Der Herrnhuter Stern

Josef Böhm, Würmla, Österreich, nojo.boehm@pgv.at
(DERIVE Usergroup)

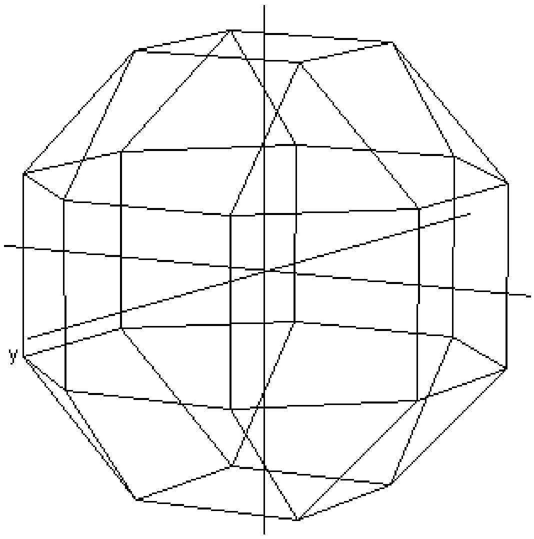
Der berühmte Herrnhuter Stern ist eine interessante Figur, die nicht nur ästhetisch schön ausschaut, sondern auch Stoff für anregende mathematische Tätigkeiten darstellt.

Geometrisch gesehen beruht der Stern auf einem Rhombenkuboktaeder. Das ist eine Figur, deren Oberfläche aus 18 Quadraten und 8 gleichseitigen Dreiecken besteht. Dabei sind alle Kanten gleich lang. Der Körper kann aus sechs regelmäßigen Achtecken erzeugt werden und sieht dann so aus. (Alle kommenden Figuren wurden mit der Kantenlänge *a* = 3 gezeichnet.)

Mit dem folgenden DERIVE-Befehl wird ein regelmäßiges horizontal liegendes Achteck im Abstand von 1,5 unter der *xy*-Ebene gezeichnet.

$$r := \frac{3\cdot\sqrt{(2\cdot\sqrt{2} + 4)}}{2}$$

$$m1 := \mathrm{VECTOR}\left(\left[r\cdot\mathrm{COS}\left(\frac{\pi}{4}\cdot k + \frac{\pi}{8}\right),\ r\cdot\mathrm{SIN}\left(\frac{\pi}{4}\cdot k + \frac{\pi}{8}\right),\ -\frac{3}{2}\right],\ k,\ 0,\ 8\right)$$



Die übrigen Achtecke werden ähnlich erzeugt.

Dann werden alle 26 Ecken definiert und zu Quadraten bzw. Dreiecken zusammengefasst, wobei für spätere Zwecke schon jetzt auf den Umlaufsinn geachtet werden muss.

$$[p1 := m1_1,\ p2 := m1_2,\ p3 := m1_3,\ p4 := m1_4,\ p5 := m1_5,\ p6 := m1_6,\ p7 := m1_7,\ p8 := m1_8]$$

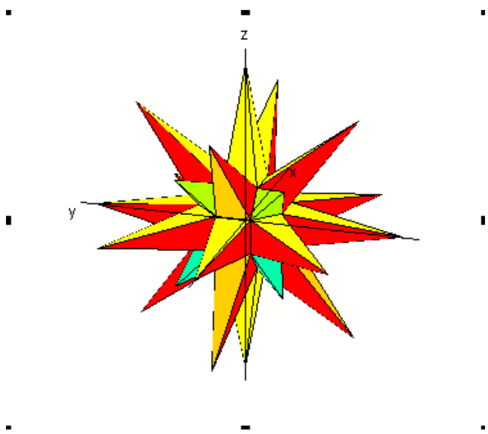
```
[sq1 := [p1, p2, q2, q1], sq2 := [p2, p3, q3, q2], sq3 := [p3, p4, q4, q3],
                                                                          ....
[tr1 := [s7, p2, p1], tr2 := [s6, p4, p3], tr3 := [r6, p6, p5],
                                                               ....
```

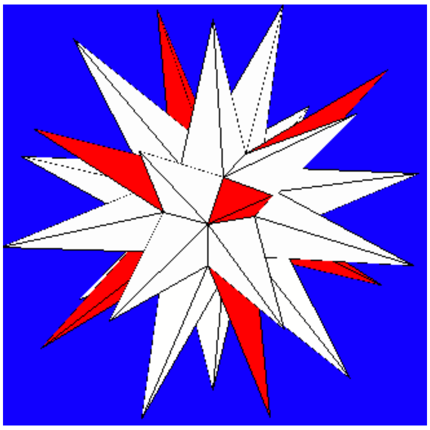
Die nächsten beiden Funktionen erzeugen Pyramiden über den Quadraten, bzw. den Dreiecken mit variablen Höhen *h* und *hh*. Für die Höhen werden dann beim Zeichnen Schieberegler eingeführt, wodurch die Höhe der Zacken verändert werden kann.

```
pyrs(sq_, h, m, n, s) :=
  Prog
    m := (sq_↓1 + sq_↓3)/2
    n := (sq_↓2 - sq_↓1) × (sq_↓3 - sq_↓1)
    n := n/ABS(n)
    s := m + h·n
    [s, sq_↓1; s, sq_↓2; s, sq_↓3; s, sq_↓4; s, sq_↓1]

pyrtr(tr_, hh, m, n, s) :=
  Prog
    m := (tr_↓1 + tr_↓2 + tr_↓3)/3
    n := (tr_↓2 - tr_↓1) × (tr_↓3 - tr_↓1)
    n := n/ABS(n)
    s := m + hh·n
    [s, tr_↓1; s, tr_↓2; s, tr_↓3; s, tr_↓1]
```

Die nächsten beiden Ausdrücke können im 3D-Fenster sofort geplottet werden, nachdem man für *h* und *hh* Schieberegler eingeführt hat.

