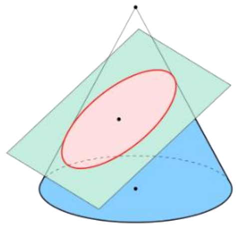
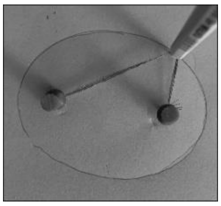
Cassinische Ovale



In unserem Beitrag „Wenn Descartes einen TI-Nspire gehabt hätte …“ stellen wir unter anderem dar, wie die Mathematikwerkzeuge des TI-Nspire CAS genutzt werden können, um Kurven wie Ellipsen oder die nach Descartes benannten Kartesischen Ovale auf einem der Schule angemessenem Niveau zu untersuchen.

In Kurzfassung hier noch einmal wesentliche Aspekte zu Ellipsen und Kartesischen Ovalen:



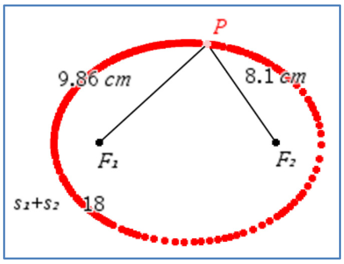
Ellipsen als rein geometrisches Phänomen tauchen z. B. als Schnittfiguren von Zylindern oder Kegeln (s. Abbildung Kegelschnitt, Quelle[1]) oder als Planetenbahnen auf.

Auch die Gärtnerkonstruktion erzeugt Ellipsen als Bahnkurven, ohne dass dazu eine Gleichung erforderlich wäre.

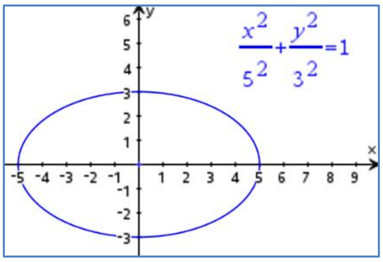
Aus der Gärtnerkonstruktion lässt sich leicht die **Abstandsdefinition der Ellipse** herleiten:

> Es seien F_1 und F_2 zwei Punkte der Ebene. Die Menge aller Punkte P, für die die Summe der Abstände zu F_1 und F_2 konstant ist, wird als **Ellipse** mit den Brennpunkten F_1 und F_2 bezeichnet.

Die Ortsdefinition kann genutzt werden, um die Ellipse mit der dynamischen Geometriesoftware des TI-Nspire zu zeichnen. Außerdem lässt sich aus der Ortsdefinition im Wesentlichen durch Anwendungen des Satzes von Pythagoras die Ellipsengleichung herleiten. So können dann Ellipsen auch mit dem Werkzeug *Graphs* des TI-Nspire gezeichnet werden.



Ellipse als Geometriespur



Ellipse als Graph einer Gleichung

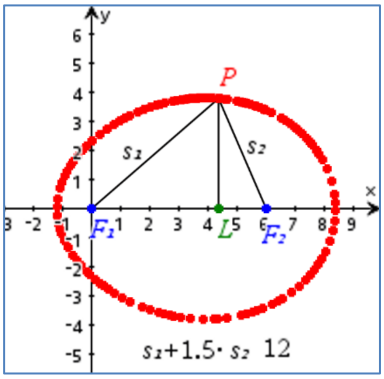
Eine einfache Abwandlung der Ortsdefinition der Ellipse führt zur **Abstandsdefinition von kartesischen Ovalen**:

> Es seien F_1 und F_2 zwei Punkte der Ebene mit dem Abstand c. Es sei s_1 der Abstand von F_1 zu einem dritten Punkt P der Ebene und s_2 der Abstand von F_2 zum selben Punkt P. Die Menge aller Punkte P, für die die Summe $s_1 + m \cdot s_2 = a$ konstant ist, wird als **kartesisches Oval** mit den Brennpunkten F_1 und F_2 bezeichnet $(m, a \in R)$.

