Ein MMS wie der TI-Nspire™ CX II-T CAS bietet vielfältige Lösungsmöglichkeiten

Ab dem Schuljahr 2029 müssen alle Abiturientinnen und Abiturienten im Abitur entweder einen wissenschaftlichen Taschenrechner oder ein modulares Mathematiksystem(MMS)[1] nutzen.
Wir stellen hier einige Aufgaben vor, die zeigen, dass man den TI-Nspire™ CX II-T CAS vielfältig nutzen kann, um eine Aufgabe graphisch, tabellarisch, mit CAS oder durch systematisches Probieren zu lösen.
Damit werden Schülerinnen und Schülern vielfältige Zugänge zum Problemlösen ermöglicht.
Aus Gründen der Übersichtlichkeit haben wir auf die Mitführung der Einheiten verzichtet.

Aufgabe 1

Nach der Reparatur einer 180 km langen Eisenbahnstrecke erreichen die Züge eine um 9 km/h höhere Durchschnittsgeschwindigkeit. Die Zeitersparnis gegenüber vorher beträgt eine Stunde.
Wie lange brauchen die Züge jetzt für diese Strecke? Wie groß sind die Durchschnittsgeschwindigkeiten vor und nach der Reparatur?

Diese Aufgabe, wie sie in vielen Mathematiklehrbüchern stehen könnte, wurde in der Zeitung „Freies Wort" Suhl im Jahr der Mathematik 2008 im Rahmen eines mathematischen Wettbewerbs in etwas abgewandelter Form gestellt. Sie ist gut geeignet, um verschiedene Lösungsvarianten zu beschreiben, die ein MMS wie der TI-Nspire™ CX II-T CAS bietet. Damit werden auch Zugänge möglich, die andere als die klassischen algebraischen Vorgehensweisen eröffnen. Wir wollen zunächst einen solchen klassischen Lösungsweg darstellen und dann auf Varianten des MMS hinweisen. Dabei sollen sich die Anwendungen des MMS zur Lösung der Aufgabe 1 zunächst auf das Wesentliche beschränken.

Lösung ohne digitale Hilfsmittel

(1) $v_1 = \frac{180}{t}$ ist die Durchschnittsgeschwindigkeit nach der Geschwindigkeitserhöhung

(2) $v_0 = \frac{180}{t+1}$ ist die Durchschnittsgeschwindigkeit vor der Geschwindigkeitserhöhung

Außerdem gilt

(3) $v_1 = v_0 + 9$.

Die Gleichungen (1) und (2) einsetzen in (3) ergibt:

$\frac{180}{t} = \frac{180}{t+1} + 9 \mid (:180)$

$\frac{1}{t} = \frac{1}{t+1} + \frac{1}{20} \mid (\cdot t \cdot (t+1) \cdot 20)$

$20 \cdot (t+1) = 20t + t \cdot (t+1)$

---

[1] MMS bestehen aus Modulen wie einem Computeralgebramodul, einem Modul zum Darstellen von Funktionsgraphen, einem dynamischen Geometriemodul, einem Modul zur Bestimmung von Werten von Wahrscheinlichkeitsverteilungen oder einem Tabellenkalkulationsmodul, die in geeigneter Weise korrespondieren.

$20t + 20 = 20t + t^2 + t$

$t^2 + t - 20 = 0$

$t_{1;2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{80}{4}} = -\frac{1}{2} \pm \frac{9}{2}$

$t_1 = 4$ und $t_2 = -5$ (entfällt, da kleiner als null)

Fahrzeit nach der Geschwindigkeitserhöhung: $t_1 = 4\,h$.

Fahrzeit vor der Geschwindigkeitserhöhung: $t_0 = 4\,h + 1\,h = 5\,h$.

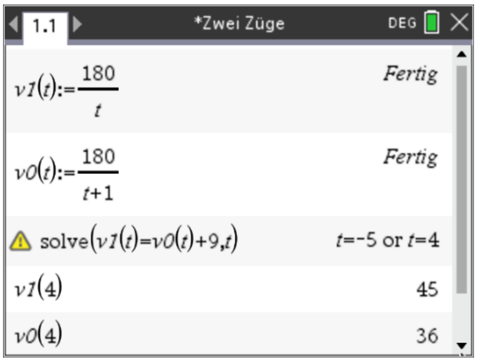
Durchschnittsgeschwindigkeit nach der Geschwindigkeitserhöhung: $v_1 = \frac{180}{4} = 45\,km/h$.

