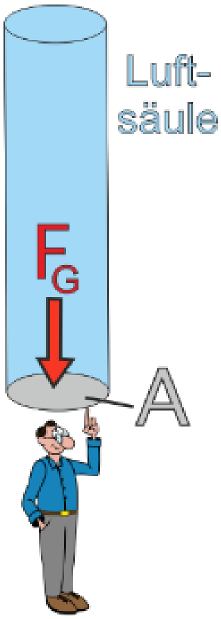
Exponentielle Regression mit dem TI-30X Plus MathPrint™



Die Luft besitzt eine Masse. Deshalb übt eine Luftsäule, die sich über einer Fläche A befindet, auf diese Fläche eine Gewichtskraft F_G aus. Der Quotient aus der Gewichtskraft und der Fläche wird als Luftdruck p bezeichnet und in der Einheit Pa (Pascal) bzw. hPa (Hektopascal) angegeben.[1]

$p = \frac{F_G}{A}$ 1 hPa = 100 Pa

Daraus folgt auch, dass der Luftdruck u. a. von der Höhe abhängt, denn je höher die Luftsäule ist, desto größer muss auch der Luftdruck sein. So werden in der folgenden Tabelle Durchschnittswerte der Höhe und des Luftdrucks für verschiedene Orte angegeben.
(vgl. z. B. https://de.wikipedia.org/wiki/Luftdruck)

Die Höhe des Luftdrucks wird nicht nur durch die Höhe der Luftsäule bestimmt. Auch Faktoren wie die Temperatur oder die Luftfeuchtigkeit spielen eine Rolle. Sie bleiben hier jedoch unberücksichtigt.

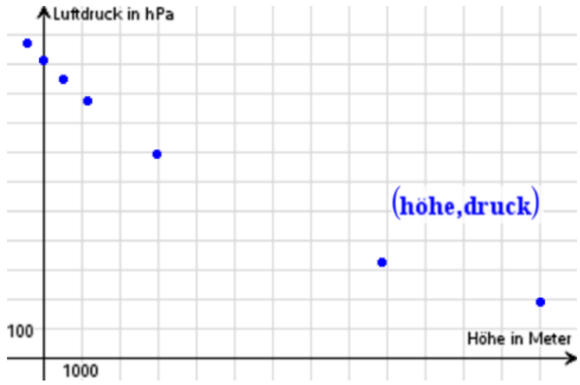
Ort	Höhe in m	Luftdruck in hPa
Totes Meer	-425	1070
Meeresspiegel (N.N.)	0	1013
München	519	948
Brocken	1141	875
Zugspitze	2962	693
Mount Everest	8848	325
Reiseflughöhe	13 000	191

a) Stellen Sie die Wertepaare grafisch dar und formulieren Sie eine Vermutung über den Zusammenhang zwischen Höhe und Luftdruck.
b) Untersuchen Sie durch eine Regression diesen Zusammenhang genauer und finden Sie so eine Gleichung, die den Sachverhalt mathematisch modelliert.
c) Berechnen Sie mit dieser Gleichung den Luftdruck für den Großglockner (Höhe 3798 m).
d) Welche Höhe hätte ein Ort ungefähr, für den ein Luftdruck von 700 hPa gemessen wurden.

[1] Grafik: https://denkwerkstatt-physik.de/denkwerkstatt-physik/files/mechanik/lautstaerke/images/Luftdruck.png

Lösungen[2]:

a) Die grafische Darstellung zeigt einen streng monoton fallenden, aber deutlich erkennbaren nicht linearen Verlauf der Wertepaare (Höhe; Luftdruck)

