Ein Näherungsverfahren für lineare 2x2-Gleichungssysteme mit dem TI-30X Prio MathPrint™

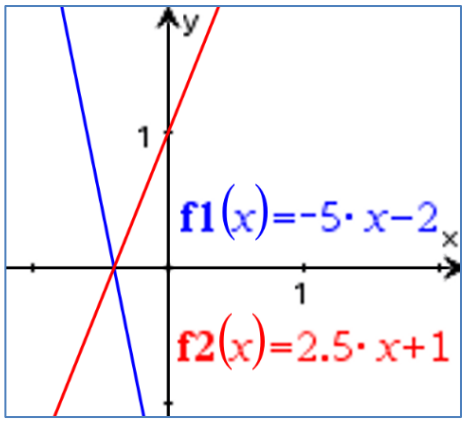
Neben den im Schulunterricht thematisierten rechnerischen und zeichnerischen Lösungsverfahren für 2x2-Gleichungssysteme lassen sich auch Näherungsverfahren verwenden, die z. B. mit dem Taschenrechner TI-30X Prio MathPrint™ rasch realisiert werden können. Hier sollen zunächst an einem Beispiel rechnerische und zeichnerische Verfahren wiederholt werden. Daran anknüpfend wird auf ein solches Näherungsverfahren eingegangen.

Beispiel 1: $:\begin{bmatrix} -5x-y & = & 2 \\ -5x+2y & = & 2 \end{bmatrix}$

Das **Additionsverfahren** bietet sich an. Die zweite Gleichung wird mit -1 multipliziert und zur ersten Gleichung addiert. Es ergibt sich $-3y = 0$, also $y = 0$. Dies in die erste Gleichung eingesetzt, führt auf $-5x - 0 = 2$, also $x = -0{,}4$. Das Zahlenpaar $(-0{,}4; 0)$ beschreibt die Lösungsmenge des Gleichungssystems.

Für die grafische Veranschaulichung durch lineare Funktionen werden beide Gleichungen nach y umgestellt:

$$-5x - y = 2 \rightarrow y = -5x - 2$$
$$-5x + 2y = 2 \rightarrow y = 2{,}5x + 1$$



Beide zu diesen Funktionen gehörenden Geraden haben verschiedene Anstiege. Die Geraden schneiden einander in genau einem Punkt $S(-0{,}4|0)$.

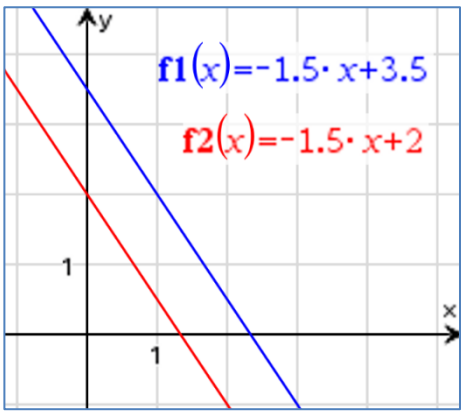
Beispiel 2: $\begin{bmatrix} 3x+2y & = & 7 \\ 3x+2y & = & 4 \end{bmatrix}$

Mit dem **Gleichsetzungsverfahren** lässt sich argumentieren. Da die linken Seiten gleich sind, lassen sich auch die rechten Seiten vergleichen:
Die Gleichung $7 = 4$ ist eine falsche Aussage, also hat dieses Gleichungssystem keine reelle Lösung.

Für die grafische Veranschaulichung durch lineare Funktionen werden beide Gleichungen nach y umgestellt:

$$3x + 2y = 7 \rightarrow y = -1{,}5x + 3{,}5$$
$$3x + 2y = 4 \rightarrow y = -1{,}5x + 2$$

Beide zu diesen Funktionen gehörenden Geraden haben den gleichen Anstieg, aber verschiedene Schnittpunkte mit der y-Achse. Die Geraden sind parallel und schneiden einander nicht.