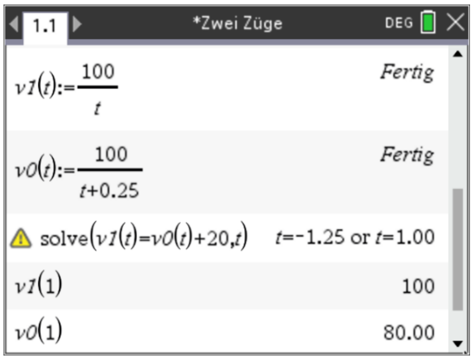
Durchschnittsgeschwindigkeit vor der Geschwindigkeitserhöhung: $v_0 = \frac{180}{5} = 36\,km/h$.

Rechnerische Lösung mit dem MMS in der Anwendung *Calculator*

Die Ansatzfindung steht im Vordergrund.
Der rechnerische Aufwand wird auf ein Minimum reduziert.
Der Ansatz lässt sich leicht auf andere Parameter (Streckenlänge, Zeitersparnis, Geschwindigkeitsdifferenz) verändern und lösen.

Als Folgeaufgabe könnte hier mehr das Interpretieren der Ansätze und Ergebnisse in den Mittelpunkt gerückt werden.
Beispiel:
Interpretiere die Rechnung auf nebenstehendem Screenshot im gegebenen Sachzusammenhang.





Graphische Näherungslösung mit dem MMS in der Anwendung *Graphs*

Die Durchschnittsgeschwindigkeit kann als Steigung der Ursprungsgeraden im Weg-Zeit-Diagramm abgelesen werden. Ändert man im Zugmodus die Lage von P auf der Geraden y = 180 km/h, so wird auch der im Abstand 1 davon befindliche Punkt Q in seiner Lage verändert. Man verschiebt P so lange auf der Parallelen, bis die Differenz der Steigungen nahe bei 9 km/h liegt.
Hier werden andere Aspekte angesprochen, z. B., dass die Steigung der Ursprungsgeraden im Weg-Zeit-

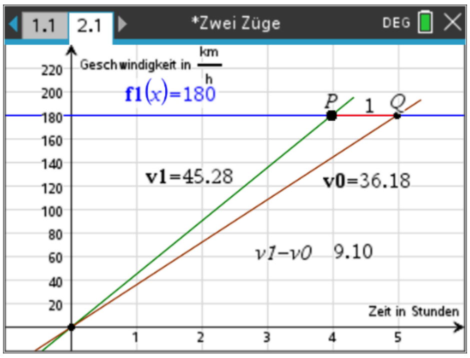
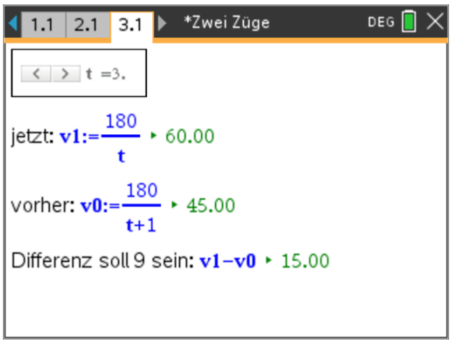


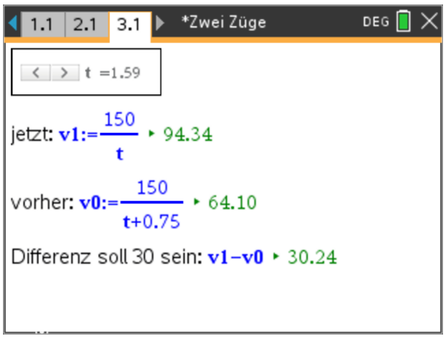
Diagramm als Durchschnittsgeschwindigkeit interpretierbar ist oder dass eine Parallele zur Zeitachse eine konstante Geschwindigkeit darstellt.
Diese Darstellungen laden zum Interpretieren ein und können zu einem besseren Verständnis des Sachverhaltes beitragen. Die Anfertigung der Darstellung auf dem Rechner, besonders dem Handheld, ist nicht einfach und etwas zeitaufwendig. Die Lehrkraft könnte das selbst übernehmen oder an interessierte Schüler delegieren, aber dann in jedem Falle mit der gesamten Klasse diskutieren.

Numerische Näherungslösung durch systematisches Probieren mit der Anwendung *Notes*

Die Eingabe kann so erfolgen, wie rechts auf dem Screenshot dargestellt.
Mit dem Schieberegler wird die Variable t (für die Zeit) so lange verändert. bis die Geschwindigkeitsdifferenz den in der Aufgabenstellung gegebenen Wert (näherungsweise) erreicht.