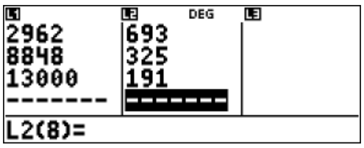


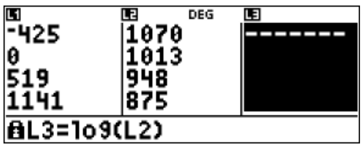
Auch aus der Definition des Luftdrucks lässt sich schließen, dass der Zusammenhang zwischen Höhe und Luftdruck durch eine monoton fallende Funktion beschrieben wird, denn mit zunehmender Höhe über dem Meeresspiegel nehmen die Gewichtskraft F_G der kürzer werdenden Luftsäule und damit der Luftdruck ab.
Als mathematisches Modell für eine solche Funktionen könnte z. B. eine Exponentialfunktion mit negativem Exponenten in Frage kommen, auch weil man sich vorstellen kann, dass der Luftdruck mit zunehmender Höhe asymptotisch gegen 0 hPa geht und die Dichte der Luft abnimmt.
Um sich zu vergewissern, dass ein exponentieller Ansatz sinnvoll ist, bildet man die Logarithmen der Werte des Luftdrucks und trägt diese grafisch gegen die Höhe auf. Ergibt diese halblogarithmische Darstellung eine Gerade, dann kann man von einem exponentiellen Zusammenhang ausgehen, wie folgende Überlegung zeigt.

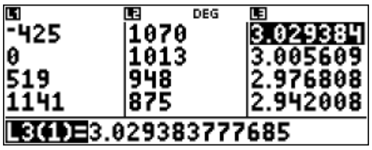
$$y = a \cdot b^x \Longrightarrow \lg(y) = \lg(a \cdot b^x) = \lg(a) + lg(b^x) = \lg(b) \cdot x + \lg(a)$$

Dies ist die Gleichung einer linearen Funktion vom Typ $y = m \cdot x + n$.
Also gilt m = lg(b) und n = lg(a) (*).

Die halblogarithmische Darstellung wird mit dem WTR vorbereitet:
Mit Data werden die Tabellenwerte für Höhe und Luftdruck in L1 bzw. L2 gespeichert.
$\boxed{\text{2nd}}\boxed{0}\boxed{2}\boxed{\text{clear}}\boxed{\text{data}}$, dann die Werte eingeben.
In der Spalte L3 wird mit $\boxed{\text{data}}$ - *Formula* der Logarithmus der Werte von L2 berechnet.
$\boxed{\text{data}}\boxed{\triangleright}\boxed{1}\boxed{\text{ln log}}\boxed{\text{ln log}}\boxed{\text{data}}\boxed{2}\boxed{)}\boxed{\text{enter}}$



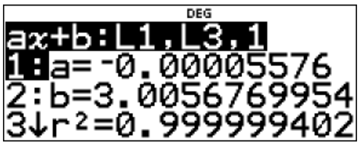


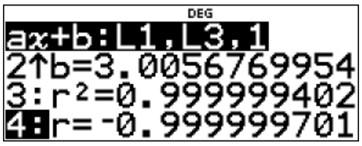


b) Eine lineare Regression für die Wertepaare aus L1 und L3 liefert eine Bestätigung für einen linearen Verlauf der halblogarithmischen Darstellung, da der Regressionskoeffizient zur berechneten linearen Funktion nahezu r = - 1 ist.
Die Gleichung für die halblogarithmische Darstellung lautet
$y \approx -0{,}00005567 \cdot x + 3{,}005677$.
Der Anstieg dieser linearen Funktion ist m = - 0,00005576, das Absolutglied ist n = 3,005677.
Wegen m = lg(b) und n = lg(a) folgt daraus mit (*): $b = 10^m$ und $a = 10^n$.