© T3 Deutschland 2026

Übersicht zum Näherungsverfahren mit dem TI-30X Prio MathPrint™

- Gegeben sei ein Gleichungssystem mit zwei linearen Gleichungen für zwei Variable x und y. (Anders lautende Variable können in x und y umbenannt werden.)
- Jede der gegebenen Gleichungen wird nach y umgestellt. Man erhält zwei lineare Funktionen $y = f_1(x)$ und $y = f_2(x)$.
- Anstiege und Absolutglieder von f_1 und f_2 hinsichtlich der Lösungsvielfalt interpretieren.
- Unter [table] wird eingegeben $f(x) = f_1(x)$ und die Differenzfunktion $g(x) = f(x) - f_2(x)$.
- Die Funktionen f(x) und g(x) werden tabelliert.
- Es gibt drei Möglichkeiten der Interpretation der Tabellenwerte:
  (1) Wenn das Gleichungssystem genau eine Lösung hat, dann gilt:
  Der x-Wert, der zu g(x) = 0 gehört, ist Lösung für x.
  Der zugehörige Funktionswert von **f(x)** ist der Wert für y.
  Falls die Nullstelle von g(x) nicht direkt angezeigt wird, gilt:
  In dem Intervall, in dem die Funktionswerte der Differenzfunktion g(x) das Vorzeichen wechseln, liegt die Nullstelle von g(x). Dieses Intervall kann ggf. durch immer kleinere Schrittweiten fortlaufend verfeinert werden, bis eine Lösung mit gewünschter Genauigkeit erreicht ist.
  (2) Wenn die Differenzfunktion g(x) immer den gleichen Wert ungleich Null anzeigt, dann sind die zugehörigen Geraden parallel und es gibt keine reelle Lösung.
  (3) Wenn die Differenzfunktion g(x) stets den Wert Null anzeigt, dann sind die zugehörigen Geraden identisch und es gibt unendlich viele reelle Lösungen.

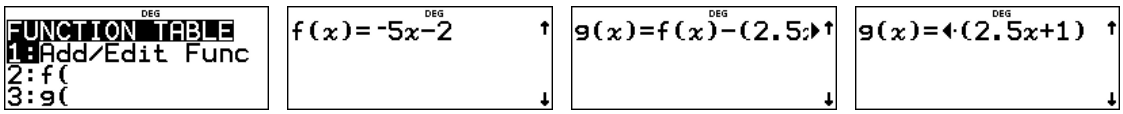
Das Näherungsverfahren wird an beiden Beispielen demonstriert

Beispiel 1: $\begin{bmatrix} -5x - y & = & 2 \\ -5x + 2y & = & 2 \end{bmatrix}$

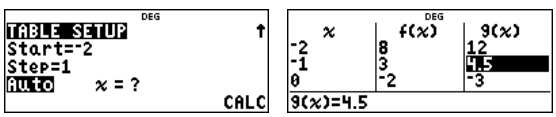
Beide Gleichungen werden nach y umgestellt:

$$-5x - y = 2 \rightarrow y = f_1(x) = -5x - 2$$
$$-5x + 2y = 2 \rightarrow y = f_2(x) = 2{,}5x + 1$$

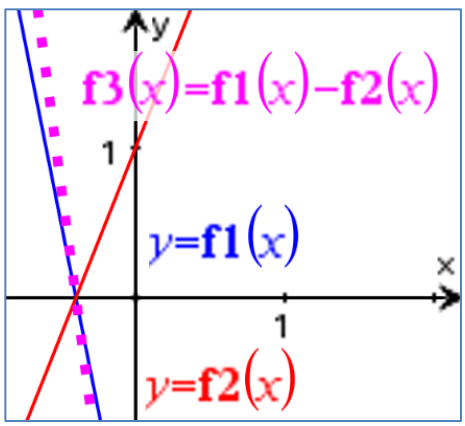
Interpretation: Die Anstiege sind verschieden, es gibt genau eine Lösung.
Eingabe der beiden Funktionen $f(x) = f_1(x)$ und $g(x) = f(x) - f_2(x)$:



Tabellieren von Funktionswerten:

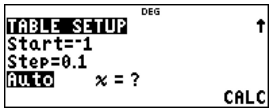


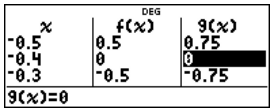
Im Intervall $[-1; 0]$ wechseln die Funktionswerte von g(x) das Vorzeichen von Plus nach Minus, also muss in diesem Intervall die Nullstelle der Differenzfunktion g(x) liegen. Ein Blick auf die Graphen erklärt diese Tatsache: Links vom Schnittpunkt liegt der Graph der Funktion $f_1(x)$ über dem von $f_2(x)$, also ist die Differenz



$g(x) = f(x) - f_2(x)$ positiv. Rechts vom Schnittpunkt liegt der Graph von $f_2(x)$ über dem von $f_1(x)$, also ist die Differenzfunktion dann negativ.
Durch Verkleinern der Schrittweite wird das Intervall, in dem die Nullstelle von g(x) liegt, verfeinert.

Mit clear geht es zurück ins TABLE SETUP. Als Startwert wird $x = -1$ gewählt und als Schrittweite 0,1. Dann wird wieder tabelliert.

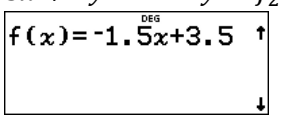


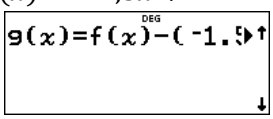


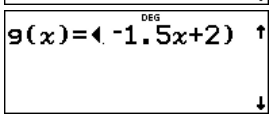
Man erkennt: Für $x = -0{,}4$ ist die Differenzfunktion $g(-0{,}4) = 0$.
Es gilt $f_1(x) = f(x) = 0$.
Das Zahlenpaar $(0{,}4; 0)$ ist die Lösungsmenge des gegebenen Gleichungssystems.

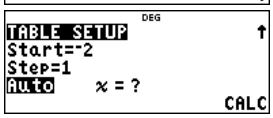
Beispiel 2: $\begin{bmatrix} 3x + 2y & = & 7 \\ 3x + 2y & = & 4 \end{bmatrix}$

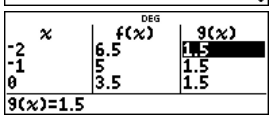
Interpretation: Eigentlich muss man hier gar nicht weitermachen, denn man „sieht“ an den gleichen linken und den voneinander verschiedenen rechten Seiten der beiden Gleichungen, dass die zugehörigen Geraden parallel zueinander sind.
Der Vollständigkeit halber wird hier aber kurz die weitere Abfolge erläutert.
Die Erläuterungen können kürzer ausfallen, denn das Vorgehen gleicht dem in Beispiel 1.
Beide Gleichungen werden nach y umgestellt:
$3x + 2y = 7 \rightarrow y = f_1(x) = -1{,}5x + 3{,}5$
$3x + 2y = 4 \rightarrow y = f_2(x) = -1{,}5x + 2$

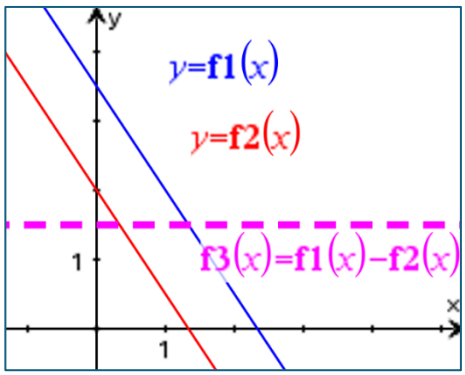












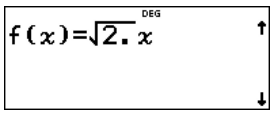
Der Abstand der beiden Geraden in y-Richtung ist stets 1,5, also sind die Geraden parallel zueinander, es gibt keine reellen Lösungen.