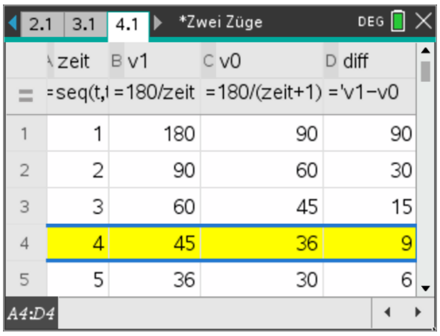
Auch in dieser Anwendung ist es leicht, die Parameter zu variieren und die zugehörigen Lösungen zu finden.
Beispiel:
Interpretiere die Rechnung auf nebenstehendem Screenshot im gegebenen Sachzusammenhang.





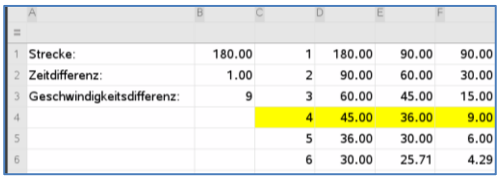
Tabellarische Näherungslösung mit dem MMS in der Anwendung *List&Spreadsheet*

Der Screenshot zeigt ein mögliches Vorgehen. Hier wurden zur Ausführung der Rechnungen ausschließlich die beiden oberen Zeilen der Spalten genutzt, um jede Liste (Spalte) durch eine Variable zu kennzeichnen und die notwendigen Rechenanweisungen festzulegen.
Das gewünschte Ergebnis ist in der gelb unterlegten Zeile zu erkennen.



	A zeit	B v1	C v0	D diff
=	=seq(t,t	=180/zeit	=180/(zeit+1)	='v1−v0
1	1	180	90	90
2	2	90	60	30
3	3	60	45	15
4	4	45	36	9
5	5	36	30	6

Möchte man die Verwendung von relativen und absoluten Zellbezügen in den Vordergrund rücken, ist auch folgendes Vorgehen denkbar:
Zelle B1: Streckenlänge in Kilometer
Zelle B2: angestrebte Zeitersparnis in Stunden
Zelle B3: Geschwindigkeitsdifferenz
Zelle C1: 1
Zelle C2:= $c1 + 1$; diesen Befehl dann nach unten kopieren



	A	B	C	D	E	F
=						
1	Strecke:	180.00	1	180.00	90.00	90.00
2	Zeitdifferenz:	1.00	2	90.00	60.00	30.00
3	Geschwindigkeitsdifferenz:	9	3	60.00	45.00	15.00
4			4	45.00	36.00	9.00
5			5	36.00	30.00	6.00
6			6	30.00	25.71	4.29

Zelle D1: $=\frac{\$b\$1}{c1}$; diesen Befehl dann nach unten kopieren

Zelle E1: $=\frac{\$b\$1}{c1+\$b\$2}$; diesen Befehl dann nach unten kopieren

Zelle F1: $=d1-e1$; diesen Befehl dann nach unten kopieren

Ändert man nun die Parameterwerte in B1, B2 oder B3, lassen sich sofort alle Tabellenwerte aktualisieren.

Auch diese Darstellungen bieten wieder viele Möglichkeiten der Differenzierung, z. B. durch Interpretation der Ergebnisse einzelner Zeilen oder Spalten.

Aufgabe 2

Zu Beginn einer 180 km langen Autobahnstrecke erhöht Autofahrer Ben seine Durchschnittsgeschwindigkeit um 30 km/h. Er würde dadurch für diese Strecke eine halbe Stunde Fahrzeit einsparen. Berechne zunächst ohne MMS und dann auf mindestens einem Weg mit dem MMS die Durchschnittsgeschwindigkeiten sowie die Fahrzeiten, die ohne bzw. mit der Geschwindigkeitserhöhung anfallen würden. Vergleiche deine Lösungswege mit denen von Mitschülern.
Ermittle, wie der Benzinverbrauch mit dieser Geschwindigkeitserhöhung ansteigt, wenn man vereinfachend davon ausgeht, dass sich der Benzinverbrauch mit dem Quadrat der Geschwindigkeit vergrößert. Das Auto von Ben hat bei 90 km/h einen Verbrauch von fünf Liter Benzin auf 100 km.

