# CAS-Aufgaben für das Fach Mathematik

## Gemeinsame Abituraufgabenpools der Länder (Jhg. 2021)

Hubert Langlotz
Wilfried Zappe

T³ DEUTSCHLAND

Teachers Teaching with Technology™

Autoren:
Hubert Langlotz, Wilfried Zappe

# CAS-Aufgaben für das Fach Mathematik

Die schriftliche Abiturprüfung im Fach Mathematik wird in zwei Teilen durchgeführt.

Im Prüfungsteil A ist eine Verwendung von Hilfsmitteln nicht vorgesehen, im Prüfungsteil B dürfen Hilfsmittel verwendet werden. Beide Prüfungsteile enthalten Aufgaben zu jedem der Sachgebiete Analysis, Analytische Geometrie/Lineare Algebra und Stochastik.

Der Prüfungsteil A besteht aus mehreren kurzen, nicht zusammenhängenden Aufgaben. Für den Prüfungsteil B sind umfangreichere Aufgaben vorgesehen, für deren Bearbeitung u. a. als digitales Hilfsmittel ein Computeralgebrasystem (CAS) vorgesehen ist.

Grundlegendes Anforderungsniveau

Die insgesamt zu erreichenden 100 Bewertungseinheiten verteilen sich folgendermaßen auf die beiden Prüfungsteile und die drei Sachgebiete:

| Sachgebiet | Prüfungsteil A (ohne Hilfsmittel) | Prüfungsteil B (mit Hilfsmitteln) |
|---|---|---|
| Analysis | 25 | 35 |
| Stochastik | | 20 |
| Analytische Geometrie/ Lineare Algebra | | 20 |

Für den Prüfungsteil A ist eine Arbeitszeit von insgesamt 60 Minuten, für den Prüfungsteil B von insgesamt 165 Minuten vorgesehen.

Erhöhtes Anforderungsniveau

Die insgesamt zu erreichenden 120 Bewertungseinheiten verteilen sich folgendermaßen auf die beiden Prüfungsteile und die drei Sachgebiete:

| Sachgebiet | Prüfungsteil A (ohne Hilfsmittel) | Prüfungsteil B (mit Hilfsmitteln) |
|---|---|---|
| Analysis | 30 | 40 |
| Stochastik | | 25 |
| Analytische Geometrie/ Lineare Algebra | | 25 |

Für den Prüfungsteil A ist eine Arbeitszeit von insgesamt 70 Minuten, für den Prüfungsteil B von insgesamt 200 Minuten vorgesehen.

Für jedes Prüfungsjahr stellt das IQB den Ländern in Abituraufgabenpools für die Fächer Deutsch, Englisch, Französisch und Mathematik Aufgaben für den Einsatz in der Abiturprüfung zur Verfügung. Veröffentlicht werden nur diejenigen Aufgaben der Pools, die von den Ländern entnommen wurden. Die Veröffentlichung der Aufgaben erfolgt ausschließlich online. Die Aufgaben können hier aus urheberrechtlichen Gründen nicht abgedruckt werden.

Die Aufgaben für die Jahre 2017 - 2021 finden Sie auf den Seiten des IQB bzw. für das Jahr 2021 direkt über den Link in der entsprechenden Fußnote der Lösungen in diesem Heft.
In der Vereinbarung der Länder wird die Funktionalität des zugelassenen CAS beschrieben:

Es wird vorausgesetzt, dass das CAS über Funktionen u. a. verfügt eigens zum

- Lösen von Gleichungen und Gleichungssystemen (jeweils algebraisch),
- Differenzieren und Integrieren (jeweils algebraisch),
- Rechnen mit Vektoren und Matrizen (jeweils algebraisch),
- Berechnen von einzelnen und kumulierten Werten der Binomialverteilung sowie von Werten der Normalverteilung,
- Durchführen von Berechnungen in Tabellen,
- Darstellen von Graphen.

Außerdem wird vorausgesetzt, dass das CAS vor seiner Verwendung in einen Zustand versetzt wird, in dem ein Zugriff auf Dateien und Programme, die nicht zum Lieferumfang oder zu einem Systemupdate gehören, unterbunden ist. Hier bietet sich z. B. der Press-To-Test-Modus an.[1] Erwähnenswert ist außerdem, dass in Zukunft statt des Begriffs CAS der Begriff MMS genutzt werden soll. MMS steht für modulares Mathematiksystem.[2]

Diese Regelungen gelten bis zum **Abiturjahrgang 2028**.

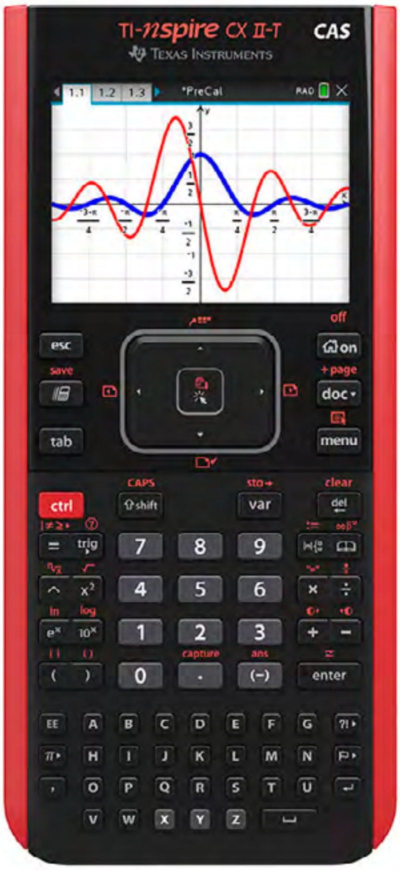
Ab dem **Abiturjahrgang 2029** gelten neue Regelungen.[3]

---

[1] https://www.youtube.com/watch?v=PYm5jDoDE8Y

[2] Gängige MMS bestehen aus Modulen wie einem Computeralgebramodul, einem Modul zum Darstellen von Funktionsgraphen, einem dynamischen Geometriemodul, einem Modul zur Bestimmung von Werten von Wahrscheinlichkeitsverteilungen oder einem Tabellenkalkulationsmodul.

[3] https://www.iqb.hu-berlin.de/abitur/abitur/dokumente/mathematik/M_Hinweise_zur_V.pdf



Der CAS-Taschenrechner

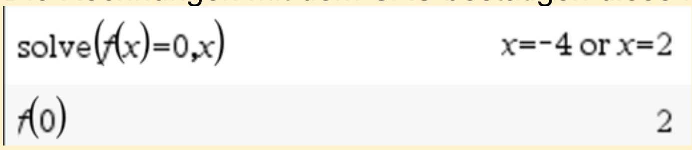
**TI-Nspire™ CX II-T CAS**

erfüllt alle diese Bedingungen.