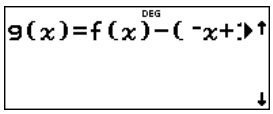
Beispiel 3:
In diesem Beispiel soll vor allem die wegen des irrationalen Koeffizienten $\sqrt{2}$ notwendige fortgesetzte Intervallverfeinerung betrachtet werden, die theoretisch unendlich oft fortgeführt werden könnte. Sie ist aber einerseits durch die technischen Möglichkeiten des Taschenrechners und andererseits durch die Vorgabe, das Ergebnis auf Hundertstel gerundet anzugeben, begrenzt.

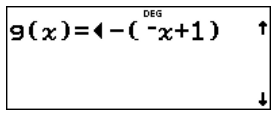
$\begin{bmatrix} \sqrt{2}a & = & b \\ a + b & = & 1 \end{bmatrix}$

Das Näherungsverfahren

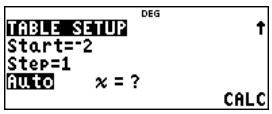
Technikbedingt müssen die Variablen umbenannt werden ($a \to x; b \to y$).
Beide Gleichungen in die Form $y = m \cdot x + n$ bringen:
$y = f_1(x) = \sqrt{2} \cdot x$ $y = f_2(x) = -x + 1$
Interpretation: Die Anstiege und die Absolutglieder sind verschieden, es gibt genau eine Lösung.
Eingabe der beiden Funktionen $f(x) = f_1(x)$ und $g(x) = f(x) - f_2(x)$.
Statt $\sqrt{2}$ wird $\sqrt{2.}$ eingegeben, damit die Tabellenwerte als Dezimalzahlen angezeigt werden.

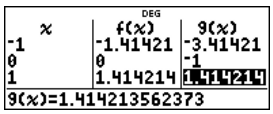






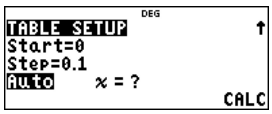
Tabellieren von Funktionswerten:

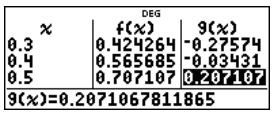




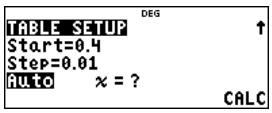
Im Intervall $[0; 1]$ wechseln die Funktionswerte von g(x) das Vorzeichen von Minus nach Plus, also muss in diesem Intervall die Nullstelle der Differenzfunktion g(x) liegen.

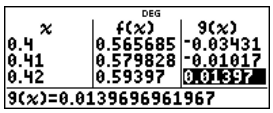
Mit clear geht es zurück ins TABLE SETUP. Als Startwert wird $x = 0$ gewählt und als Schrittweite 0,1. Dann wird wieder tabelliert.



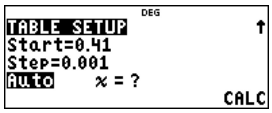


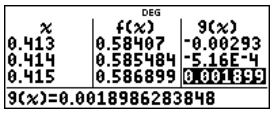
Im Intervall $[0{,}4; 0{,}5]$ wechseln die Funktionswerte von g(x) das Vorzeichen von Minus nach Plus, also muss in diesem Intervall die Nullstelle der Differenzfunktion g(x) liegen.
Mit clear geht es zurück ins TABLE SETUP. Als Startwert wird $x = 0{,}4$ gewählt und als Schrittweite 0,01. Dann wird wieder tabelliert.





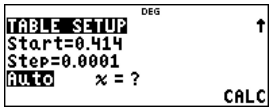
Im Intervall $[0{,}41; 0{,}42]$ wechseln die Funktionswerte von g(x) das Vorzeichen von Minus nach Plus, also muss in diesem Intervall die Nullstelle der Differenzfunktion g(x) liegen.
Mit clear geht es zurück ins TABLE SETUP. Als Startwert wird $x = 0{,}41$ gewählt und als Schrittweite 0,001. Dann wird wieder tabelliert.