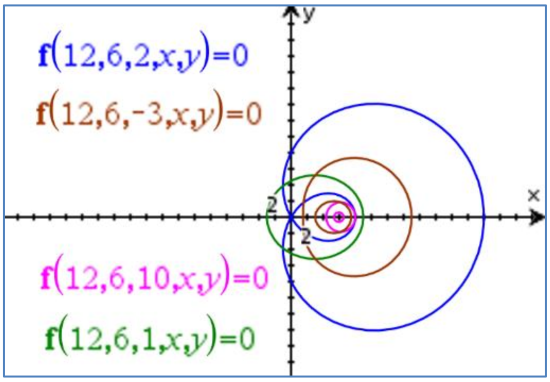
[1] https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/5/5f/Ellipse-conic.svg/300px-Ellipse-conic.svg.png

In analoger Weise zum Vorgehen bei der Ellipse lassen sich kartesische Ovale mithilfe der dynamischen Geometriesoftware des TI-Nspire erzeugen und eine Gleichung für solche Kurven herleiten. Das Ergebnis der Herleitung sowie die geometrische Konstruktion und grafische Darstellung mithilfe der Gleichung zeigen die folgenden Screenshots. Die Herleitung der Gleichung ist in unserem oben genannten Beitrag zu finden.

$$f(a,c,m,x,y):=4\cdot a^2\cdot m^2\cdot\left(x^2-2\cdot c\cdot x+y^2+c^2\right)-\left(\left(m^2-1\right)\cdot x^2-2\cdot c\cdot m^2\cdot x+\left(m^2-1\right)\cdot y^2+a^2+c^2\cdot m^2\right)^2$$



Kartesisches Oval als Geometriespur

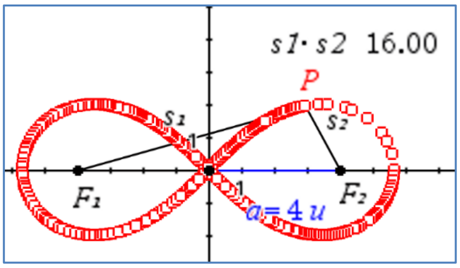


Kartesische Ovale als Graphen der obigen Gleichung

Wir erweitern nun diese Betrachtungen durch analoge Untersuchungen zu den **„Cassinischen Ovalen“.**

Es seien F_1 und F_2 zwei Punkte der Ebene mit dem Abstand 2a. Es sei s_1 der Abstand von F_1 zu einem dritten Punkt P der Ebene und s_2 der Abstand von F_2 zum selben Punkt P. Die Menge aller Punkte P, für die das Produkt $s_1 \cdot s_2 = b^2$ konstant ist, wird als **Cassinisisches Oval** mit den Brennpunkten F_1 und F_2 bezeichnet

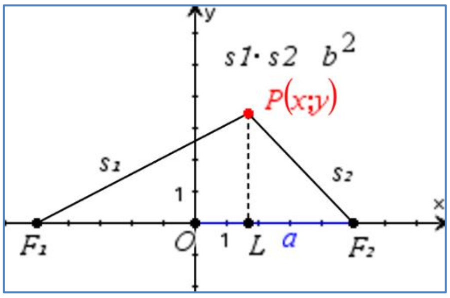
Die Konstruktion der Geometriespur erfolgt analog zur Gärtnerkonstruktion bei der Ellipse.



Öffnen Sie die Anwendung *Geometry*.
Zeichnen Sie die beiden Punkte F_1 und F_2 mit einem Abstand von 6 cm. (*Punkte&Geraden - Punkt* und Messung – Länge).

Zeichnen Sie zwei Strecken $s_1 = \overline{F_1P}$ und $s_2 = \overline{F_2P}$ mit einem gemeinsamen Endpunkt P (*Punkte&Geraden – Strecke)*.
Messen Sie die Längen dieser Seiten (*Messung-Länge).*
Geben Sie den Text $s_1 \cdot s_2$ ein *(Aktionen-Text).*
Klicken Sie auf diese Formel und wählen Sie *Aktionen-Berechnen.* Klicken Sie dann auf die Längenmaßzahl von s_1 und danach auf die Längenmaßzahl von s_2. Der Rechner zeigt das Produkt $s_1 \cdot s_2$. an. Durch Bewegen von P im Zugmodus können Sie das Produkt auf einen gewünschten Betrag, z. B. 16 einstellen.

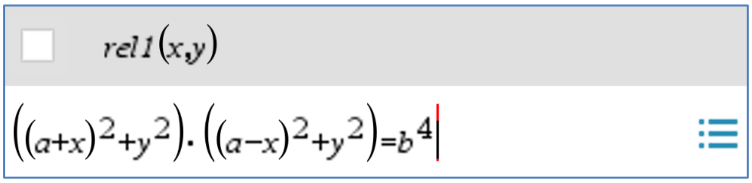
Klicken Sie auf die gewählte angezeigte Maßzahl des Produktes und wählen Sie unter *Attribute* die Anweisung: *„Das Objekt ist gesperrt.“*
Wählen Sie unter *Spur* die Anweisung „Geometriespur“. Greifen Sie den Punkt P und erzeugen Sie seine Geometriespur.
Hinweis: Wegen der besseren Übersichtlichkeit wurden die Messwerte für s_1 und s_2 nachträglich ausgeblendet.