In den folgenden Lösungen der Musteraufgaben für den Prüfungsteil B ist angegeben, wie die verschiedenen Funktionalitäten des TI-Nspire CX II-T CAS genutzt werden können.

# Analysis - Grundlegendes Anforderungsniveau

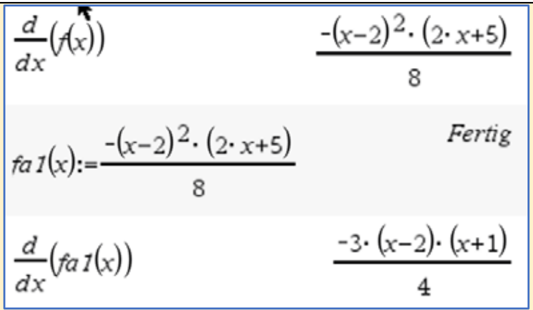
**Analysis - (grundlegendes Anforderungsniveau)**[4]

| | |
|---|---|
| **1** | |
| **a**<br>(2 BE) | |
| **Lösung** | Da der Funktionsterm aus einem Produkt von Linearfaktoren besteht, kann man die Schnittpunkte des Graphen mit den Koordinatenachsen händisch berechnen: Die Schnittpunkte mit der x-Achse ermittelt man aus $2+\frac{x}{2}=0$ und $1-\frac{x}{2}=0$<br>mit (-4\| 0) bzw. (2\| 0). Den Schnittpunkt mit der y-Achse erhält man mit f(0)=2.<br>Die Rechnungen mit dem CAS bestätigen diese Fakten:<br><br>solve(f(x)=0,x) x=-4 or x=2<br>f(0) 2 |

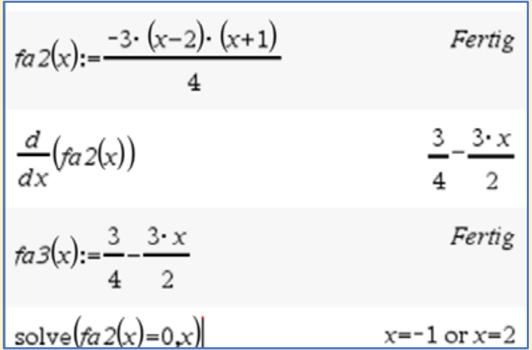
| | |
|---|---|
| **b**<br>(3 BE) | |
| **Lösung** | Da die Funktion f eine ganzrationale Funktion ist und sich zwischen den beiden Nullstellen $x_1$ = -4 und $x_2$ = 2 der Schnittpunkt mit der y-Achse mit einem positiven Funktionswert befindet, muss der Graph von f im Intervall [-4; 2] mindestens einen Hochpunkt besitzen. |
| **c**<br>(3 BE) | |
| **Lösung** | Die notwendige Bedingung für einen Wendepunkt ist mit der Existenz von Nullstellen der 2. Ableitungsfunktion f“(x) erfüllt.<br>Es gilt $f''(x)=\frac{-3\cdot(x-2)\cdot(x+1)}{4}$ und $f'''(x)=\frac{3}{4}-\frac{3x}{2}$.<br>Die Nullstellen von f“(x) sind $x_1=2$ und $x_2=-1$.<br>Ein hinreichendes Kriterium ist erfüllt, wenn f“‘($x_2$) $\neq 0$ gilt.<br>Dies ist mit f“‘($x_2$) $=\frac{9}{4}$ erfüllt. |

---

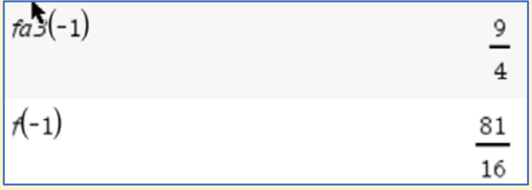
[4] https://www.iqb.hu-berlin.de/abitur/pools2021/abitur/pools2021/mathematik/grundlegend/2021_M_grundlege_17.pdf



| | |
|---|---|
| $\frac{d}{dx}(f(x))$ | $\frac{-(x-2)^2\cdot(2\cdot x+5)}{8}$ |
| $fa1(x):=\frac{-(x-2)^2\cdot(2\cdot x+5)}{8}$ | *Fertig* |
| $\frac{d}{dx}(fa1(x))$ | $\frac{-3\cdot(x-2)\cdot(x+1)}{4}$ |



| | |
|---|---|
| $fa2(x):=\frac{-3\cdot(x-2)\cdot(x+1)}{4}$ | *Fertig* |
| $\frac{d}{dx}(fa2(x))$ | $\frac{3}{4}-\frac{3\cdot x}{2}$ |
| $fa3(x):=\frac{3}{4}-\frac{3\cdot x}{2}$ | *Fertig* |
| $\text{solve}(fa2(x)=0,x)$ | $x=-1$ or $x=2$ |

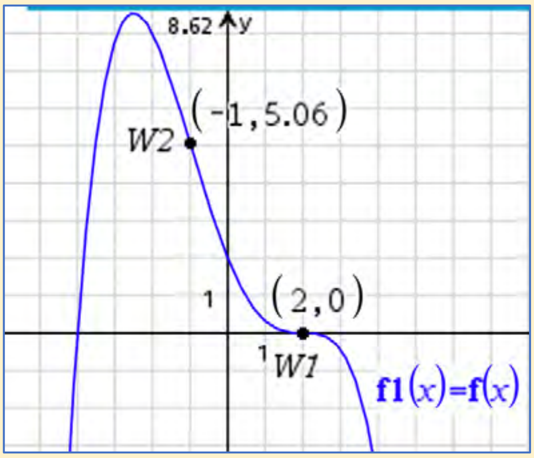


| | |
|---|---|
| $fa3(-1)$ | $\frac{9}{4}$ |
| $f(-1)$ | $\frac{81}{16}$ |

Damit ist gezeigt, dass $W_2\left(-1 \middle| \frac{81}{16}\right)$ ein zweiter Wendepunkt des Graphen von f ist.
Da die notwendige Bedingung f‘‘(x) = 0 nur für zwei Werte erfüllt ist, können keine weiteren Wendepunkte existieren.