Lösung ohne digitale Hilfsmittel

(1) $v_1=\frac{180}{t}$ ist die Durchschnittsgeschwindigkeit nach der Tempoerhöhung

(2) $v_0=\frac{180}{t+0,5}$ ist die Durchschnittsgeschwindigkeit vor der Tempoerhöhung

Außerdem gilt

(3) $v_1=v_0+30$.

Die Gleichungen (1) und (2) einsetzen in (3) ergibt:

$\frac{180}{t}=\frac{180}{t+0,5}+30|$ (: 180)

$\frac{1}{t}=\frac{1}{t+0,5}+\frac{1}{6}| \ (\cdot t\cdot(t+0,5)\cdot 6)$

$6\cdot(t+0,5)=6t+t\cdot(t+0,5)$

$6t+3=6t+t^2+0,5t$

$t^2+0,5t-3=0$

$t_{1;2}=-\frac{1}{4}\pm\sqrt{\frac{1}{16}+\frac{48}{16}}=-\frac{1}{4}\pm\frac{7}{4}$

$t_1=\frac{3}{2}$ und $t_2=-2$ (entfällt, da kleiner als null)

Fahrzeit nach der Geschwindigkeitserhöhung: $t_1=1,5\ h.$

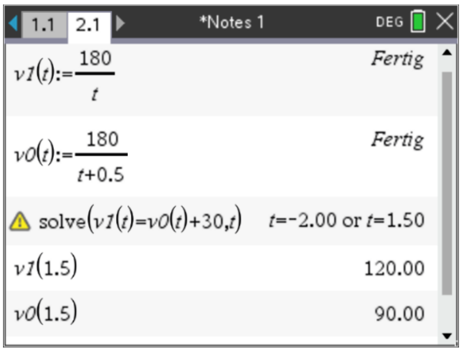
Fahrzeit vor der Geschwindigkeitserhöhung : $t_0=1,5\ h+0,5\ h=2\ h.$

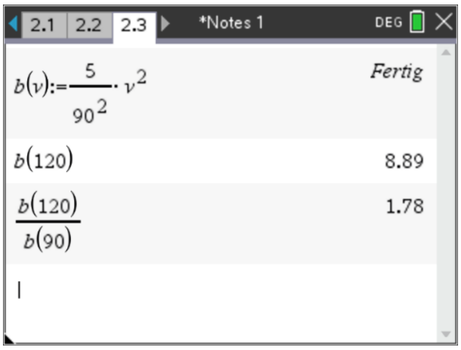
Durchschnittsgeschwindigkeit nach der Geschwindigkeitserhöhung : $v_1 = \frac{180}{1{,}5} = 120\ km/h.$

Durchschnittsgeschwindigkeit vor der Geschwindigkeitserhöhung : $v_0 = \frac{180}{2} = 90\ km/h.$

Die Geschwindigkeit ist auf $\frac{4}{3} \approx 1{,}33$ angestiegen, sie ist also um ca. 33% größer als vor der Geschwindigkeitserhöhung.
Da der Benzinverbrauch mit dem Quadrat der Geschwindigkeit steigt, müsste er durch die Geschwindigkeitserhöhung auf $\frac{16}{9} \approx 1{,}78$ gestiegen sein, also um ca. 78% höher liegen als vor der Geschwindigkeitserhöhung. Er steigt auf ca. $5 \cdot 1{,}78 = 8{,}9$ Liter auf 100 km.

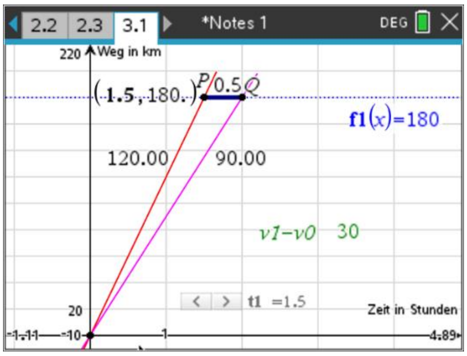
Rechnerische Lösung mit *Calculator*

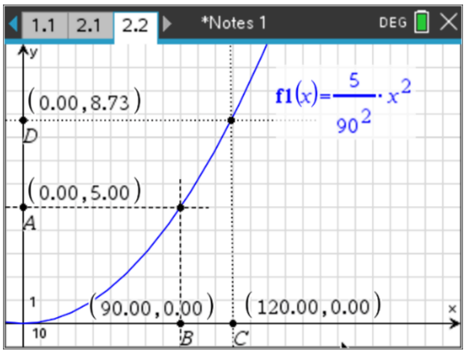




Wenn der Benzinverbrauch b mit dem Quadrat der Geschwindigkeit v ansteigt, dann könnte man schreiben: $b = k \cdot v^2$
Mit b = 5 und v = 90 ist dann $k = \frac{5}{90^2}$. Es ergibt sich $b(v) = \frac{5}{90^2} \cdot v^2$.
Auf 100 km würde das Auto nach der Tempoerhöhung ca. 8,89 Liter/100 km verbrauchen.

