CAS – Projekt T³ Österreich

T³ ÖSTERREICH

Thema: Bedingte Wahrscheinlichkeit – Satz von Bayes

Gertrud Aumayr

☒ TI-Nspire™ CAS

Schlagworte: Wahrscheinlichkeit, bedingte Wahrscheinlichkeit, Satz von Bayes, Vier-Felder-Tafel

Unterrichtsmaterial

Aufgabe:

Bei *diagnostischen Testverfahren* in der Medizin gibt die

Sensitivität die Wahrscheinlichkeit an, dass mit diesem Testverfahren eine kranke Person auch als krank erkannt wird und die
Spezifität die Wahrscheinlichkeit, dass mit diesem Testverfahren eine gesunde Person als gesund erkannt wird.

Schwangerschaft ist keine Krankheit. Da es sich aber bei einem Schwangerschaftstest aber ebenso um ein diagnostisches Testverfahren handelt, werden dieselben Bezeichnungen verwendet.
Für einen Schwangerschaftstest beträgt die Sensitivität 0.989 und die Spezifität 0.6.

a) Ca. 7 von 1000 siebzehnjährigen Frauen sind in Österreich schwanger.
   i. Eine zufällig ausgewählte Siebzehnjährige wird positiv getestet.
      Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie tatsächlich schwanger ist?
   ii. Eine zufällig ausgewählte Siebzehnjährige wird negativ getestet.
      Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie tatsächlich nicht schwanger ist?

b) Ca. 950 von 1000 siebzehnjährigen Frauen, deren Menstruation ausgeblieben ist, sind schwanger.
   i. Eine zufällig ausgewählte Siebzehnjährige, deren Menstruation ausgeblieben ist, wird positiv getestet.
      Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie tatsächlich schwanger ist?
   ii. Eine zufällig ausgewählte Siebzehnjährige, deren Menstruation ausgeblieben ist, wird negativ getestet.
      Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie tatsächlich nicht schwanger ist?

c) Vergleiche die Ergebnisse aus a) und b) und begründe, warum es sinnvoll ist, dass man sich allgemein bei medizinischen Testverfahren auf Risikogruppen beschränkt. Überlege außerdem, welche Auswirkungen es hat, wenn man bei einem medizinischen Testverfahren alle positiv getesteten Personen ein zweites Mal testet.

Weitere Begriffe im Zusammenhang mit medizinischen Diagnoseverfahren:

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass man wirklich krank ist, wenn der Test positiv ausfällt, bezeichnet man als *positiv prädiktiven Wert.*

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass man nicht krank ist, wenn der Test negativ ausfällt, bezeichnet man als *negativ prädiktiven Wert.*

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein zufällig ausgewähltes Individuum an einer bestimmten Krankheit leidet, bezeichnet man als *Prävalenz* einer Krankheit. Sie wird durch den Anteil der Kranken in einer Stichprobe geschätzt.

d) Stelle den positiv prädiktiven Wert sowie den negativ prädiktiven Wert in Abhängigkeit der Prävalenz für den oben erwähnten Schwangerschaftstest graphisch dar. Interpretiere die beiden Graphen im Sachkontext.

✂--

Vorschlag zur Umsetzung

Vorschlag A: Zunächst eine *Vier–Felder-Tafel* für die Lösung verwendet.

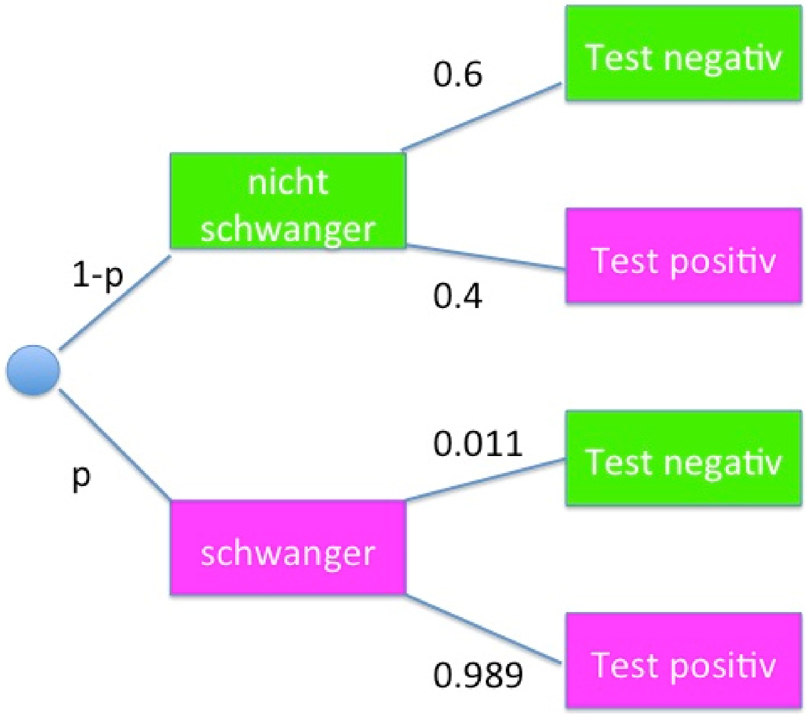
Zu a)

	A	B	C	D	E
=					
1		Test positiv	Test negativ	gesamt	
2	schwanger	6.923	0.077	7	
3	nicht schwanger	397.2	595.8	993	
4	gesamt	404.123	595.877	1000	
5					
6	schw wenn Test positiv	0.017131			
7	nicht schw wenn Test negativ	0.999871			