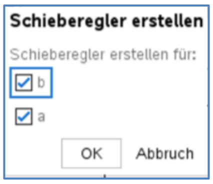


Um eine analytische Beschreibung dieser Figur zu finden, wird ein Koordinatensystem eingeführt. Die Brennpunkte F_1 und F_2 werden symmetrisch zum Ursprung O im Abstand a gelegt. Die weitere Konstruktion erfolgt so, wie oben beschrieben. Die Strecke $\overline{LP}$ bezeichnet das Lot von P(x|y) auf die x - Achse. Das Lot teilt das Dreieck F_1F_2P in zwei rechtwinklige Dreiecke, auf die der Satz des Pythagoras angewendet wird. Mit $|\overline{F_1O}| = a$, $|\overline{F_2O}| = a$,
$|\overline{F_1L}| = a + x$, $|\overline{F_2L}| = a - x$ und $|\overline{PL}| = y$ folgt durch Anwenden des Satzes des Pythagoras:
${s_1}^2 = (a + x)^2 + y^2$ und ${s_2}^2 = (a - x)^2 + y^2$
Nach Definition gilt $s_1 \cdot s_2 = b^2$, werden beide Seiten quadriert, so erhält man ${s_1}^2 \cdot {s_2}^2 = b^4$.
Einsetzen von ${s_1}^2 = (a + x)^2 + y^2$ und ${s_2}^2 = (a - x)^2 + y^2$ ergibt die kartesische Gleichung

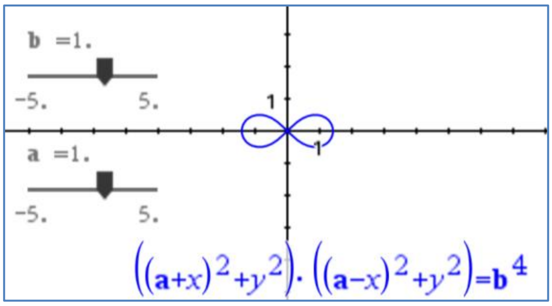
$$\boldsymbol{[(a + x)^2 + y^2] \cdot [(a - x)^2 + y^2] = b^4}$$

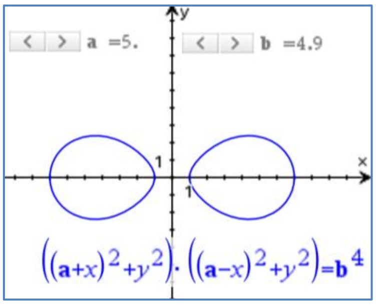
Die Gleichung wird in der Anwendung *Graphs-Eingabe/Bearbeitung* unter *Relation* eingegeben.





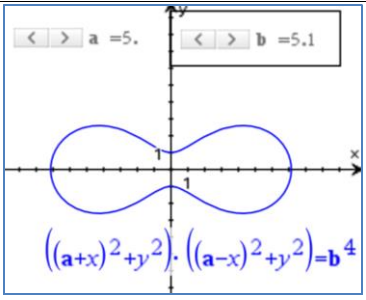
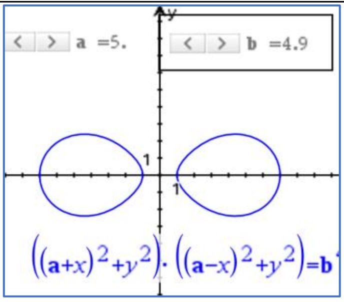
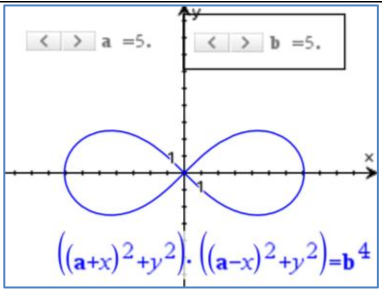
Nach Bestätigung durch *Enter* erfolgt die Aufforderung, für a und b Schieberegler einzurichten. Durch *ok* wird dies bestätigt. Die Schieberegler werden nun noch über Einstellungen zweckmäßiger eingerichtet.(Intervalle von 0 bis 10, Schrittweite 0.1, Minimieren)





Die Form der Cassinischen Ovale hängt vom Verhältnis $\frac{b}{a}$ ab.