Graphische Näherungslösung



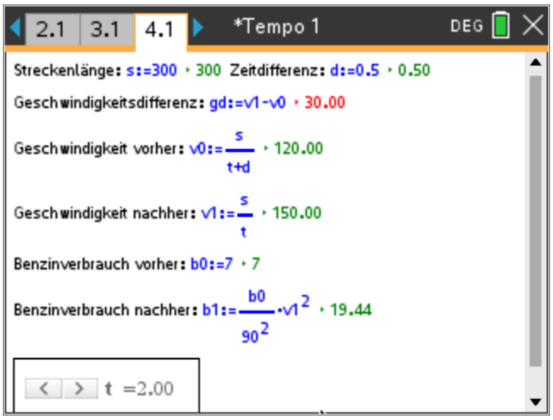


Der Graph von $b(v) = \frac{5}{90^2} \cdot v^2$ wird gezeichnet und abgelesen, wie hoch der Verbrauch für v = 120 km/h ist. Es ergibt sich b(120) = 8,73. Der Unterschied zu den vorigen Resultaten ist durch Ungenauigkeiten der graphischen Darstellung erklärbar.

Numerische Näherungslösung mit *Notes*

Um mehrere Fälle zu untersuchen, lässt sich die Rechnung in der Anwendung *Notes* auch komfortabler gestalten. Dafür werden für die Parameter Streckenlänge, Zeit- und Geschwindigkeitsdifferenz Variablen definiert. Bei einer Änderung dieser Werte bei bereits einer der Variablen wird die gesamte Rechnung aktualisiert. Die Benzinverbräuche lassen sich ebenso dynamisieren.

Das gibt wieder Spielräume zum Experimentieren und Interpretieren.



Tabellarische Lösung mit *List&Spreadsheet*

	A zeit	B vneu	C valt	D differenz	E verbrauch
=	=seq(k*0.5,k,1,5)	=180/zeit	=180/(zeit+0.5)	=vneu−valt	=5/90^2*vneu^2
1	0.50	360.00	180.00	180.00	80.00
2	1.00	180.00	120.00	60.00	20.00
3	1.50	120.00	90.00	30.00	8.89
4	2.00	90.00	72.00	18.00	5.00
5	2.50	72.00	60.00	12.00	3.20

Auch die Tabellenkalkulation lässt sich dynamisieren, wie das folgende Beispiel zeigt:

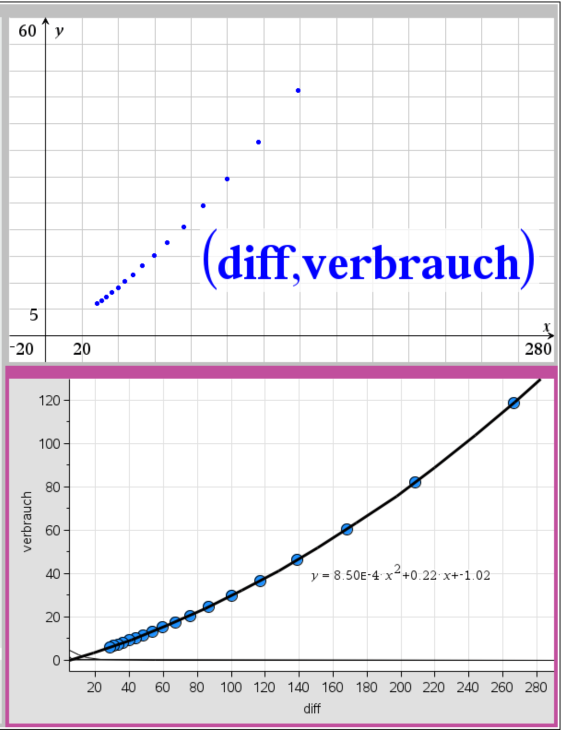
Zelle A1: Streckenlänge in Kilometer
Zelle A2: angestrebte Zeitersparnis in Stunden
Zelle A3: Benzinverbrauch in Liter/100 km
Zelle B1: 0.5
Zelle B2:$= b1 + 0.5$; diesen Befehl dann nach unten kopieren