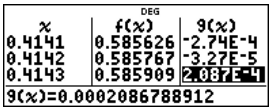




Im Intervall $[0{,}414; 0{,}415]$ wechseln die Funktionswerte von g(x) das Vorzeichen von Minus nach Plus, also muss in diesem Intervall die Nullstelle der Differenzfunktion g(x) liegen.
Mit clear geht es zurück ins TABLE SETUP. Als Startwert wird $x = 0{,}414$ gewählt und als Schrittweite 0,0001. Dann wird wieder tabelliert.

© T3 Deutschland 2026





Im Intervall $[0{,}4142;\, 0{,}4143]$ wechseln die Funktionswerte von g(x) das Vorzeichen von Minus nach Plus, also muss in diesem Intervall die Nullstelle der Differenzfunktion g(x) liegen. Jetzt kann man die Ergebnisse auf Hundertstel runden. Es gilt $x \approx 0{,}41$ und $y \approx 0{,}59$. (Ablesen in der Spalte von f(x)).

Probe mit dem Einsetzungsverfahren

Wir führen die rechnerische Probe mit dem Einsetzungsverfahren durch.
Ein Vertauschen der Variablen ist jetzt nicht notwendig.

$$\begin{bmatrix} (1) & \sqrt{2}a & = & b \\ (2) & a+b & = & 1 \end{bmatrix}$$

Gleichung (1) wird in Gleichung (2) eingesetzt:

$a + \sqrt{2} \cdot a = 1$ | Ausklammern

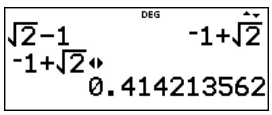
$a \cdot \left(1 + \sqrt{2}\right) = 1$ | Dividieren

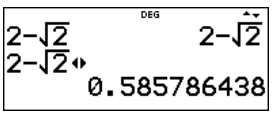
$a = \frac{1}{1+\sqrt{2}}$ | Rationalmachen des Nennes

$a = \frac{1}{1+\sqrt{2}} \cdot \frac{1-\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}$ | Vereinfachen mit $(x-y) \cdot (x+y) = x^2 - y^2$

$a = \frac{1-\sqrt{2}}{1^2-\sqrt{2}^2} = \frac{1-\sqrt{2}}{1-2} = \frac{1-\sqrt{2}}{-1} = \sqrt{2} - 1 \approx 0{,}41$

$b = \sqrt{2} \cdot a = \sqrt{2} \cdot \left(\sqrt{2} - 1\right) = 2 - \sqrt{2} \approx 0{,}59$





Das rechnerische Ergebnis stimmt überein mit dem Näherungsergebnis.
Die Lösungsmenge ist das Zahlenpaar $(a; b) = \left(\sqrt{2} - 1;\, 2 - \sqrt{2}\right) \approx (0{,}41;\, 0{,}59)$.

© T3 Deutschland 2026

Übung

a) Prüfen Sie, ob die in der Abbildung gezeigte Rechnung zur Lösung des Gleichungssystems richtig wiedergegeben ist.

b) Beurteilen Sie, ob die angegebenen Zwischenschritte zu einer korrekten Näherungslösung führen.

$y = f_1(x) = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}$ $\qquad$ $y = f_2(x) = 7 - 2x$

x	f(x)	g(x)
2	0	-3
3	1⁄3	-2⁄3
4	2⁄3	5⁄3

x=4

x	f(x)	g(x)
3.1	0.366667	-0.43333
3.2	0.4	-0.2
3.3	0.433333	0.033333

x=3.3

x	f(x)	g(x)
3.27	0.423333	-0.03667
3.28	0.426667	-0.01333
3.29	0.43	0.01

x=3.29

$x \approx 3{,}3; y \approx 0{,}4$

Bildhinweise

- Die grafischen Darstellungen der Gleichungssysteme wurden mit der Software der TI-Nspire CX Technologie erstellt.
- Die Abbildung in der Übung wurde mit Copilot von Microsoft erstellt.

Autor:
Dr. Wilfried Zappe

© T3 Deutschland 2026