a) [2] Diagramme erstellt mit TI-Nspire CX CAS

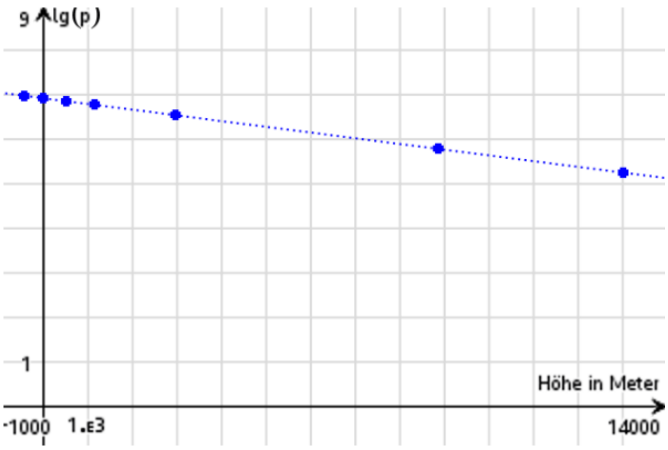
Durch Einsetzen wird mit dem Taschenrecher ermittelt: $a \approx 1013{,}16$ und $b \approx 0{,}999872$, so dass die Funktion für den Zusammenhang zwischen Höhe und Luftdruck angegeben werden kann durch $y \approx 1013{,}16 \cdot 0{,}999872^x$.



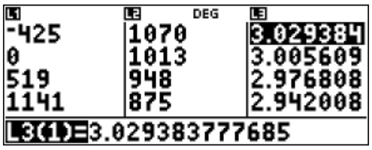


Alternativ:

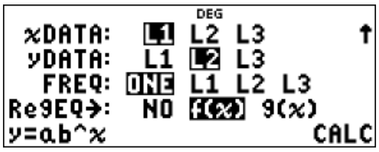
Die grafische Darstellung der Wertepaare aus L1 und L3 zeigt einen linearen Verlauf, so dass die Vermutung über einen exponentiellen Verlauf der Wertepaare aus L1 und L2 bestätigt wird.

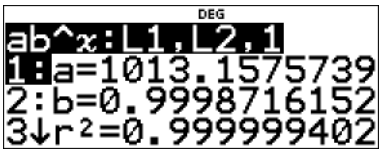


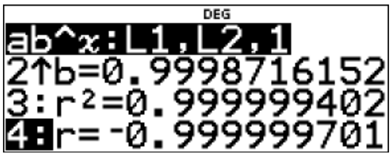
Es wird mit dem TI-30X Plus MathPrint eine Regression für eine Exponentialfunktion durchgeführt.



Mit *stat-reg/distr* (2nd data) wird die exponentielle Regression der Wertepaare aus L1 und L2 veranlasst. Der WTR bietet dazu zwei Möglichkeiten an: Eine Gleichung der Form $y = a \cdot b^x$ oder der Form $y = a \cdot e^{b \cdot x}$.
Wir entscheiden uns hier für die zuerst genannte Gleichungsform, weil sie auch schon für die Mittelstufe verständlich ist.
Die zu erwartende Regressionsgleichung soll unter f(x) gespeichert werden.



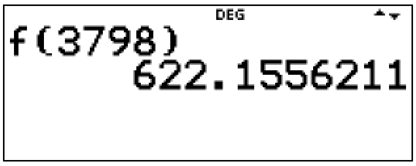




Auswertung:
Der Regressionskoeffizient ist annähernd $r \approx -1$. Dies deutet auf einen guten exponentiellen Zusammenhang hin.
Die Regressionsgleichung lautet (gerundet): $f(x) = 1013{,}16 \cdot 0{,}99987^x$. Sie wurde im WTR unter f(x) gespeichert. Damit können nun die Teilaufgaben c) und d) bearbeitet werden.
Hinweis: Wird eine Regression für die Form $y = a \cdot e^{b \cdot x}$ durchgeführt, erhält man als Regressionsgleichung $y \approx 1013{,}16 \cdot e^{-0{,}000128393 \cdot x}$.

c) Luftdruck auf dem Großglockner (3798 m):

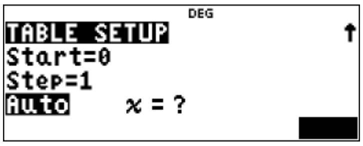
Mit Table ([table] [2]) wird die Funktion f(x) aufgerufen und der Eintrag durch das Argument 3798 vervollständigt.