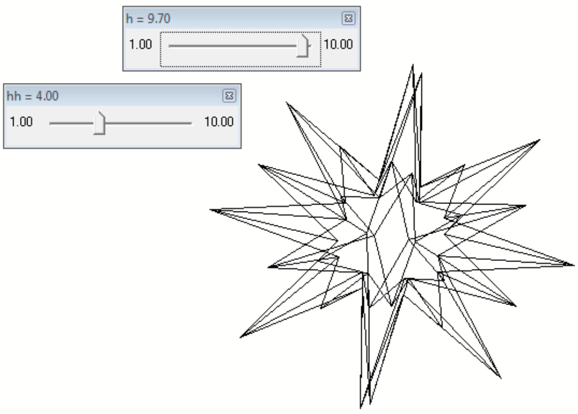
```
VECTOR(pyrs(s_), s_, squares)

VECTOR(pyrtr(t_), t_, triangles)
```





Mit schönen Bildern, die farblich gestaltet werden können, wird man für die Mühen belohnt. Die Sterne können in ihrem Aussehen, was die Länge der Zacken anbelangt verändert werden und entweder mit der Maus oder der Tastatur animiert, d.h. gedreht werden.

Wenn man nur das Drahtgittermodell sehen möchte müssen die beiden Funktionen oben leicht verändert werden – und dann ergibt sich:



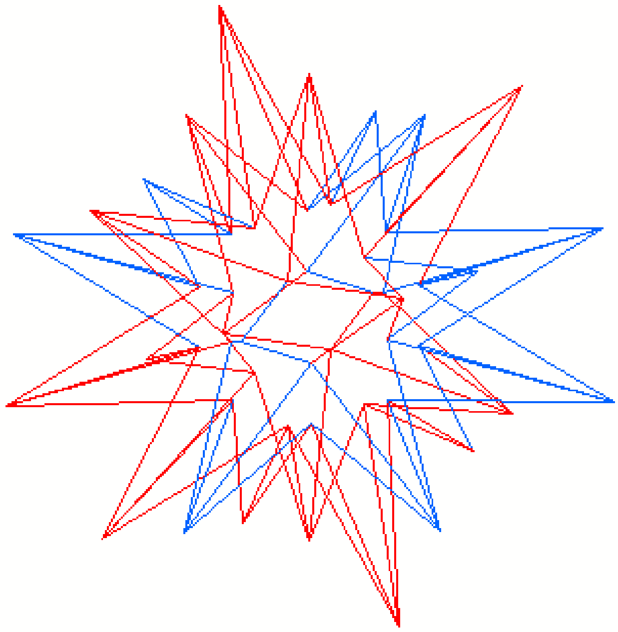
Eine schöne Übung ist es, die Symmetrien des Körpers zu nutzen, um aus je einer vier- und dreiseitigen Pyramide mit Hilfe von Drehmatrizen den ganzen Körper entstehen zu lassen:

$$\text{VECTOR}\left(\left[\text{pyrs\_w(sq2, 8)}\cdot\text{ROTATE\_X}\left(\frac{k\cdot\pi}{4}\right)\right],\ k,\ 0,\ 7\right)$$

$$\text{VECTOR}\left(\left[\text{pyrtr\_w(tr1, 4)}\cdot\text{ROTATE\_Z}\left(\frac{k\cdot\pi}{2}\right)\right],\ k,\ 0,\ 3\right)$$

$$\text{VECTOR}\left(\left[\text{pyrtr\_w(tr1, 4)}\cdot\text{ROTATE\_X}\left(-\frac{\pi}{2}\right)\cdot\text{ROTATE\_Z}\left(\frac{k\cdot\pi}{2}\right)\right],\ k,\ 0,\ 3\right)$$

Im ersten Ausdruck sehen wir das Ergebnis von acht Drehungen um die *x*-Achse um jeweils 45°, die dreizackigen Pyramiden werden um jeweils 90° um die *z*-Achse gedreht. Weitere Rotationen sind notwendig, dann entsteht z.B.:



Die vierseitigen Zacken wurden rot gezeichnet, die dreiseitigen blau.

Jetzt soll es an die Berechnung des Körpers gehen. Als Referenz dient eine Tabelle aus Wikipedia:

Größen eines Rhombenkuboktaeders mit Kantenlänge *a*	
Volumen ≈ 8,71 a^3	$V = \frac{2}{3}a^3\left(6+5\sqrt{2}\right)$
Oberflächeninhalt ≈ 21,46 a^2	$A_O = 2a^2\left(9+\sqrt{3}\right)$
Umkugelradius ≈ 1,4 a	$R = \frac{a}{2}\sqrt{5+2\sqrt{2}}$
Kantenkugelradius ≈ 1,31 a	$r = \frac{a}{2}\sqrt{4+2\sqrt{2}}$
Flächenwinkel (Quadrat–Quadrat) = 135°	$\cos\,\alpha_1 = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$
Flächenwinkel (Quadrat–Trigon) ≈ 144° 44′ 8″	$\cos\,\alpha_2 = -\sqrt{\frac{2}{3}}$
Eckenraumwinkel ≈ 1,108 π	$\Omega = 2\pi - \arccos\left(-\frac{2}{3}\sqrt{2}\right)$

Die Oberfläche ist einfach und das Volumen setzt man aus 18 nach innen gerichteten quadratischen und 8 ebenfalls nach innen gerichteten Pyramiden mit gleichseitigen Dreiecken als Basis zusammen. Dazu benötigt man die Pyramidenhöhen und vorerst die Seitenkanten der Pyramiden = Abstand eines Eckpunkts zum Mittelpunkt.