**Hinweis:**

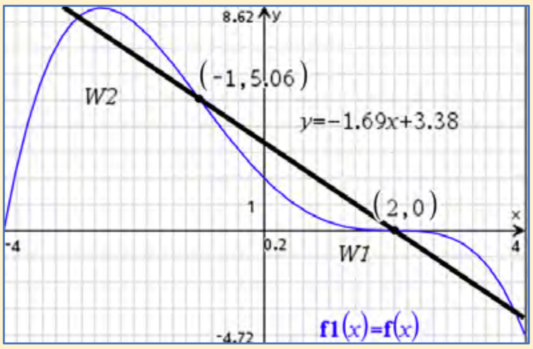
Zur Kontrolle der Ergebnisse bietet sich z. B. die Darstellung des Graphen der Funktion f und die Ermittlung der Wendepunkte mit der Anweisung *Graph analysieren* an:



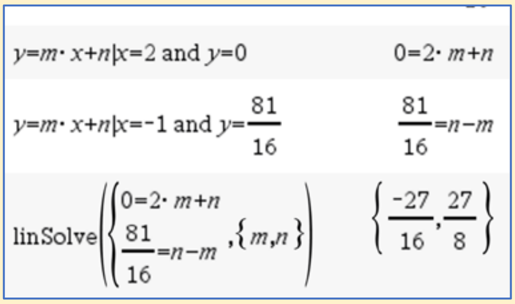
**d**
(4 BE)

**Lösung**

Die Darstellung mit dem CAS liefert das folgende Bild, welches dann auf Papier übertragen werden muss.



Gleichzeitig kann man sich zur Kontrolle die Gleichung der Geraden näherungsweise ausgeben lassen, man erhält y = -1,69x + 3,38.
Die Gleichung der Geraden erhält man z. B., indem man in die allgemeine Gleichung einer Geraden mit y = mx + n für x und y die jeweiligen Koordinaten der beiden Wendepunkte einsetzt und das sich hieraus ergebende lineare Gleichungssystem nach m und n löst.

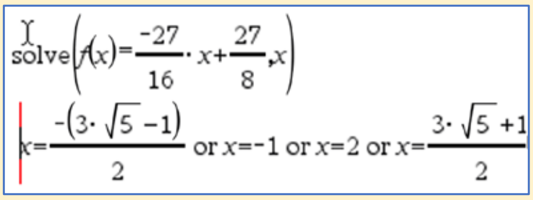
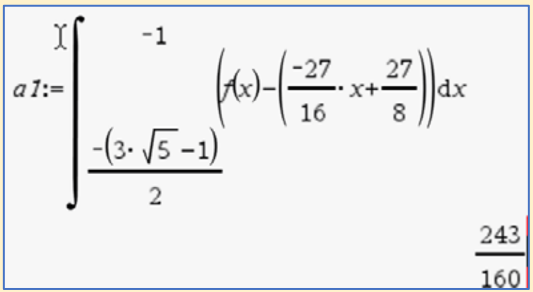
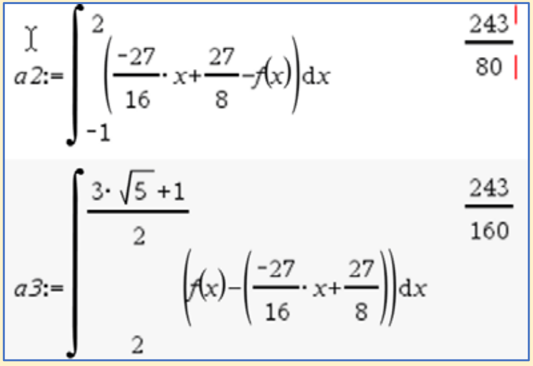
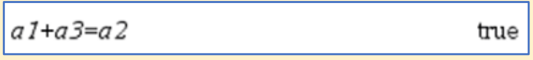


$y=m\cdot x+n|x=2 \text{ and } y=0$ → $0=2\cdot m+n$

$y=m\cdot x+n|x=-1 \text{ and } y=\frac{81}{16}$ → $\frac{81}{16}=n-m$

$\text{linSolve}\left(\begin{cases}0=2\cdot m+n\\ \frac{81}{16}=n-m\end{cases},\{m,n\}\right)$ → $\left\{\frac{-27}{16},\frac{27}{8}\right\}$

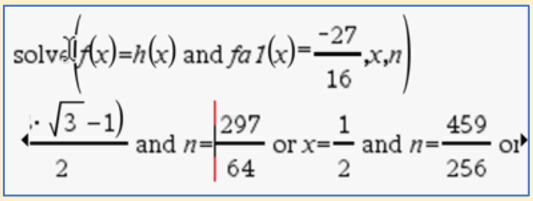
Damit ergibt sich die nachzuweisende Gleichung $y = -\frac{27}{16}x + \frac{27}{8}$.

| **e**<br>(4 BE) | |
|---|---|
| **Lösung** | Aus der Darstellung in Aufgabenteil d) erkennt man, dass anscheinend der Inhalt des mittleren Flächenstücks am größten ist, also die Summe der beiden äußeren zu bestimmen ist. Dazu benötigt man zunächst noch die Schnittpunkte der Geraden g mit dem Graphen von f.<br><br>$\text{solve}\left(f(x)=\frac{-27}{16}\cdot x+\frac{27}{8},x\right)$<br>$x=\frac{-(3\cdot\sqrt{5}-1)}{2}$ or $x=-1$ or $x=2$ or $x=\frac{3\cdot\sqrt{5}+1}{2}$<br>Man erhält die beiden weiteren Schnittstellen $x_1=\frac{-(3\cdot\sqrt{5}-1)}{2}$ bzw. $x_2=\frac{3\cdot\sqrt{5}+1}{2}$.<br>Die Bestimmung der drei zu betrachtenden Flächeninhalte erfolgt mittels der Berechnung der entsprechenden bestimmten Integrale.<br><br>$a1:=\int_{\frac{-(3\cdot\sqrt{5}-1)}{2}}^{-1}\left(f(x)-\left(\frac{-27}{16}\cdot x+\frac{27}{8}\right)\right)dx$ $\frac{243}{160}$<br><br>$a2:=\int_{-1}^{2}\left(\frac{-27}{16}\cdot x+\frac{27}{8}-f(x)\right)dx$ $\frac{243}{80}$<br>$a3:=\int_{2}^{\frac{3\cdot\sqrt{5}+1}{2}}\left(f(x)-\left(\frac{-27}{16}\cdot x+\frac{27}{8}\right)\right)dx$ $\frac{243}{160}$<br>Damit ist gezeigt, dass der mittlere Flächeninhalt im Intervall [-1\| 2] doppelt so groß ist wie die Summe der beiden anderen Flächeninhalte.<br><br>$a1+a3=a2$ true |

**f**
(3 BE)

**Lösung**

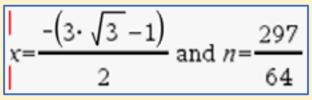
Damit sich eine Gerade h(x) = $-\frac{27}{16}x + n$, die parallel zu g ist, und der Graph f berühren, muss für eine Stelle $x_b$ gelten, dass $f(x_b) = h(x_b)$ und gleichzeitig $f'(x_b) = h'(x_b)$ gilt.
Um diese Stellen und den Parameter n zu finden, löst man das lineare Gleichungssystem
I f(x) = h(x)
II f'(x) = $-\frac{27}{16}$
nach den Variablen x und n.