	A	B time	C vneu	D valt	E diff	F verbrauch
=						
1	180	0.50	360.00	180.00	180.00	20.00
2	0.50	1.00	180.00	120.00	60.00	11.25
3	5	1.50	120.00	90.00	30.00	8.89
4		2.00	90.00	72.00	18.00	7.81
5		2.50	72.00	60.00	12.00	7.20

Zelle C1: $= \frac{\$a\$1}{b1}$; diesen Befehl dann nach unten kopieren
Zelle D1: $= \frac{\$a\$1}{b1+\$a\$2}$; diesen Befehl dann nach unten kopieren
Zelle E1: $= c1 - d1$; diesen Befehl dann nach unten kopieren
Zelle F1: $= \frac{\$a\$3}{90^2} \cdot c1^2$; diesen Befehl dann nach unten kopieren
Ändert man nun die Parameterwerte in A1, A2 oder A3, lassen sich sofort alle Tabellenwerte aktualisieren und graphische Zusammenhänge darstellen:

	A	B time	C vneu	D valt	E diff	F verbrauch
=						
1	200	0.50	400.00	133.33	266.67	118.52
2	1	0.60	333.33	125.00	208.33	82.30
3	6	0.70	285.71	117.65	168.07	60.47
4		0.80	250.00	111.11	138.89	46.30
5		0.90	222.22	105.26	116.96	36.58
6		1.00	200.00	100.00	100.00	29.63
7		1.10	181.82	95.24	86.58	24.49
8		1.20	166.67	90.91	75.76	20.58
9		1.30	153.85	86.96	66.89	17.53
10		1.40	142.86	83.33	59.52	15.12
11		1.50	133.33	80.00	53.33	13.17
12		1.60	125.00	76.92	48.08	11.57
13		1.70	117.65	74.07	43.57	10.25
14		1.80	111.11	71.43	39.68	9.14
15		1.90	105.26	68.97	36.30	8.21
16		2.00	100.00	66.67	33.33	7.41
17		2.10	95.24	64.52	30.72	6.72
18		2.20	90.91	62.50	28.41	6.12
19						

F1 $=\frac{\$a\$3}{90^2}\cdot c1^2$



Eine Interpretation der Darstellungen kann zu einem vertieften Verständnis der Zusammenhänge führen. Verschiedene graphische Darstellungen führen auf funktionale Zusammenhänge.

Aufgabe 3[1]

Lüneburg, Uelzen und Gifhorn liegen an der Harz-Heide-Straße. Uelzen ist 40 km von Lüneburg und 60 km von Gifhorn entfernt und liegt zwischen beiden Städten. Von Lüneburg fährt um 8.00 Uhr ein Mopedfahrer mit 35 km/h über Uelzen nach Gifhorn. Um 8.40 Uhr fährt ein Radfahrer von Uelzen mit der Geschwindigkeit 15 km/h nach Gifhorn.

a) Untersuche, wer von beiden als erster und mit welchem Zeitvorsprung in Gifhorn ankommt.
b) Wann muss der Mopedfahrer starten, wenn er den Radfahrer nach genau 60 km Fahrt einholen will, ohne seine Geschwindigkeit zu verändern? Berechne den neuen Startzeitpunkt.
c) Untersuche auch mittels Schieberegler, mit welcher Geschwindigkeit der Mopedfahrer fahren müsste, damit er den Radfahrer zu dessen Start einholen will, wenn der Mopedfahrer um 8 Uhr startet.

Aufgabenteil a: Lösung ohne digitale Hilfsmittel

Überschlag: Der Radfahrer braucht für 60 km bei einer Geschwindigkeit von 15 km/h genau vier Stunden bis Gifhorn. Er kommt dort um 12:40 Uhr an. Der Mopedfahrer fährt mit 35 km/h. Er würde in drei Stunden 105 km zurücklegen. Für 100 km braucht er deshalb etwas weniger als drei Stunden, er kommt also kurz vor 11 Uhr in Gifhorn an. Er hat einen Zeitvorsprung von knapp 2 Stunden.