Für die Seitenkante *s* ergibt sich:

$$s := \frac{a\cdot\sqrt{(2\cdot\sqrt{2}+5)}}{2}$$

Damit lassen sich die Höhen berechnen …

$$\left(h4 := \sqrt{\left(\left(\frac{a\cdot\sqrt{(2\cdot\sqrt{2}+5)}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a\cdot\sqrt{2}}{2}\right)^2\right)}\right) = h4 := \frac{(\sqrt{2}+1)\cdot|a|}{2}$$

$$\left(h3 := \sqrt{\left(\left(\frac{a\cdot\sqrt{(2\cdot\sqrt{2}+5)}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a\cdot\sqrt{3}}{3}\right)^2\right)}\right) = h3 := \frac{\sqrt{3}\cdot(\sqrt{2}+3)\cdot|a|}{6}$$

… und schließlich das Volumen:

$$\frac{18\cdot a^2\cdot a\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}\right)}{3} + \frac{\frac{8\cdot a^2}{4}\cdot\sqrt{3}\cdot a\cdot\left(\frac{\sqrt{6}}{6}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{3} = \frac{2\cdot a^3\cdot(5\cdot\sqrt{2}+6)}{3}$$

Der Radius der Umkugel ist der Abstand einer Ecke zum Mittelpunkt (= Seitenkante der Innenpyramiden) und der Kantenkugelradius ist der Abstand einer Körperkante zum Mittelpunkt:

$$\left\|\left[a\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}\right), \frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right]\right\| = \frac{\sqrt{(2\cdot\sqrt{2}+5)}\cdot|a|}{2}$$

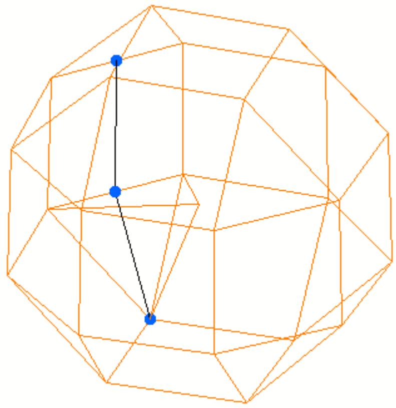
$$\left\|\left[a\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}\right), 0, \frac{a}{2}\right]\right\| = \frac{\sqrt{(2\cdot\sqrt{2}+4)}\cdot|a|}{2}$$

Der Flächenwinkel zwischen zwei benachbarten Quadraten ist der Außenwinkel eiens regelmäßigen Achtecks und für den Winkel zwischen Dreieck und Quadrat braucht man drei Punkte: die Spitze eines Dreiecks S7 und die Mitten zweier Seiten:

$$\mathrm{ARCCOS}\left(\frac{\left(s7 - \frac{p2 + p1}{2}\right)\cdot\left(\frac{q2 + q1}{2} - \frac{p2 + p1}{2}\right)}{\left|s7 - \frac{p2 + p1}{2}\right|\cdot\left|\frac{q2 + q1}{2} - \frac{p2 + p1}{2}\right|}\right)$$

$$\mathrm{ARCCOS}\left(-\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$$

$$144.7356103$$



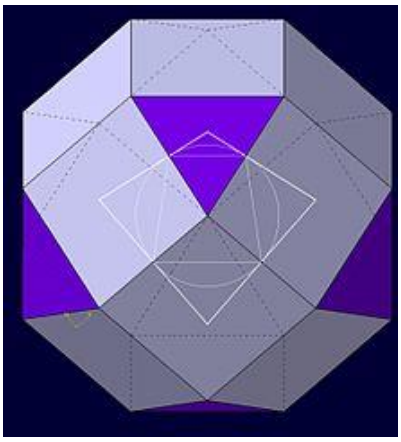
Jetzt wird es aber erst richtig spannend.

In Wikipedia und auch in Weisstein's Concise Encyclopedia habe ich den zum Rhombenkuboktaeder dualen Körper gefunden: das Deltoidalikositeraeder. Es besteht aus 24 Seitenflächen (entsprechen den 24 Ecken des RhKo.), die allesamt Deltoide mit gleichen Abmessungen sind.

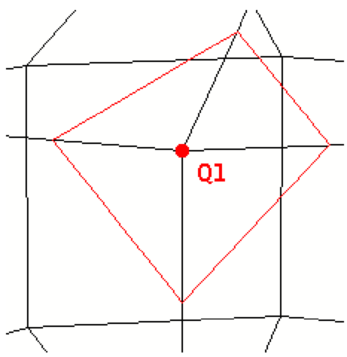
Diese Deltoide entstehen auf folgende Art und Weise: man verbindet die Mittelpunkte der vier Kanten, die in einer Ecke zusammenkommen. Das ergibt ein gleich-schenkeliges Trapez mit drei gleich langen Seiten.

Der Umkreis dieses Trapezes ist da zugleich Inkreis eines Deltoids. Alle auf diese Weise gewonnenen Deltoide bilden den gesuchten Körper.

(Siehe Grafik aus Wikipedia)



Zur Illustration wird die Ecke Q1 mit den Kanten nach P1, Q2, S2 und Q8 und die entsprechenden Seitenmitten gezeichnet. Die Seitenmitten bilden die Ecken T1 – T4 des entstandenen Trapezes.



Die Seitenlängen werden berechnet und ergeben sich mit $a\sqrt{2}/2$, $a\sqrt{2}/2$, $a\sqrt{2}/2$ und $a/2$. Dabei ist a noch immer die Kantenlänge des ursprünglichen Rhkos. Alle Zeichnungen werden mit $a = 3$ ausgeführt. Der Zusammenhang Trapez-Deltoid wird vorerst in der Ebene studiert. Die gewonnenen Maße sollen dann in die räumliche Figur übernommen werden.

Das Trapez wird für $a = 3$ in die Ebene übertragen und die Abmessungen des Deltoids werden gesucht.

