Die thomaesche Funktion

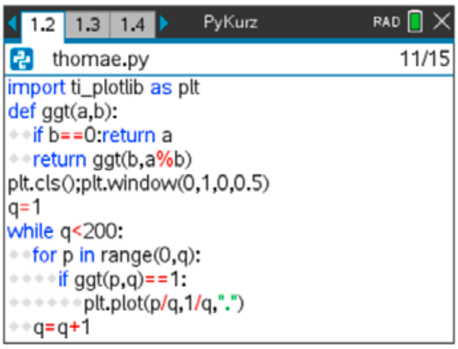
thomae.py

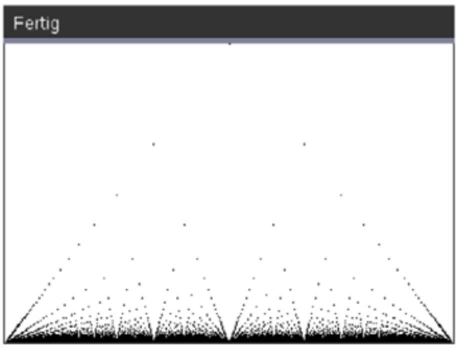
Die Funktion von Thomae (Carl Johannes Thomae (1840–1921)) ist definiert durch:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{q} & \text{für } x>0 \text{ und } x=\dfrac{p}{q}\in\mathbb{Q} \text{ mit } \mathrm{T}(p,q)=1\\ 1 & \text{für } x=0\\ 0 & \text{sonst}\end{cases}$$

Diese Funktion ist ein Beispiel für eine Funktion, die in jedem Punkt von $\mathbb{Q}$ unstetig, aber in $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ stetig ist. Sie ist weiters periodisch mit der Periode 1 und nirgends differenzierbar. Überdies hat sie in jedem Punkt von $\mathbb{Q}$ ein lokales Maximum.

Die grafische Darstellung dieser Funktion erfordert ein eigenes Programm, ergibt aber ein schönes Ergebnis.





- Wir beginnen mit der Definition der Funktion ggt(a,b), die mit Hilfe einer Rekursion den größten gemeinsamen Teiler von *a* und *b* berechnet.
- Dann leeren wir den Grafikschirm und setzen den Nenner *q* auf 1. In einer for-Schleife gehen wir alle möglichen Zähler der Brüche *p*/*q* durch.
- Wenn der Bruch nicht mehr zu kürzen ist (ggT = 1), wird der zugehörige Bildpunkt gezeichnet. Der Parameter "." sorgt für einen dünnen Punkt.
- Dann erhöhen wir den Nenner um 1 und beginnen aufs Neue. Das wird so lange durchgeführt, bis der Nenner *q* den Wert 200 erreicht. Dann werden Berechnung und auch die Zeichnung beendet.

Damit stellen wir die Funktion im Intervall [0,1] dar. Die Periodizität können wir erkennen, wenn man die Schleife so anpasst, dass *p* bis 3*q* läuft (plt.window anpassen!). Dann erhältst du die Grafik für das Intervall [0,3]. Durch eine weitere kleine Änderung kannst du die folgende Funktion zeichnen, die überall, außer an der Stelle 0, unstetig ist:

$$f(x)=\begin{cases}x^2 & x=p/q\in\mathbb{Q} \text{ mit } \mathrm{ggT}(p,q)=1\\ 0 & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$$