Zu b)

	A	B	C	D	E
=					
1		Test positiv	Test negativ	gesamt	
2	schwanger	939.55	10.45	950	
3	nicht schwanger	20.	30.	50	
4	gesamt	959.55	40.45	1000	
5					
6	schw wenn Test positiv	0.979157			
7	nicht schw wenn Test negativ	0.741656			

Zu d)



Vorschlag B: Lösung mittels des Satzes von Bayes:

Positiv prädiktiver Wert:

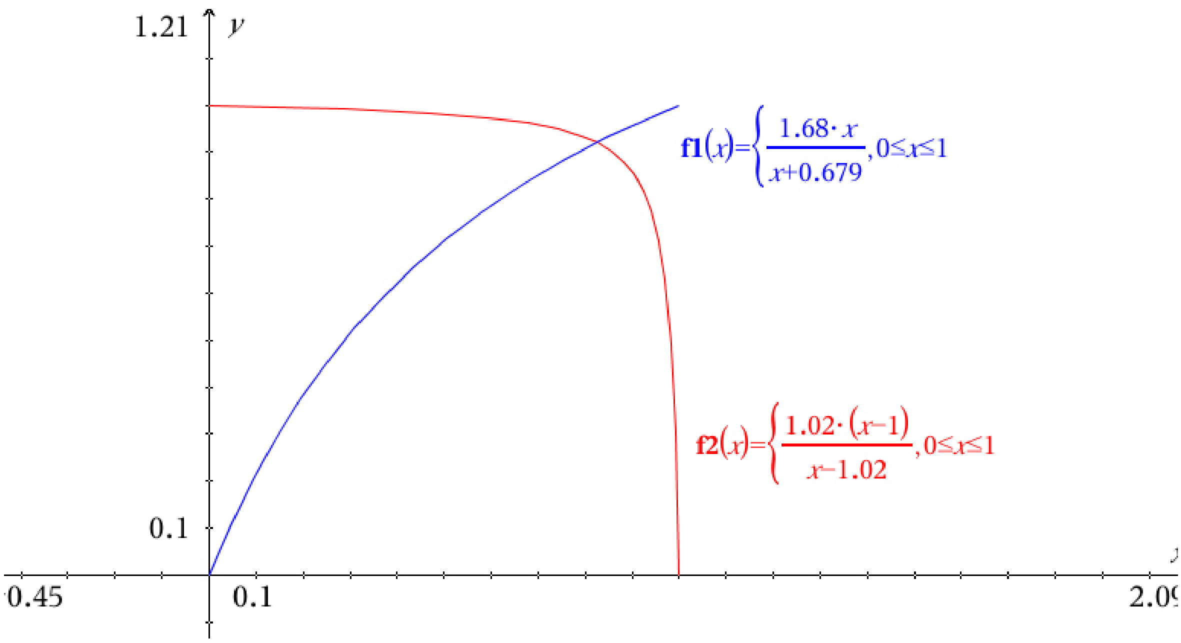
$$P(schwanger \mid Testpos) = \frac{P(Testpos \mid schwanger) \cdot P(schwanger)}{P(Testpos)} =$$

$$= \frac{0.989 \cdot p}{(1-p) \cdot 0.4 + p \cdot 0.989} = \frac{1.67912 \cdot p}{p + 0.679117}$$

Negativ prädiktiver Wert:

$$P(nichtschwanger \mid Testneg) = \frac{P(Testneg \mid nichtschwanger) \cdot P(nichtschwanger)}{P(Testneg)} =$$

$$= \frac{0.6 \cdot (1-p)}{(1-p) \cdot 0.6 + p \cdot 0.011} = \frac{1.01868 \cdot (p-1)}{p - 1.01868}$$



Didaktischer Kommentar

Verwendet man die übersichtliche Vier–Felder–Tafel, dann sind viele Aufgaben mit der bedingten Wahrscheinlichkeit relativ einfach (ohne Satz von Bayes) bewältigbar.

Deshalb wird zunächst die Vier–Felder–Tafel in der Applikation *Lists & Spreadsheet* nachgebaut. Danach bietet sich sowohl die Verwendung eines Baumdiagramms als auch der Satz von Bayes an.

Ad d:
Nachdem die in d geforderten Zusammenhänge mit Hilfe des Satzes von Bayes hergestellt wurden, können diese im Graphikfenster gezeichnet werden.
Interessant ist, dass der positiv prädiktive Wert (die Wahrscheinlichkeit schwanger zu sein, wenn der Test positiv ist) erst für p gegen 1 hoch ist. Der negativ prädiktive Wert (nicht schwanger zu sein, wenn der Test negativ ist) hingegen ist fast im gesamten Intervall in der Nähe von 1.

Technologiehilfe

Führt man die Berechnungen in der Vier–Felder–Tafel in der Tabellenkalkulation aus, indem man Gegebenes einfügt und den Rest mit Zellenbezügen berechnet, kann man für b) in der Problemübersicht das gesamte erste Problem kopieren und im Anschluss nur die Angaben ändern. Die Berechnungen werden dann automatisch ausgeführt.

Im beigelegten File wird bei den Berechnungen in der Vier–Felder–Tafel die Sensitivität und Spezifität in einem Notes Fenster allgemein eingegeben, sodass diese leicht verändert werden kann.
Es bietet sich daher folgende **Zusatzaufgabe** an:
Ein neuer Test verspricht bei gleiche Sensitivität 0.989 eine Spezifität von 0.9. Welche Auswirkungen ergeben sich?