T1 = rechter Basispunkt ist klar: [a√2/4]. Der rechte obere Punkt T2 wird berechnet. Seine x-Koordinate ist a/4. Daher muss man Kreis um T1 mit Radius a√2/2 mit x = a/4 schneiden.

$$\text{SOLVE}\left(x = \frac{a}{4} \wedge \left(x - \frac{a\cdot\sqrt{2}}{4}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{a\cdot\sqrt{2}}{2}\right)^2, [x, y]\right)$$

$$\left(x = \frac{a}{4} \wedge y = -\frac{a\cdot\sqrt{(2\cdot\sqrt{2} + 5)}}{4}\right) \vee \left(x = \frac{a}{4} \wedge y = \frac{a\cdot\sqrt{(2\cdot\sqrt{2} + 5)}}{4}\right)$$

Dies sind die Trapezecken mit allgemeinem a:

$$\left[t1\_ := \left[\frac{\sqrt{2}\cdot a}{4}, 0\right], t4\_ := \left[-\frac{\sqrt{2}\cdot a}{4}, 0\right], t2\_ := \left[\frac{a}{4}, \frac{a\cdot\sqrt{(2\cdot\sqrt{2} + 5)}}{4}\right], t3\_ := \left[-\frac{a}{4}, \frac{a\cdot\sqrt{(2\cdot\sqrt{2} + 5)}}{4}\right]\right]$$

Die Diagonale von rechts oben nach links unten gibt im Schnittpunkt mit der y-Achse den Diagonalenschnittpunkt DD. Er wird später gebraucht.

$$dd := \left[0, \frac{a\cdot\sqrt{(14 - 8\cdot\sqrt{2})}}{4}\right]$$

Für den Umkreis des Trapezes gelten die Formeln:

Umkreisradius: $r = \frac{1}{4A}\sqrt{(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)}$

Fläche: $A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)s-d)}$ mit $s = \frac{a+b+c+d}{2}$

Das lässt sich mit einem CAS leicht berechnen und führt zum Umkreisradius:

$$r\_ := \frac{\sqrt{(34\cdot\sqrt{2} + 204)}\cdot|a|}{34}$$

Sein Mittelpunkt ist der Schnitt einer Seitensymmetralen mit der y-Achse:

$$\left[0, \frac{a\cdot\sqrt{(136\cdot\sqrt{2} + 238)}}{68}\right]$$

Damit kann der Umkreis auch gezeichnet werden (natürlich wieder mit a = 3):

$$x^2 + \left(y - \frac{a\cdot\sqrt{(136\cdot\sqrt{2} + 238)}}{68}\right)^2 = r\_^2$$

Die Eckpunkte des Deltoids sind dann die Schnittpunkte der Tangenten an den Umkreis in den Ecken des Trapezes. Zwei dieser Tangenten seien hier angeführt:

$$\mathrm{ta1} := \frac{x \cdot a \cdot \sqrt{2}}{4} + \left(y - \frac{a \cdot \sqrt{(136 \cdot \sqrt{2} + 238)}}{68}\right) \cdot \left(0 - \frac{a \cdot \sqrt{(136 \cdot \sqrt{2} + 238)}}{68}\right) = r\_^{2}$$

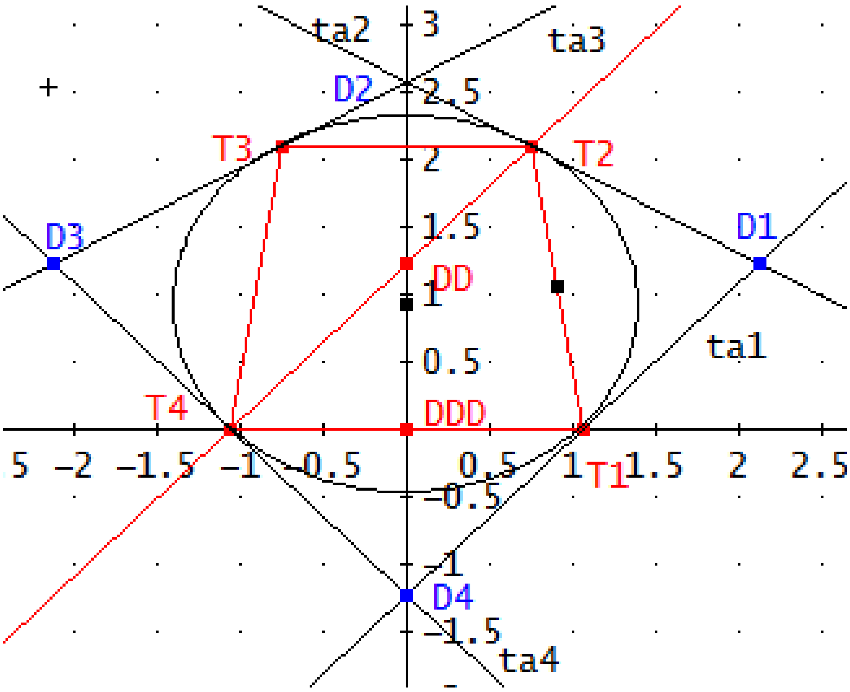
$$\mathrm{ta4} := - \frac{x \cdot a \cdot \sqrt{2}}{4} + \left(y - \frac{a \cdot \sqrt{(136 \cdot \sqrt{2} + 238)}}{68}\right) \cdot \left(0 - \frac{a \cdot \sqrt{(136 \cdot \sqrt{2} + 238)}}{68}\right) = r\_^{2}$$

Sie werden geschnitten und ergeben die Ecken des Deltoids. Hier z.B. die Ecke D4:

$$(\mathrm{SOLUTIONS}(\mathrm{ta1} \wedge \mathrm{ta4}, [x, y]))_{1} = \left[0, - \frac{a \cdot \sqrt{(14 - 8 \cdot \sqrt{2})}}{4}\right]$$

$$\mathrm{d4} := \left[0, - \frac{a \cdot \sqrt{(14 - 8 \cdot \sqrt{2})}}{4}\right]$$

Das alles kann – und soll – natürlich begleitend zur Rechnung im 2D-Fenster gezeichnet werden. Allfällige Denk- oder Rechenfehler werden sofort entdeckt und können behoben werden.



Jetzt werden die Abmessungen des Deltoids berechnet. Eine weitere Tabelle aus Wikipedia (deutsch) dient als Referenz. (Hier ist aber mit *a* die längere Seite des Deltoids gemeint.)