$\frac{b}{a} > 1$	$\frac{b}{a} < 1$	$\frac{b}{a} = 1$
eine einzelne Schleife	zwei sich nicht schneidende Schleifen	Lemniskate

$\frac{b}{a} > 1$	$\frac{b}{a} < 1$	$\frac{b}{a} = 1$
eine einzelne Schleife	zwei sich nicht schneidende Schleifen	Lemniskate
		

Etwas Biographisches zu CASSINI (Quelle: Wikipedia)[2]:

„**Giovanni Domenico Cassini** (* 8. Juni 1625 in Perinaldo, Grafschaft Nizza, Herzogtum Savoyen; † 14. September 1712 in Paris) war ein italienischer Astronom und Mathematiker, der in Bologna Ansehen erwarb, 1669 an die Académie Royale des Sciences in Paris berufen wurde, 1673 die französische Staatsbürgerschaft annahm und seitdem meist *Jean-Dominique Cassini* genannt wurde. Er wurde zum Begründer einer Dynastie von Astronomen, die bis zur Französischen Revolution die Direktoren des Pariser Observatoriums stellten, weshalb er auch als *Cassini I* bezeichnet wird.“ […]

„Cassini studierte am Jesuitenkolleg in Genua und Bologna. Durch den Einfluss des früheren Generals und damaligen Senators Cornelio Malvasia wurde er 1650 der Nachfolger von Pater Bonaventura Cavalieri an der Universität von Bologna als Professor für Astronomie und Mathematik. Dort unterrichtete er euklidische Geometrie und – der Doktrin der katholischen Kirche entsprechend – die ptolemäische Astronomie. So bevorzugte er lange das geozentrische Modell von Tycho Brahe, während er zögerte, das heliozentrische von Nikolaus Kopernikus zu übernehmen.

Cassini entwickelte sich zu einem ausdauernden, sehr genauen Beobachter des Himmels. 1655 bestimmte er mit seiner *Meridiana* in der Basilika San Petronio von Bologna die Neigung der Erdbahn, den Sonnendurchmesser und die Lichtbrechung in der Erdatmosphäre. Seine Ergebnisse veröffentlichte er zügig 1662 in Tabellenform. Darüber hinaus verschafften ihm die Teleskope von Eustachio Divini (1610–1685) aus Rom und Giuseppe Campani (1635–1715) spektakuläre Entdeckungen: Mit Hilfe des Großen Roten Flecks auf dem Jupiter bestimmte Cassini dessen Eigendrehung (1665). Er berechnete auch die Rotationsdauer

[2] https://de.wikipedia.org/wiki/Giovanni_Domenico_Cassini

von Venus, Jupiter und Mars und untersuchte die Oberflächen der Planeten genauer. Aus dem regelmäßigen Umlauf des Jupitermondes Io leitete er die Bestimmung des Längengrades ab, ein wichtiger Schritt für die Geodäsie und die Navigation. Dazu veröffentlichte Cassini 1668 genaue Tabellen (*Ephemerides Bononienses mediceorum siderum*). Nachdem sich Jean Picard für ihn ausgesprochen und er sich das Wohlwollen von König Ludwig XIV. erworben hatte, wurde Cassini 1669 durch Colbert an die gerade gegründete Académie Royale des Sciences und zum Leiter des noch im Bau befindlichen Pariser Observatoriums berufen.
Als Direktor der Sternwarte bewährte Cassini sich durch weitsichtige Planungen von Expeditionen mit dem Ziel, die genaue Form der Erde zu bestimmen, eine genaue Karte Frankreichs zu erstellen und das Sonnensystem zu vermessen. Dabei entdeckte er weitere Saturn-Monde (1671 Iapetus und 1672 Rhea) und 1675 erstmals die Lücke im Saturnring, die heute Cassinische Teilung heißt. Cassini bemerkte an Japetus regelmäßige Veränderungen der Helligkeit. Er erkannte, dass der Mond dem Saturn immer dieselbe Seite zeigt, also wie der Erdmond gebunden rotiert. Außerdem beschrieb er 1683 das Zodiakallicht.“

Ein anderer Artikel ist zu finden unter https://www.deutschlandfunk.de/vor-350-jahren-entdeckt-giovanni-domenico-cassini-und-der-100.html

Autoren:
Dr. Hubert Langlotz
Dr. Wilfried Zappe