sie die Lage und die Art der Extrempunkte des Graphen G_f.

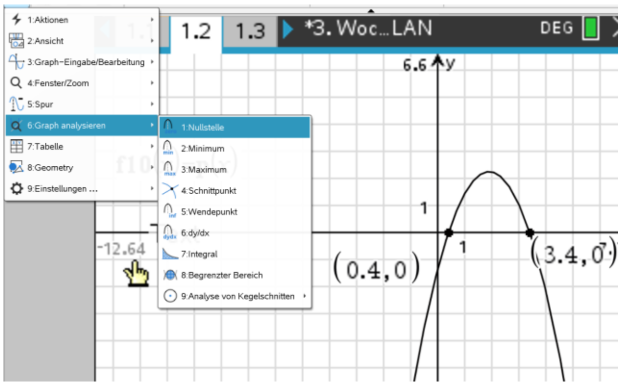
e Ermitteln Sie die Gleichung der Tangente t an den Graphen G_f im Punkt $P(4\,|\,f(4))$.

Begründen Sie, dass es genau einen Punkt Q auf dem Graphen G_p gibt, an dem die Steigung von p genauso groß ist wie die Steigung von t.

Ermitteln Sie die Koordinaten des Punkts Q.

Diese vier Teilaufgaben erlauben die Verwendung des Menüpunktes Graph analysieren.

a) Zweimalige Anwendung des Menüpunktes Nullstelle liefert beide möglichen Nullstellen.

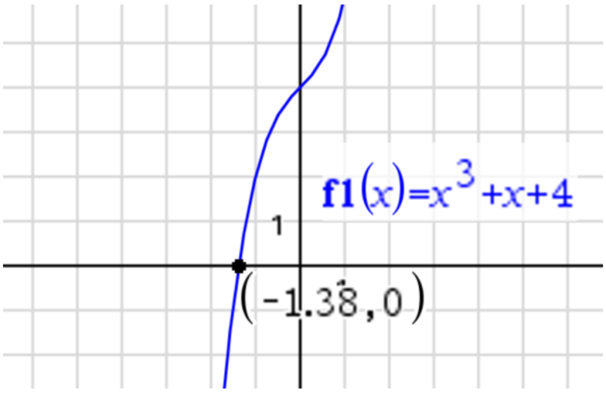


[1] https://www.iqb.hu-berlin.de/abitur/abitur/dokumente/mathematik/M_Grundstock_von.pdf

René Cerajewski
Hubert Langlotz

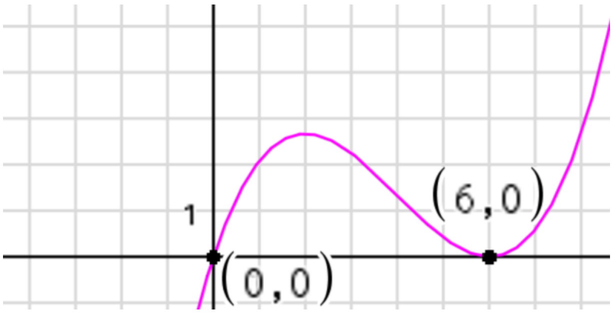
Anmerkung: Sinnvoller wäre bei Verwendung des Operators „Bestimmen“ vielleicht eine Aufgabe, bei der zusätzlich eine Begründung gegeben werden muss, dass in der Graphik alle Nullstellen gefunden wurden.

Beispiel: Bestimmen Sie die Nullstelle(n) der Funktion f mit $f(x) = x^3 + x + 4$. Begründen Sie, dass es nur die von Ihnen gefundenen Nullstellen gibt.
Die Graphik zeigt nur eine Nullstelle.



Begründung: Kubische Funktionen können maximal drei Nullstellen haben. Da die 1. Ableitung von f immer positiv ist, kann die Funktion nur eine Nullstelle haben.

b) Hier erfolgt das analoge Vorgehen, wie in Aufgabenteil a)

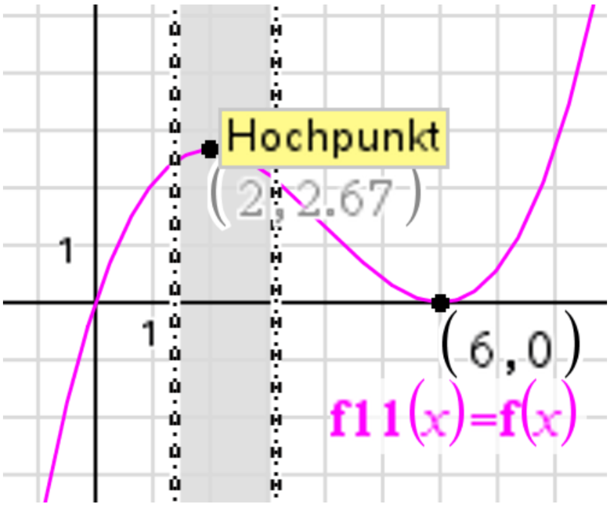


Anmerkung: Auch hier könnte man die Aufgabe dahingehend aufwerten, dass man z. B. fragt: Begründen Sie, dass f keine weiteren Nullstellen hat.

Eine mögliche Antwort kann man z. B. finden, indem man den Funktionsterm faktorisiert und erkennt, dass bei x=6 eine doppelte Nullstelle vorliegt.

$$\text{factor}(f(x),x) \qquad \frac{x\cdot(x-6)^2}{12}$$

c) Auch hier erfolgt das analoge Vorgehen, wie in den Aufgabenteil a) und b)



Man ermittelt als Hochpunkt H(2 | 2,67) und als Tiefpunkt T(6 | 0).

e) Der erste Teil der Aufgabe kann mittels eines TI-Nspire-Befehls bearbeitet werden:

$\text{tangentLine}(f(x),x,4)$	$\frac{16}{3}-x$

Auch bei der Begründung für den 2. Teil kann der Rechner sehr hilfreich sein.

$\frac{d}{dx}(f(x))\vert x=4$	-1
$\text{solve}\left(-1=\frac{d}{dx}(p(x)),x\right)$	$x=2.4$
$p(2.4)$	$2.$

Damit erhält man Q(2,4 | 2).

Ein Ansatz für zukünftige Aufgaben wäre z. B., im innermathematischen Teil die „exakten“ Operatoren, wie „Berechne“, „Zeige“, „Begründe“ zu verwenden, aber im Teil, der anwendungsbezogene Inhalte betrifft, alle Lösungsvarianten zu akzeptieren.

Autoren:
René Cerajewski unterrichtet *Mathematik* und *Physik* am Willi-Graf-Gymnasium, Berlin Steglitz-Zehlendorf, außerdem ist er Fachbereichsleiter MINT
Dr. Hubert Langlotz ist im T3-Leitungsteam für das Fach *Mathematik* zuständig