Man findet, dass D1, D3 und der Diagonalenschnittpunkt in der gleichen Höhe liegen.

Mit den bekannten Punkten am Deltoid können dessen Länge der Seiten und Diagonalen leicht bestimmt werden.

Die Seiten *a* und *b*, sowie die beiden Diagonalen *e* und *f:*

(Hier ist *a* immer die Kante des RhKo.)

Größen des Drachenvierecks	
Seitenverhältnis	$b = \frac{1}{7}(4+\sqrt{2})\,a$
Flächeninhalt	$A = \frac{a^2}{14}\sqrt{61+38\sqrt{2}}$
Inkreisradius	$r = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{7+4\sqrt{2}}{17}}$
1. Diagonale	$e = \frac{a}{2}\sqrt{4+2\sqrt{2}}$
2. Diagonale	$f = \frac{a}{7}\sqrt{46+15\sqrt{2}}$
Spitze Winkel (3) **≈ 81° 34′ 44″**	$\cos\,\alpha = \frac{1}{4}(2-\sqrt{2})$
Stumpfer Winkel (1) **≈ 115° 15′ 47″**	$\cos\,\beta = -\frac{1}{8}(2+\sqrt{2})$

$$(b\_d := |d2 - d1|) = b\_d := \frac{2\cdot\sqrt{(10 - \sqrt{2})}\cdot|a|}{7}$$

$$(a\_d := |d4 - d1|) = a\_d := \sqrt{(4 - 2\cdot\sqrt{2})}\cdot|a|$$

$$(e\_d := |d1 - d3|) = e\_d := \sqrt{2}\cdot|a|$$

$$(f\_d := |d2 - d4|) = f\_d := \frac{2\cdot\sqrt{(31 - 8\cdot\sqrt{2})}\cdot|a|}{7}$$

Es lässt sich leicht zeigen, dass diese Ergebnisse mit denen in der Tabelle vollständig übereinstimmen.

Die englische Wikipedia-Seite zeigt diese Tabellen nicht, sondern nur diese beiden Beziehungen der Deltoidseiten *a* und *b* zu den Längen der Diagonalen (z.B. für *a*):

nach Wikipedia: e_d = a_d/2*√(4+2√2) und f_d = a_d/7*√(46+15√2)

$$\frac{a\_d}{2}\cdot\sqrt{(4 + 2\cdot\sqrt{2})} = \sqrt{2}\cdot|a|$$

$$\frac{a\_d}{7}\cdot\sqrt{(46 + 15\cdot\sqrt{2})} = \frac{2\cdot\sqrt{(31 - 8\cdot\sqrt{2})}\cdot|a|}{7}$$

Für später braucht man die Abstände der Basismitte des Trapezes zu den Spitzen des Deltoids:

$$|d2 - dd| = \frac{\sqrt{(62 - 16\cdot\sqrt{2})}\cdot|a|}{14} \quad |d4 - dd| = \frac{\sqrt{(14 - 8\cdot\sqrt{2})}\cdot|a|}{2}$$

Es fehlt noch der Flächeninhalt des Deltoids, den man mit der klassischen Formel über die beiden Diagonalen berechnet:

$$\frac{f\_d\cdot e\_d}{2} = \frac{a^2\cdot\sqrt{(62 - 16\cdot\sqrt{2})}}{7}$$

In der Wikipedia-Tabelle wird die Fläche als Funktion der Seite dargestellt:

$$\frac{a\_d^2}{14}\cdot\sqrt{(61 + 38\cdot\sqrt{2})} = \frac{a^2\cdot\sqrt{(62 - 16\cdot\sqrt{2})}}{7}$$

Schließlich wird mit den Winkeln des Deltoids geendet:

$$\mathrm{ARCCOS}\left(\frac{(d4 - d1)\cdot(d4 - d3)}{|d4 - d1|\cdot|d4 - d3|}\right) = 81.57894188$$

$$\mathrm{ARCCOS}\left(\frac{(d2 - d1)\cdot(d2 - d3)}{|d2 - d1|\cdot|d2 - d3|}\right) = 115.2631743$$

Die Werte passen alle und jetzt müssen die Größen in den Raum übertragen und das erste Deltoid um das Trapez errichtet werden.

Wie schon oben gesagt, die Trapezecken sind die Mitten der von Q1 ausgehenden Kanten.

Sie werden mit TT1_3, TT2_3, TT3_3 und TT4_3 bezeichnet und das Trapez kann gezeichnet werden.

```
[t1_3, t2_3, t3_3, t4_3, t1_3]
```

Der Mittelpunkt der Trapezbasis DDD3 und der Diagonalenschnittpunkt DD3 im Raum werden bestimmt. DD3 als Schnittpunkt der Diagonalen (TT1_TT3_ ∩ TT2_TT4_) in Parameterdarstellung

$$ddd3 := \left[a\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}\right), \frac{a}{4}, \frac{a}{4}\right]$$

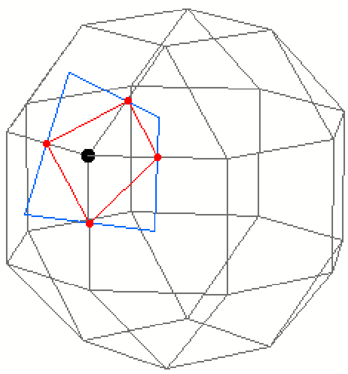
$$(dd3 := \mathrm{SUBST}(diag1\_, u, \sqrt{2} - 1)) = dd3 := \left[a, \frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right]$$

Der Abstand zwischen DD und D2 wird in den Raum auf den Diagonalen aufgetragen:

$$D2\_3 := dd3 + \frac{\frac{dd3 - ddd3}{|dd3 - ddd3|}\cdot\sqrt{(62 - 16\cdot\sqrt{2})}\cdot|a|}{14}$$

$$D2\_3 := \left[a\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{7} + \frac{4}{7}\right), a\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{7} + \frac{4}{7}\right), a\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{7} + \frac{4}{7}\right)\right]$$