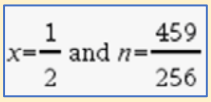
$\text{solve}\left(f(x)=h(x) \text{ and } fa1(x)=\frac{-27}{16},x,n\right)$

$\frac{\cdot\left(\sqrt{3}-1\right)}{2} \text{ and } n=\frac{297}{64} \text{ or } x=\frac{1}{2} \text{ and } n=\frac{459}{256} \text{ or}$

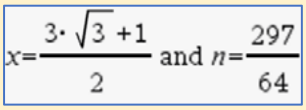
Das CAS liefert drei Lösungen:

1. 

$x=\frac{-\left(3\cdot\sqrt{3}-1\right)}{2} \text{ and } n=\frac{297}{64}$

2. 

$x=\frac{1}{2} \text{ and } n=\frac{459}{256}$

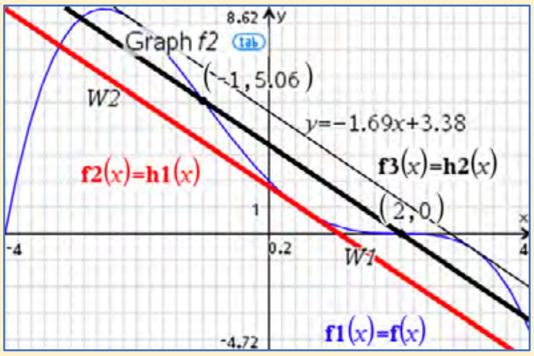
3. 

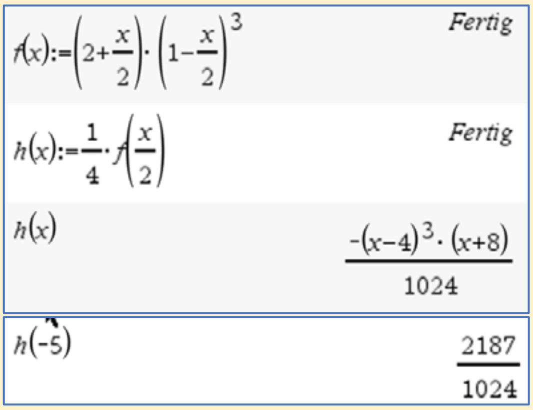
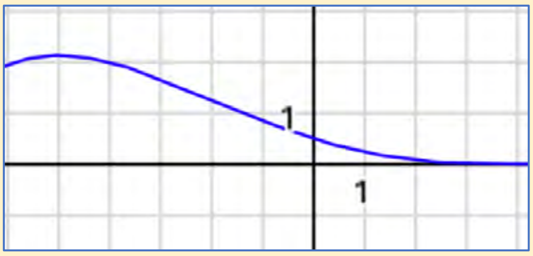
$x=\frac{3\cdot\sqrt{3}+1}{2} \text{ and } n=\frac{297}{64}$

Allerdings ergeben die erste und die dritte Lösung die gleiche Gerade. Demzufolge gibt es genau zwei weitere Geraden, die parallel zu g sind und f berühren. Die eine Gerade berührt den Graphen von f an der Stelle $x = \frac{1}{2}$.
Die andere Gerade hat mit dem Graphen von f die beiden Berührstellen $x = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} \cdot \sqrt{3}$ bzw. $x = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \cdot \sqrt{3}$ gemeinsam.

**Hinweis:**

Eine Kontrolle im Grafikfenster ist auch hier möglich.

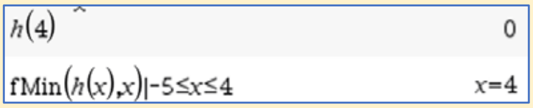


| **2** | |
|---|---|
| **a**<br>(2 BE) | |
| **Lösung** | Damit im Weiteren mit der Funktion $h(x) = \frac{1}{4} \cdot f\left(\frac{x}{2}\right)$ gearbeitet werden kann, wird diese zunächst definiert.<br><br>$f(x):=\left(2+\frac{x}{2}\right)\cdot\left(1-\frac{x}{2}\right)^3$ Fertig<br>$h(x):=\frac{1}{4}\cdot f\left(\frac{x}{2}\right)$ Fertig<br>$h(x)$ $\frac{-(x-4)^3\cdot(x+8)}{1024}$<br>$h(-5)$ $\frac{2187}{1024}$<br>Der Funktionswert für den Hochpunkt beträgt y = h(-5) = $\frac{2187}{1024}$.<br>Die Darstellung muss wieder entsprechend auf Papier übertragen werden.<br> |
| **b**<br>(2 BE) | |
| **Lösung** | Der Graph von h kann aus dem Graphen von f durch eine Streckung mit dem Faktor 2 in x-Richtung und eine Streckung mit dem Faktor $\frac{1}{4}$ in y-Richtung (entspricht einer Stauchung mit dem Faktor 4) erzeugt werden. |

**c**
(4 BE)

**Lösung**

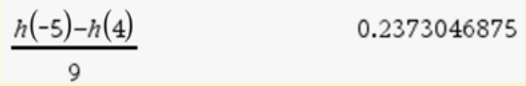
Der Hochpunkt im gegebenen Intervall hat den y-Wert y = $\frac{2187}{1024} \approx 2{,}136$.
Der tiefste Punkt befindet sich an der Stelle x = 4 mit y = 0, was man aus der Grafik vermuten kann, aber überprüfen sollte.



$h(4)$ 0

$\text{fMin}(h(x),x)|-5\leq x\leq 4$ $x=4$

Damit ergibt sich bei Beachtung des Maßstabes als Höhendifferenz (h(-5) - h(4))$\cdot$ $100 \approx 214\,m$.
Das durchschnittliche Gefälle in Prozent ermittelt man mit $\frac{h(-5)-h(4)}{9} \approx 24\%$.