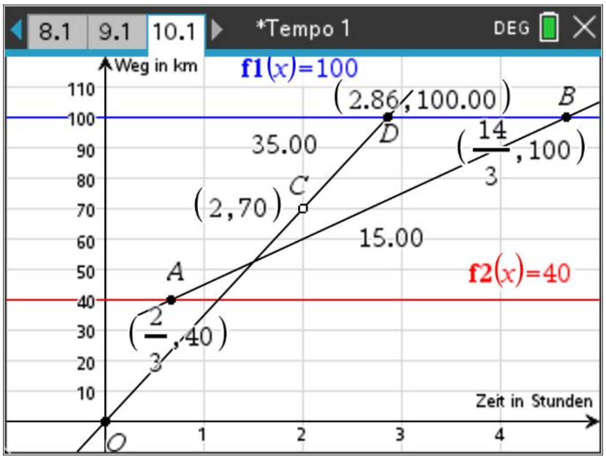
---

[1] Vgl. Calimero Band 3 S. 29

Rechnerische Lösung:
Moped: $35 = \frac{100}{t_M} \Longrightarrow t_M = \frac{20}{7} \approx 2{,}86\ h$; Ankunft also gegen 10 Uhr 52 Minuten
Fahrrad: $15 = \frac{60}{t_F} \Longrightarrow t_F = 4\ h$; Ankunft also um 12 Uhr 40 Minuten

Der Mopedfahrer kommt ca. 1 Stunde und 48 Minuten eher an.

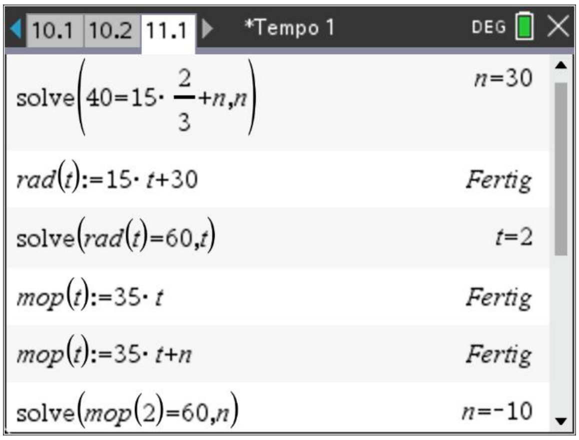
Aufgabenteil a: Graphische Näherungslösung



In ein geeignet dimensioniertes Koordinatensystem (Weg-Zeit-Diagramm) werden die Parallelen zur Zeit-Achse f1(x) = 100 km und f2(x) = 40 km eingezeichnet.
Die Durchschnittsgeschwindigkeit des Mopedfahrers kann als Anstieg der Geraden durch den Ursprung O und den Punkt C(2|70) bestimmt werden, denn in zwei Stunden legt das Moped 70 km zurück. Der Schnittpunkt D der Geraden g(OC) mit f1(x) hat die Koordinaten D(2,86|100).
Da der Radfahrer 40 Minuten (= 2/3 h) nach dem Moped startet und er vier Stunden fährt, können die Punkte $A\left(\frac{2}{3}|40\right)$ und $B\left(\frac{14}{3}|100\right)$ zum Zeichnen der zugehörigen Weg-Zeit-Funktion genutzt werden. Von den Graphen der beiden Geraden kann man sich zur Kontrolle noch die Steigungen anzeigen lassen, die den gegebenen Geschwindigkeiten entsprechen.
Die Differenz der x-Koordinaten von B und D gibt den Zeitvorsprung des Mopedfahrers an:
$\frac{14}{3} - 2{,}86 \approx 1{,}8 \approx 1\ h\ 48$ Minuten.
Hinweis: Die Weg-Zeit-Funktionen lassen sich auch auf anderem Wege bestimmen.
Moped: $s_1(t) = 15t$ und Fahrrad: $40 = 15 \cdot \frac{2}{3} + n \Longrightarrow n = 30 \Longrightarrow s_2(t) = 15t + 30$

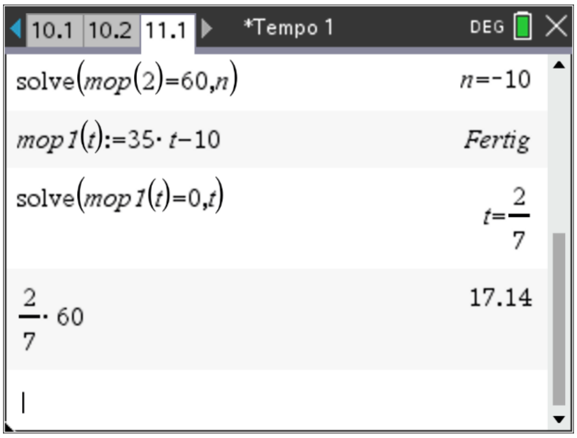
Aufgabenteil b: Graphische Näherungslösung

Der obigen Abbildung entnimmt man, dass sich die beiden Geraden unter den Bedingungen von Teilaufgabe a) bereits schneiden, wenn der Mopedfahrer mehr als 50 km, aber weniger als 60 km zurückgelegt hat. Der Mopedfahrer muss also später als 8 Uhr starten, um den Radfahrer nach 60 km Mopedfahrt einzuholen. Auf der Geraden g(AB) wird der Punkt E(2|60) markiert und eine Parallele zu g(OD) durch E gezeichnet, die die Zeitachse im Punkt F(0,29|0) schneidet. Die Zeit von 0,29 h entspricht ca. 17,4 Minuten. Der Mopedfahrer müsste also um ca. 08:17 starten.