Ähnlich „konstruiert man die restlichen drei Punkte und erhält das erste Deltoid (*a* = 3!). Die Figur zeigt das Ausgangstrapez mit dem daraus gewonnenen Deltoid:



Wenn das erste Deltoid zusammengesetzt ist, ist dann etwas räumliche Vorstellungskraft nützlich. Die Symmetrien der Figur werden eingesetzt und weitere Deltoide durch Drehung um die *z*-Achse erzeugt und auch gleich gezeichnet

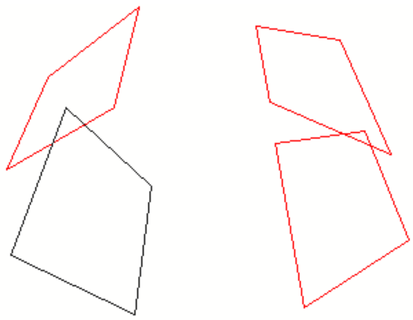
delt1 := [D1_3, D2_3, D3_3, D4_3, D1_3]

$$\text{delt1} := \begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 \\ \frac{3\cdot\sqrt{2}}{7} + \frac{12}{7} & \frac{3\cdot\sqrt{2}}{7} + \frac{12}{7} & \frac{3\cdot\sqrt{2}}{7} + \frac{12}{7} \\ 3 & 0 & 3 \\ 3\cdot\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{VECTOR}\left(\left[\text{delt1}\cdot\text{ROTATE\_Z}\left(\frac{k\cdot\pi}{2}\right)\right], k, 4\right)$$

Das rechte Bild zeigt das erste Deltoid (schwarz) mit den zusätzlich durch Rotation gewonnenen (rot).

Portionsweise können wir zusehen, wie der Körper zu seiner endgültigen Gestalt heran-wächst.

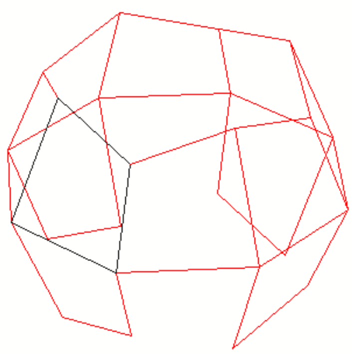


Da die Oberfläche aus zwei Scharen von unterschiedlich orientierten Deltoiden besteht, muss man jeweils Deltoide herausfinden, die rotiert, die Figur schrittweise zusammenbauen. Das ist ein wenig Tüftelei, lässt sich aber mit der simultanen Kontrolle im Zeichenfenster gut bewältige. Die zweite Familie von Deltoiden schließt den angefangenen Kranz.

$$\text{delt2} := \begin{bmatrix} 3\cdot\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 0 \\ \frac{3\cdot\sqrt{2}}{7} + \frac{12}{7} & -\left(\frac{3\cdot\sqrt{2}}{7} + \frac{12}{7}\right) & \frac{3\cdot\sqrt{2}}{7} + \frac{12}{7} \\ 3 & 0 & 3 \\ 3\cdot\sqrt{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{VECTOR}\left(\left[\text{delt2}\cdot\text{ROTATE\_Z}\left(\frac{k\cdot\pi}{2}\right)\right], k, 4\right)$$

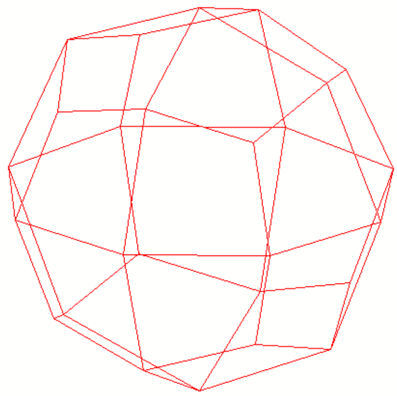
Das ist Status während des Aufbaues.



Die nächste Zeile bildet den unteren Kranz und die beiden folgenden Blöcke schließen den Polyeder oben und unten. Fertig!!

$$\left[\mathrm{VECTOR}\left(\left[\mathrm{delt3}\cdot\mathrm{ROTATE\_Z}\left(\frac{k\cdot\pi}{2}\right)\right],\ k,\ 4\right),\ \mathrm{VECTOR}\left(\left[\mathrm{delt4}\cdot\mathrm{ROTATE\_Z}\left(\frac{k\cdot\pi}{2}\right)\right],\ k,\ 4\right)\right]$$

$$\left[\left[\begin{array}{c}\mathrm{delt1}\cdot\mathrm{ROTATE\_Y}\left(\frac{\pi}{2}\right)\\ \mathrm{delt1}\cdot\mathrm{ROTATE\_Y}\left(\frac{3\cdot\pi}{2}\right)\\ \mathrm{delt2}\cdot\mathrm{ROTATE\_Y}\left(\frac{\pi}{2}\right)\\ \mathrm{delt2}\cdot\mathrm{ROTATE\_Y}\left(\frac{3\cdot\pi}{2}\right)\end{array}\right],\ \left[\begin{array}{c}\mathrm{delt3}\cdot\mathrm{ROTATE\_Y}\left(\frac{\pi}{2}\right)\\ \mathrm{delt3}\cdot\mathrm{ROTATE\_Y}\left(\frac{3\cdot\pi}{2}\right)\\ \mathrm{delt4}\cdot\mathrm{ROTATE\_Y}\left(\frac{\pi}{2}\right)\\ \mathrm{delt4}\cdot\mathrm{ROTATE\_Y}\left(\frac{3\cdot\pi}{2}\right)\end{array}\right]\right]$$



Jetzt fehlt „nur“ noch die Berechnung der Größen des Körpers – wieder mit einer Tabelle aus Wikipedia als sehr willkommene Bestätigung. Hier sind alle Größen als Funktionen der Deltoidseiten *a* und *b* ausgegeben. Ich bleibe konsequent bei der Kantenlänge *a* des ursprünglichen Rhombenkuboktaeders.