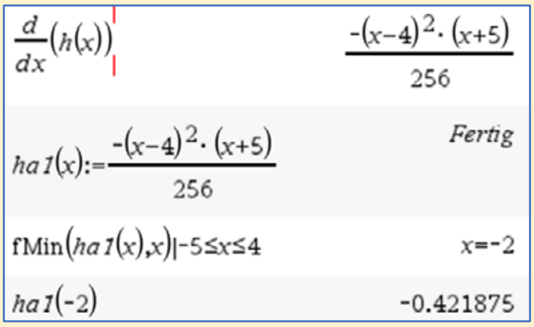


$\frac{h(-5)-h(4)}{9}$ 0.2373046875

**d**
(3 BE)

**Lösung**

Es wird das maximale Gefälle gesucht, dazu benötigt man den minimalen Wert der 1. Ableitung der Funktion h. Wir können diesen Wert direkt mit Hilfe des Befehls *fMin* bestimmen.



$\frac{d}{dx}(h(x))$ $\frac{-(x-4)^2\cdot(x+5)}{256}$

$ha1(x):=\frac{-(x-4)^2\cdot(x+5)}{256}$ Fertig

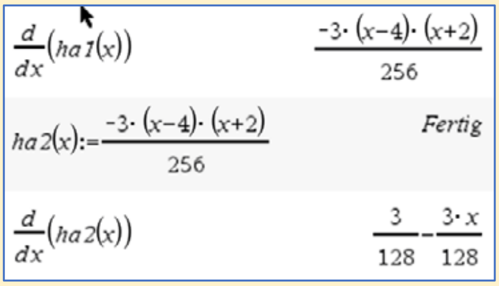
$\text{fMin}(ha1(x),x)|-5\leq x\leq 4$ $x=-2$

$ha1(-2)$ -0.421875

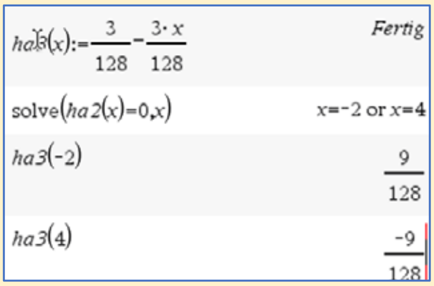
Die Ableitungsfunktion h'(x)= $\frac{-(x-4)^2\cdot(x+5)}{256}$ hat im Intervall [-5| 4] das Minimum an der Stelle x = -2.
Mit h'(-2)≈$-0{,}42$ ist das Gefälle größer als 40%, damit handelt es sich um eine schwere Piste.

**Hinweis:**

Eine Ermittlung des Minimums der 1. Ableitung ist auch mit Hilfe des bekannten Vorgehens mit notwendiger und hinreichender Bedingung möglich.



```
d/dx(ha1(x))                         -3·(x-4)·(x+2)/256
ha2(x):=-3·(x-4)·(x+2)/256           Fertig
d/dx(ha2(x))                         3/128-3·x/128
```



```
ha3(x):=3/128-3·x/128                Fertig
solve(ha2(x)=0,x)                    x=-2 or x=4
ha3(-2)                              9/128
ha3(4)                               -9/128
```

Notwendige Bedingung für Extremstellen: h‘‘(x) = 0

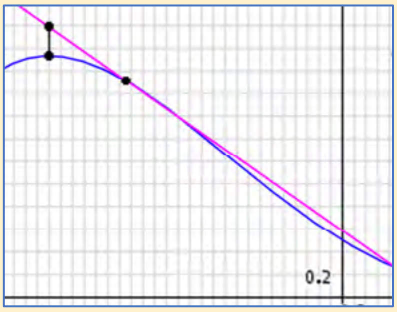
Hinreichende Bedingung: h‘‘‘(x) $\neq 0$

Auch hiermit findet man das maximale Gefälle an der Stelle x = -2.

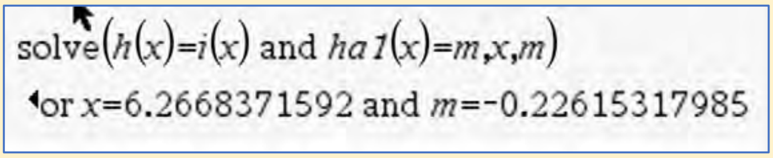
e
(5BE)

**Lösung**

Es wird eine Gerade i gesucht, die h(x) im Intervall [-5| 4] berührt. Von der Geraden kennt man nur einen Punkt P(-5|h(-5)+0,25).
Es gilt h(-5)+0,25)≈ $2{,}39$.

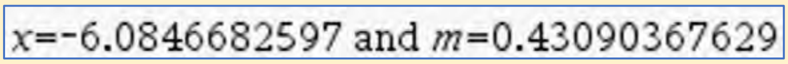
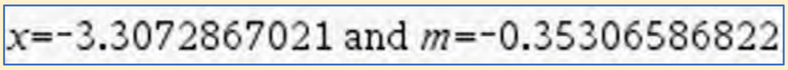
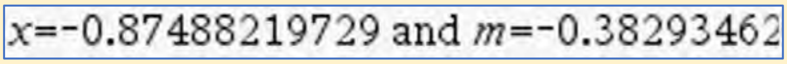
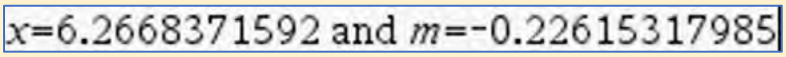


Hiermit kann man eine Geradengleichung für i in Abhängigkeit vom Parameter m bestimmen:
Aus der allgemeinen Geradengleichung y = mx + n folgt
2,39 = m· $(-5) + n$.
Es ergibt sich n = 5m + 2,39.
Damit lautet die Gleichung i(x) = mx + 5m – 2,39.
Damit sich h und i berühren, muss für eine Stelle $x_b$ gelten, dass h($x_b$) = i($x_b$) und gleichzeitig h‘($x_b$) = i‘($x_b$) gilt.
Um diese Stellen und den Parameter n zu finden, löst man das lineare Gleichungssystem
I h(x) = i(x)
II h‘(x) = $m$
nach den Variablen x und m.
.



```
solve(h(x)=i(x) and ha1(x)=m,x,m)
◂or x=6.2668371592 and m=-0.22615317985
```

Die Lösungen des linearen Gleichungssystems sind:

1. 
$x$=-6.0846682597 and $m$=0.43090367629
2. 
$x$=-3.3072867021 and $m$=-0.35306586822
3. 
$x$=-0.87488219729 and $m$=-0.38293462
4. 
$x$=6.2668371592 and $m$=-0.22615317985

Die erste und vierte Lösung entfallen, da diese nicht im betrachteten Intervall liegen.
Der Funktionswert für die zweite Lösung ist größer als für die dritte, demzufolge ergibt sich für den gesuchten Bereich $-5 \leq x \leq -3{,}31$.