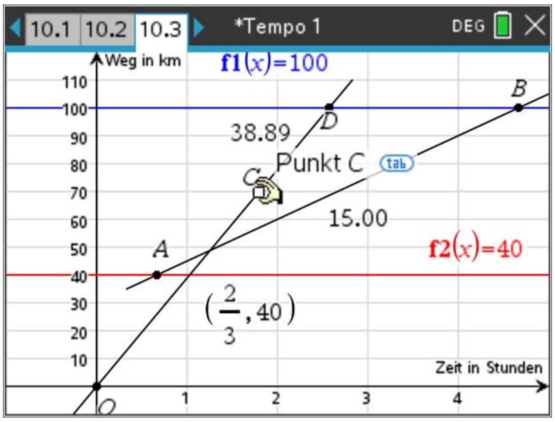
Aufgabenteil b: Rechnerische Lösung

Eine Gleichung für die Weg-Zeit-Funktion des Radfahrers kann über die bekannte Steigung von 15 km/h und seinen Startpunkt $A\left(\frac{2}{3}|40\right)$ ermittelt werden: $rad(t) = 15t + 30$
Dabei bezieht sich die Zeit t auf den Ursprung. Es wird ermittelt, wie groß t sein muss, damit rad(t) = 60 gilt. Die Lösung ist t = 2 h.
Die Geradengleichung für die Fahrt des Mopeds hat die Steigung 35 km/h, und sie muss durch den Punkt E(2|60) verlaufen. Daraus ergibt sich mop1(t)=35t – 10. Die Nullstelle dieser Funktion ist $t = \frac{2}{7} \approx 0{,}29$.
Der Mopedfahrer muss um ca. 08:17 Uhr starten.



Aufgabenteil c: Graphische Näherungslösung:

Dazu dreht man im Zugmodus die Gerade g(OD) durch „Anfassen" am Punkt C um den Ursprung, bis g(OD) durch den Punkt A geht. Die zugehörige Steigung kann man anzeigen lassen und ablesen. Die Geschwindigkeit müsste ca. 60 km/h betragen.

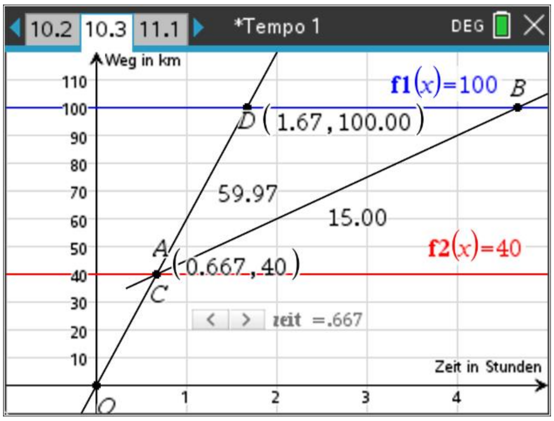


Aufgabenteil c: Rechnerische Lösung

Da die Ursprungsgerade g(OD) durch den Punkt $A\left(\frac{2}{3}|40\right)$ verlaufen soll, muss sie den Anstieg $m = \frac{40}{2/3} = 20 \cdot 3 = 60$ besitzen. Die Geschwindigkeit muss 60 km/h betragen.

Aufgabenteil c: Numerische Lösung mit Schieberegler

Um den Schieberegler zweckmäßig zu nutzen, wird der Punkt C auf f2(x) = 40 gelegt. Er hat dann die Koordinaten C(t|40). Die Variable t wird mit dem Schieberegler „Zeit" so lange verändert (mit kleiner Schrittweite), bis der Punkt C(zeit|40) bei $t = \frac{2}{3} \approx 0{,}667$ im Punkt A liegt. Die zugehörige Steigung wird abgelesen. Die Geschwindigkeit müsste ca. 60 km/h betragen.



Autoren:
Dr. Wilfried Zappe
Dr. Hubert Langlotz