Größen eines regelmäßigen Deltoidikositetraeders mit Kantenlänge *a* bzw. *b*	
Volumen ≈ 6,9a^3 ≈ 14,91b^3	$V = \frac{2}{7}\,a^3\sqrt{292+206\sqrt{2}} = b^3\sqrt{122+71\sqrt{2}}$
Oberflächeninhalt ≈ 18,36a^2 ≈ 30,69b^2	$A_O = \frac{12}{7}\,a^2\sqrt{61+38\sqrt{2}} = 6\,b^2\sqrt{29-2\sqrt{2}}$
Inkugelradius	$\rho = a\sqrt{\frac{22+15\sqrt{2}}{34}} = \frac{b}{2}\sqrt{\frac{78+47\sqrt{2}}{17}}$
Kantenkugelradius	$r = \frac{a}{2}\,(1+\sqrt{2}) = \frac{b}{4}\,(2+3\sqrt{2})$
Flächenwinkel ≈ 138° 7′ 5″	$\cos\,\alpha = -\frac{1}{17}\,(7+4\sqrt{2})$
3D-Kantenwinkel = 135°	$\cos\,\gamma = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$

Die Berechnung der Oberfläche ist einfach. An ihr wird die Umrechnung der Formel als Funktion der Deltoidalkanten *a* (= *s_a*) und *b* (= *s_b*) demonstriert:

$$\frac{24\cdot e\_d\cdot f\_d}{2} = \frac{24\cdot a^2\cdot\sqrt{(62 - 16\cdot\sqrt{2})}}{7}$$

$$s\_a = a\_d$$

$$s\_a = \sqrt{(4 - 2\cdot\sqrt{2})}\cdot|a|$$

$$\text{SOLVE}(s\_a = \sqrt{(4 - 2\cdot\sqrt{2})}\cdot a,\ a) = \left(a = \frac{s\_a\cdot\sqrt{(\sqrt{2} + 2)}}{2}\right)$$

$$\text{SUBST}\left(\frac{24\cdot a^2\cdot\sqrt{(62 - 16\cdot\sqrt{2})}}{7},\ a,\ \frac{s\_a\cdot\sqrt{(\sqrt{2} + 2)}}{2}\right) = \frac{12\cdot s\_a^2\cdot\sqrt{(38\cdot\sqrt{2} + 61)}}{7}$$

$$b\_d = \frac{2\cdot\sqrt{(10 - \sqrt{2})}\cdot|a|}{7}$$

$$\text{SOLVE}\left(s\_b = \frac{2\cdot\sqrt{(10 - \sqrt{2})}\cdot a}{7},\ a\right) = \left(a = \frac{s\_b\cdot\sqrt{(2\cdot\sqrt{2} + 20)}}{4}\right)$$

$$\text{SUBST}\left(\frac{24\cdot a^2\cdot\sqrt{(62 - 16\cdot\sqrt{2})}}{7},\ a,\ \frac{s\_b\cdot\sqrt{(2\cdot\sqrt{2} + 20)}}{4}\right) = 6\cdot s\_b^2\cdot\sqrt{(29 - 2\cdot\sqrt{2})}$$

Die Berechnung des Volumens ist schon etwas komplizierter. Der Körper setzt sich aus 24 nach innen gerichteten Pyramiden mit flächengleichen Deltoiden als Grundfläche zusammen. Ihre Höhe ist der Abstand vom Mittelpunkt (= Ursprung) zu einer Deltoidfläche.

Das bietet eine schöne Gelegenheit der Anwendung der Vektorrechnung im R3. Man berechnet eine Flächenebene aus drei Punkten und über deren Normalvektor kommt man weiter zum Abstand.

Das CAS ist dabei eine willkommene Unterstützung. Das sind die letzten Schritte. Man sieht das Volumen als Funktion der Kantenlänge *a* und auch als Funktion der Deltoidseite *s_a*.

$$\left(hd := \frac{|n\cdot[0,\ 0,\ 0] - 1|}{|n|}\right) = hd := \frac{\sqrt{(136\cdot\sqrt{2} + 238)}\cdot|a|}{17}$$

$$\frac{\frac{24\cdot e\_d\cdot f\_d}{2}\cdot 1}{3}\cdot hd = \frac{16\cdot(2\cdot\sqrt{2} + 1)\cdot|a|^3}{7}$$

$$\text{SUBST}\left(\frac{16\cdot(2\cdot\sqrt{2} + 1)\cdot a^3}{7},\ a,\ \frac{s\_a\cdot\sqrt{(\sqrt{2} + 2)}}{2}\right) = \frac{2\cdot s\_a^3\cdot\sqrt{(206\cdot\sqrt{2} + 292)}}{7}$$

Der Radius der Inkugel stimmt mit der Höhe der Pyramiden *hd* überein.

Der Kantenkugelradius ist der Abstand einer Körperkante vom Mittelpunkt (= Ursprung).

$$\left|\frac{[D3\_3 + D2\_3]}{2}\right| = \frac{\sqrt{(2\cdot\sqrt{2} + 4)}\cdot|a|}{2}$$

$$\mathrm{SUBST}\left(\frac{\sqrt{(2\cdot\sqrt{2} + 4)}\cdot a}{2},\ a,\ \frac{s\_a\cdot\sqrt{(\sqrt{2} + 2)}}{2}\right) = s\_a\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}\right)$$

$$\mathrm{SUBST}\left(\frac{\sqrt{(2\cdot\sqrt{2} + 4)}\cdot a}{2},\ a,\ \frac{s\_b\cdot\sqrt{(2\cdot\sqrt{2} + 20)}}{4}\right) = s\_b\cdot\left(\frac{3\cdot\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{2}\right)$$