**Hinweis:**

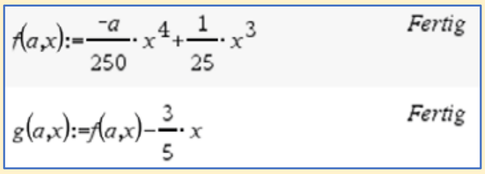
Der Term für die Funktion i lässt sich auch mittels der Gleichung i(x) = $m \cdot (x+5) + h(-5) + 0{,}25$ bestimmen.

# Analysis - erhöhtes Anforderungsniveau

### Analysis - (erhöhtes Anforderungsniveau)[5]

<table>
<tr><td><b>1</b></td><td></td></tr>
<tr><td><b>a</b><br>(6 BE)</td><td></td></tr>
<tr><td><b>Lösung</b></td><td>

Definieren der beiden Funktionen im CAS-Rechner:



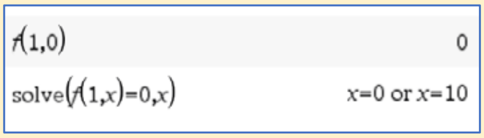
$f(a,x):=\frac{-a}{250}\cdot x^4+\frac{1}{25}\cdot x^3$ Fertig

$g(a,x):=f(a,x)-\frac{3}{5}\cdot x$ Fertig

Koordinaten der Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen für $f_1$:

Der Schnittpunkt mit der y-Achse ergibt sich für x = 0 aus $f_1(0) = 0$ zu $S_Y(0|0)$.

Die Schnittpunkte mit der x-Achse ergeben sich aus $f_1(x) = 0$ zu $S_{X1}(0|0)$ und $S_{X2}(10|0)$.



$f(1,0)$ 0

$\text{solve}(f(1,x)=0,x)$ $x=0$ or $x=10$

Für die Koordinaten möglicher Extrempunkte werden die 1. und 2. Ableitung von $f_1$ benötigt.

$\frac{d}{dx}(f(1,x))$ $\frac{3\cdot x^2}{25}-\frac{2\cdot x^3}{125}$

$\frac{d^2}{dx^2}(f(1,x))$ $\frac{6\cdot x}{25}-\frac{6\cdot x^2}{125}$

$f_1'(x) = \frac{3}{25}x^2 - \frac{2}{125}x^3$

$f_1''(x) = \frac{6}{25}x - \frac{6}{125}x^2$

Notwendige Bedingung für lokale Extrema:

$f_1'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{25}x^2 - \frac{2}{125}x^3 = 0$

$\Leftrightarrow x_{e1} = 0;\ x_{e2} = \frac{15}{2}$

</td></tr>
</table>

---

[5] https://www.iqb.hu-berlin.de/abitur/pools2021/abitur/pools2021/mathematik/erhoeht/2021_M_erhoeht_B_4.pdf

Hinreichende Bedingung für lokale Extrema:

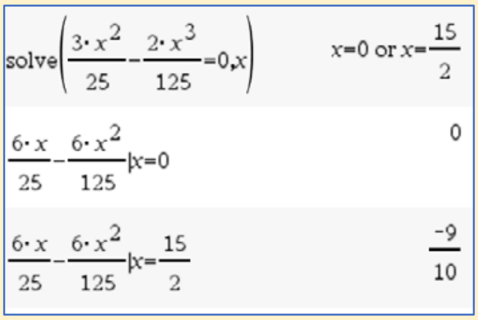
$f_1''(0) = 0$

Keine Entscheidung möglich, deshalb wird die 3. Ableitung untersucht.

$f_1'''(0) = \frac{6}{25} \neq 0$, d. h. der Punkt (0|0) ist ein Sattelpunkt des Graphen von $f_1$.

$f_1''\left(\frac{15}{2}\right) =-\frac{9}{10} < 0$, d. h. an der Stelle $x_{e2} = \frac{15}{2}$ liegt ein lokales Maximum vor.

$f_1\left(\frac{15}{2}\right) = \frac{135}{32}$;  $H_1\left(\frac{15}{2} \middle| \frac{135}{32}\right)$



$\text{solve}\left(\frac{3\cdot x^2}{25}-\frac{2\cdot x^3}{125}=0,x\right)$ $\quad x=0 \text{ or } x=\frac{15}{2}$

$\frac{6\cdot x}{25}-\frac{6\cdot x^2}{125}|x=0$ $\quad 0$

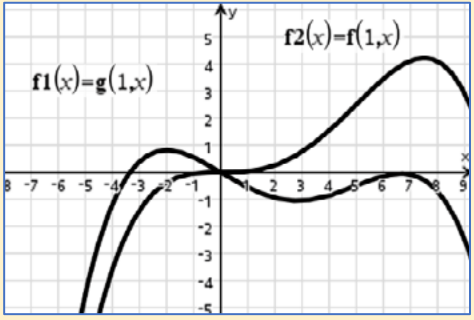
$\frac{6\cdot x}{25}-\frac{6\cdot x^2}{125}|x=\frac{15}{2}$ $\quad \frac{-9}{10}$

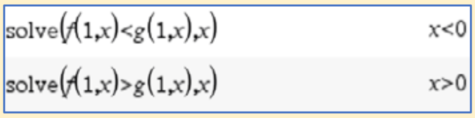
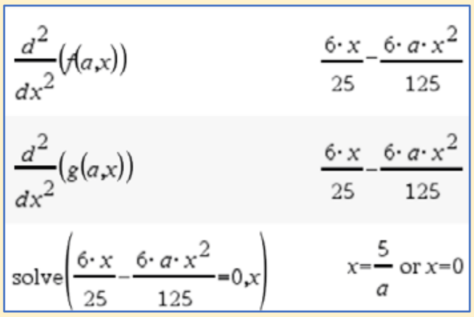
$\frac{d^3}{dx^3}(f(1,x))$ $\quad \frac{6}{25}-\frac{12\cdot x}{125}$