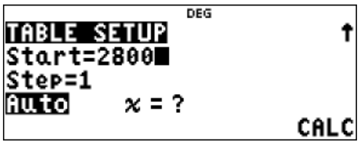


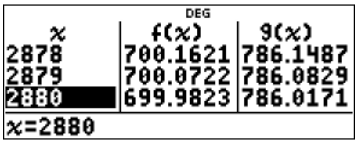
[table] [2] [3] [7] [9] [8] [)] [enter]

Auf dem Großglockner ist mit einem Luftdruck von etwa 622 hPa zu rechnen.

d) Höhe für einen Luftdruck von 700 hPa:
Mit Table ([table] [1]) wird f(x) gewählt, unter *Table Setup* die Einstellung *Auto* und mit einem Blick auf die gegebene Tabelle von Seite 1 der Startwert x = 2800 gefordert. Dann erhält man eine Wertetabelle zurückgegeben, die man durchblättern kann, bis man so nahe wie möglich bei f(x) = 700 ist. (Ggf. kann man nochmals über *Table Setup* die Schrittweite verkleinern.)



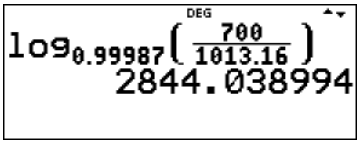




Der Luftdruck von 700 hPa ist in einer Höhe von ca. 2880 m zu erwarten.

Hinweis:
Die Teilaufgabe d lässt sich auch mit der Regressionsgleichung
$f(x) = 1013{,}16 \cdot 0{,}99987^x$ ermitteln.

Die Gleichung $700 = 1013{,}16 \cdot 0{,}99987^x$ nach x umstellen ergibt $\frac{700}{1013{,}16} = 0{,}99987^x$ und daraus $x = \log_{0{,}99987} \frac{700}{1013{,}16}$.
Mit dreimal Drücken auf die Taste [ln log] kann man das direkt eingeben. Der Wert ist etwas genauer als die weiter oben durch systematisches Probieren ermittelte Höhe:
In einer Höhe von 2844 m ist ein Luftdruck von 700 hPa zu erwarten.



Etwas Physik und höhere Mathematik:

Jemand, der bergab läuft, ist einem immer höheren Luftdruck ausgesetzt. Dabei spielen im Wesentlichen zwei Bedingungen eine Rolle:

1. Die auf einer Einheitsfläche lastende Luftsäule wird immer höher. Dadurch wird ihre Gewichtskraft größer, der Luftdruck steigt.
2. Da die Luft kompressibel ist, wird sie durch die immer schwerer werdende Luftsäule stetig stärker komprimiert, was ebenfalls eine Steigerung des Luftdrucks bewirkt.

Der Luftdruck wächst also umso schneller, je höher der Luftdruck bereits ist, d. h. die Annahme scheint berechtigt, dass die relative Änderung des Luftdrucks proportional zum Luftdruck ist.
Im mathematischen Modell kann das gedeutet werden, dass die 1. Ableitung des Luftdrucks proportional zum Luftdruck ist:

$$\frac{dp}{dh} = k \cdot p$$

Diese Differentialgleichung kann durch Trennung der Variablen gelöst werden.

$$\frac{dp}{p} = k \cdot dh$$

Nach Integration und unter Berücksichtigung, dass der Luftdruck p > 0 ist, ergibt sich daraus:

$$\ln(p) = k \cdot h + c \Longrightarrow p = e^{k \cdot h + c} \Longrightarrow p = e^{k \cdot h} \cdot e^{c}$$

Für k = 0 ist $p(0) = e^c = p_0$ und damit folgt $p(h) = p_0 \cdot e^{k \cdot h}$.

Vergleicht man diese Formel mit dem Ergebnis $y \approx 1013{,}16 \cdot e^{-0{,}000128393 \cdot x}$ der exponentiellen Regression, so erhält man näherungsweise $p(h) = 1013{,}16 \cdot e^{-0{,}0001284 \cdot h}$.

Autor:
Dr. Wilfried Zappe