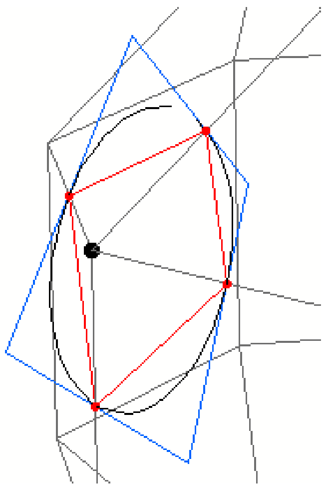
Der Flächenwinkel ist der Winkel, den die Normalvektoren zweier benachbarter Deltoide bilden. Dies ist der letzte Berechnungsschritt:

$$\mathrm{COS}(\alpha) = \frac{\left[\frac{\sqrt{2}}{6}, \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{2}}{6}, \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{2}}{6}\right]\cdot\left[\frac{\sqrt{2}}{6}, \frac{\sqrt{2}}{6} - \frac{1}{3}, \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{2}}{6}\right]}{\left\|\left[\frac{\sqrt{2}}{6}, \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{2}}{6}, \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{2}}{6}\right]\right\|\cdot\left\|\left[\frac{\sqrt{2}}{6}, \frac{\sqrt{2}}{6} - \frac{1}{3}, \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{2}}{6}\right]\right\|}$$

$$\mathrm{COS}(\alpha) = \frac{4\cdot\sqrt{2}}{17} + \frac{7}{17}$$

Wie man sieht, passt alles zusammen. Geschafft, aber ich muss zugeben, dass dieses Projekt in Summe mir doch einige Zeit und Mühe gekostet hat. Die „kleinen“ Erfolge unterwegs haben mich immer wieder zum Weitermachen ermutigt.

Und ein solches Projekt entwickelt natürlich eine gewisse Eigendynamik. So habe ich mir dann noch in den Kopf gesetzt, auch noch den Kreis (Umkreis des Trapezes = Inkreis des Deltoids) im R3 zu zeichnen. Es ist gelungen, wie das nächste Bild zeigt.



Hier ist ein Ausschnitt aus dem DERIVE-3D-Fenster und dann folgt ein Ausschnitt aus der Parameterdarstellung des Kreises:

$$\left[\frac{(\sqrt{2} - 2)\cdot\sqrt{(t\cdot(2\cdot\sqrt{2} + 5) - 6\cdot\sqrt{2} - 12)}\cdot\sqrt{(-t)}}{4} - \frac{\sqrt{2}\cdot t}{4} + \frac{3\cdot\sqrt{2}}{2} + \frac{3}{2},\right.$$

$$\left[\frac{\sqrt{2}\cdot((\sqrt{2} - 1)\cdot\sqrt{(t\cdot(2\cdot\sqrt{2} + 5) - 6\cdot\sqrt{2} - 12)}\cdot\sqrt{(-t)} - t + 3\cdot\sqrt{2} + 6)}{4}, - \frac{\sqrt{}}{}\right.$$

Man sieht jeweils nur die *x*-Koordinate der Parameterdarstellung der beiden Äste.

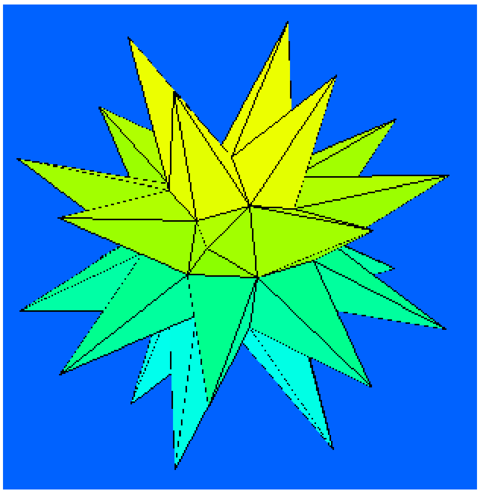
Es ist durchaus möglich, dass dies einfacher geht, aber „that's My Way".

Jetzt, da alles erledigt ist, muss auch noch die Frage nach der „Dualität" beantwortet werden. In einem Polyeder der dual zu einem anderen ist, entspricht jede Ecke des einen eine Fläche des anderen. Kanten gehen wieder in Kanten über. Wie ist das hier?

Der Rhko. hat 26 Flächen, davon sind 18 Quadrate und 8 gleichseitige Dreiecke, dem entsprechen im Deltiodal… 18 Ecken, von denen 4 gleich lange Kanten ausgehen und 8 Ecken mit drei gleich langen Kanten. Den 24 Ecken des Rhko., von denen je zwei Dreieck- und zwei Quadratseiten ausgehen, entsprechen im dualen Körper 24 Flächen (Deltoide) mit zwei paarweise gleichen kurzen und langen Seiten.

Der zum Deltoidal… duale Polyeder ist natürlich wieder das Rhombenkub… . Die Rückkonstruktion wäre ja auch ganz interessant …

PS.: Ich hätte ja noch eine Idee (siehe Eigendynamik): aus den Deltoiden könnten ja wieder Zacken wachsen – welcher Stern wird das??



Mein besonderer Dank gilt den Herren Hubert Langlotz, Frank Liebner, Sebastian Rauh und Dirk Ritschel, die mich mit einem T3-Webinar zu dieser Weiterbehandlung des Herrnhuter Sterns inspiriert haben.

Einige passende Websites:

https://de.wikipedia.org/wiki/Rhombenkuboktaeder

https://mathworld.wolfram.com/SmallRhombicuboctahedron.html

http://www.mathematische-basteleien.de/rhombenkuboktaeder.htm

https://de.wikipedia.org/wiki/Deltoidalikositetraeder

https://en.wikipedia.org/wiki/Deltoidal_icositetrahedron#Dimensions

https://mathworld.wolfram.com/DeltoidalIcositetrahedron.html

https://www.mineralienatlas.de/lexikon/index.php/Ikositetraeder

https://de.wikipedia.org/wiki/Polyeder#Dualit%C3%A4t

https://mathematikalpha.de/duale-polyeder