$\frac{6}{25}-\frac{12\cdot x}{125}|x=0$ $\quad \frac{6}{25}$

$f\left(1,\frac{15}{2}\right)$ $\quad \frac{135}{32}$

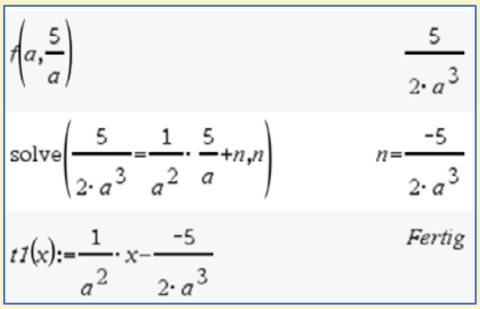
Graph von $f_1$ eintragen:



| | |
|---|---|
| **b**<br>(3 BE) | |
| **Lösung** | Wegen $g_1(x) = f_1(x) - \frac{3}{5}x$ gilt für x < 0 $g_1(x) > f_1(x)$ und für x > 0 $g_1(x) < f_1(x)$.<br><br>$\text{solve}(f(1,x)<g(1,x),x)$ $x<0$<br>$\text{solve}(f(1,x)>g(1,x),x)$ $x>0$ |
| **c**<br>(5 BE) | |
| **Lösung** | Die Anzahl der Wendepunkte der Graphen von $g_a$ und $f_a$ stimmt überein, es sind also jeweils zwei Wendepunkte. Das liegt daran, dass die 2. Ableitungsfunktionen von $g_a$ und $f_a$ übereinstimmen, denn der Summand $-\frac{3}{5}x$ verschwindet mit der 2. Ableitung. Aus diesem Grunde stimmen auch die x-Koordinaten der Wendepunkte von $g_a$ und $f_a$ überein, denn sie sind die Nullstellen der 2. Ableitungsfunktionen.<br>Die x-Koordinaten der Wendepunkte sind x = 0 und $x = \frac{5}{a}$.<br>Die y-Koordinaten der Wendepunkte können nur für x = 0 übereinstimmen, denn in diesem Falle wird der zweite Summand $-\frac{3}{5}x$ von $g_a$ ebenfalls null.<br><br>$\frac{d^2}{dx^2}(f(a,x))$ $\frac{6\cdot x}{25}-\frac{6\cdot a\cdot x^2}{125}$<br>$\frac{d^2}{dx^2}(g(a,x))$ $\frac{6\cdot x}{25}-\frac{6\cdot a\cdot x^2}{125}$<br>$\text{solve}\left(\frac{6\cdot x}{25}-\frac{6\cdot a\cdot x^2}{125}=0,x\right)$ $x=\frac{5}{a}$ or $x=0$ |

| | |
|---|---|
| **d**<br>(3 BE) | |
| **Lösung** | Aus den gegebenen Angaben zur Tangente $t_f$ in $P\left(\frac{5}{a}\middle|f_a\left(\frac{5}{a}\right)\right)$ mit dem Anstieg $\frac{1}{a^2}$ lassen sich der zugehörige Funktionswert und die |

Tangentengleichung zu $y = t_1(x) = \frac{1}{a^2} \cdot x - \frac{5}{2a^3}$ bestimmen.

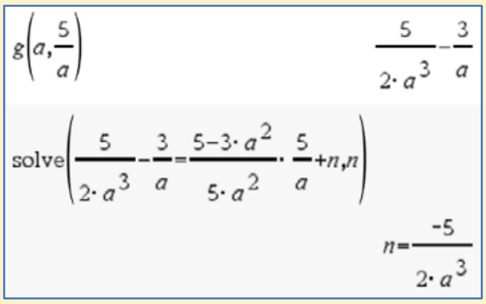


$f\left(a,\frac{5}{a}\right)$ $\quad \frac{5}{2\cdot a^3}$

$\text{solve}\left(\frac{5}{2\cdot a^3}=\frac{1}{a^2}\cdot\frac{5}{a}+n,n\right)$ $\quad n=\frac{-5}{2\cdot a^3}$

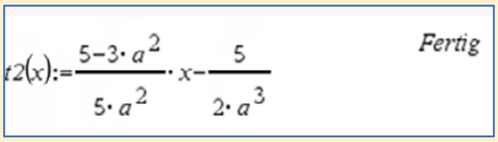
$t1(x):=\frac{1}{a^2}\cdot x-\frac{-5}{2\cdot a^3}$ $\quad$ *Fertig*

Aus den gegebenen Angaben zur Tangente $t_g$ in $P\left(\frac{5}{a}|g_a\left(\frac{5}{a}\right)\right)$ mit dem Anstieg $\frac{5-3a^2}{a^2}$ lassen sich der zugehörige Funktionswert und die Tangentengleichung zu $y = t_2(x) = \frac{5-3a^2}{a^2} \cdot x - \frac{5}{2a^3}$ bestimmen.



$g\left(a,\frac{5}{a}\right)$ $\quad \frac{5}{2\cdot a^3}-\frac{3}{a}$

$\text{solve}\left(\frac{5}{2\cdot a^3}-\frac{3}{a}=\frac{5-3\cdot a^2}{5\cdot a^2}\cdot\frac{5}{a}+n,n\right)$ $\quad n=\frac{-5}{2\cdot a^3}$

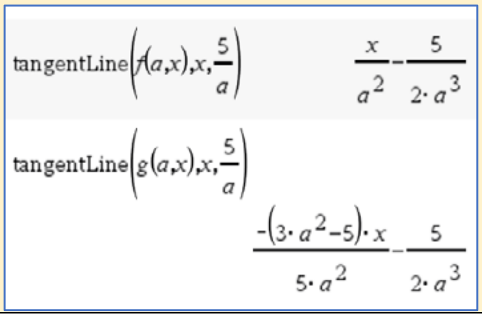


$t2(x):=\frac{5-3\cdot a^2}{5\cdot a^2}\cdot x-\frac{5}{2\cdot a^3}$ $\quad$ *Fertig*

Beide Tangentengleichungen haben dasselbe Absolutglied $-\frac{5}{2a^3}$. Damit liegt der Schnittpunkt $S\left(0|-\frac{5}{2a^3}\right)$ für jeden Wert von a also auf der y – Achse.

**Hinweis:**

Die Tangentengleichungen lassen sich auch effektiv und rasch mit der Anweisung „*tangentLine*“ ermitteln.

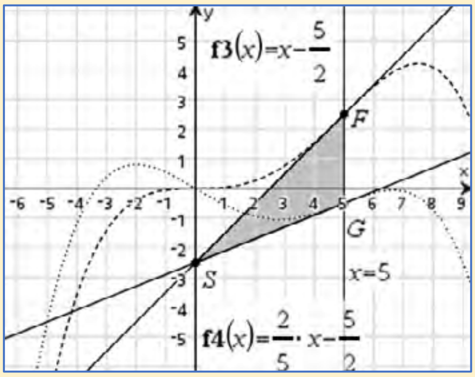


$\text{tangentLine}\left(f(a,x),x,\frac{5}{a}\right)$ $\quad \frac{x}{a^2}-\frac{5}{2\cdot a^3}$

$\text{tangentLine}\left(g(a,x),x,\frac{5}{a}\right)$ $\quad \frac{-(3\cdot a^2-5)\cdot x}{5\cdot a^2}-\frac{5}{2\cdot a^3}$

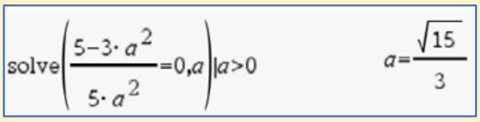
**e**
(6 BE)

**Lösung**



Die nebenstehende Abbildung veranschaulicht das Dreieck SGF für den Wert a = 1. Die Punkte F und G sind die Berührpunkte der Tangenten an die Graphen von $g_a$ und $f_a$. Die Anstiege der Tangenten an diesen Stellen sind gegeben mit $\frac{1}{a^2}$ bzw. mit $\frac{5-3a^2}{a^2}$.

Damit die Tangente in F mit der zur x-Achse senkrechten Geraden $x = \frac{5}{a}$ einen rechten Winkel bildet, müsste sie senkrecht zur y-Achse verlaufen, also den Anstieg null haben. Dies ist aber bei der Steigung $\frac{1}{a^2}$ für keine reelle positive Zahl a möglich.

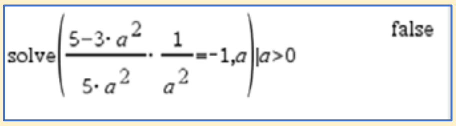


$\text{solve}\left(\frac{5-3\cdot a^2}{5\cdot a^2}=0,a\right)|a>0 \qquad a=\frac{\sqrt{15}}{3}$

Damit die Tangente in G mit der zur x-Achse senkrechten Geraden $x = \frac{5}{a}$ einen rechten Winkel bildet, muss sie senkrecht zur y-Achse verlaufen, also den Anstieg null haben. Dann muss die Steigung $\frac{5-3a^2}{a^2} = 0$ sein.

Diese Gleichung hat für a > 0 die Lösung $a = \frac{\sqrt{15}}{3}$.

Die beiden Tangenten schneiden einander im Punkt S. Damit dort der Schnittwinkel der beiden Tangenten 90° beträgt, muss das Produkt der Tangentenanstieg den Wert – 1 haben.



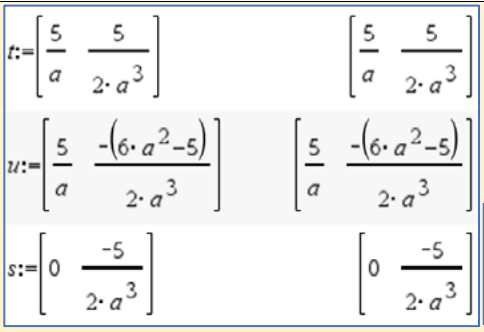
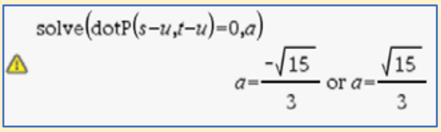
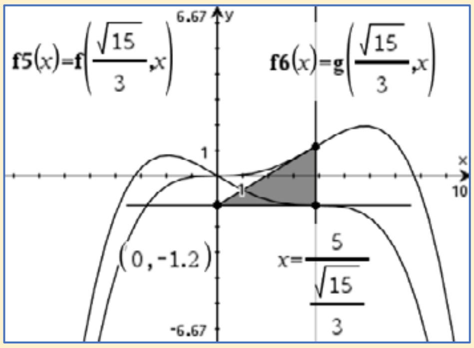
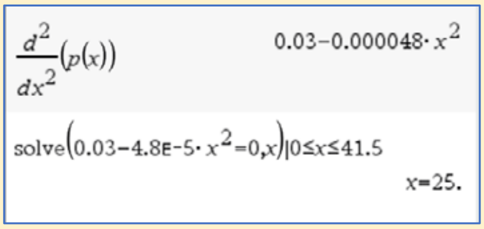
$\text{solve}\left(\frac{5-3\cdot a^2}{5\cdot a^2}\cdot\frac{1}{a^2}=-1,a\right)|a>0 \qquad \text{false}$

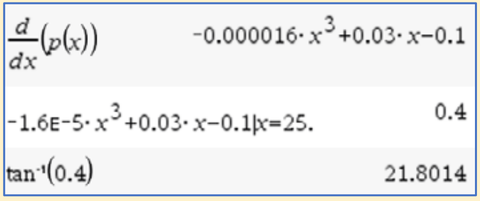
Die Gleichung $\frac{5-3a^2}{a^2} \cdot \frac{1}{a^2} = -1$ hat aber für a > 0 keine reelle Lösung.

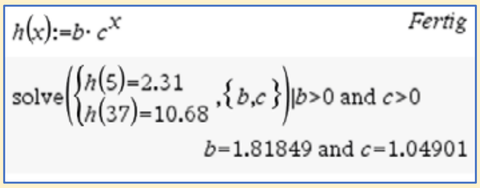
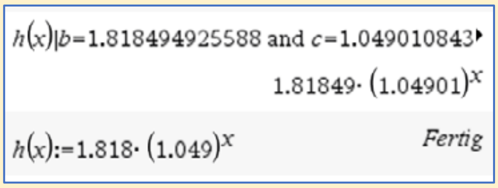
Das Dreieck SFG kann also nur für $a = \frac{\sqrt{15}}{3}$ rechtwinklig sein.

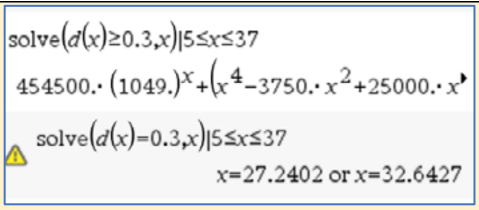
Alternative Lösung: Bei Rechtwinkligkeit muss das Skalarprodukt $\overrightarrow{US}\circ\overrightarrow{UT} = 0$ sein.

Dabei sind $S\left(0|-\frac{5}{2a^3}\right)$ der Schnittpunkt beider Tangenten auf der y-Achse und die Punkte $T\left(\frac{5}{a}|\frac{5}{2a^3}\right)$ und $U\left(\frac{5}{a}|-\frac{6a^2-5}{2a^3}\right)$ die Berührpunkte der Tangenten mit den Graphen von f bzw. g.

| | |
|---|---|
| | <br>$t:=\begin{bmatrix}\frac{5}{a} & \frac{5}{2\cdot a^3}\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}\frac{5}{a} & \frac{5}{2\cdot a^3}\end{bmatrix}$<br>$u:=\begin{bmatrix}\frac{5}{a} & \frac{-(6\cdot a^2-5)}{2\cdot a^3}\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}\frac{5}{a} & \frac{-(6\cdot a^2-5)}{2\cdot a^3}\end{bmatrix}$<br>$s:=\begin{bmatrix}0 & \frac{-5}{2\cdot a^3}\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}0 & \frac{-5}{2\cdot a^3}\end{bmatrix}$<br><br>solve(dotP(s−u,t−u)=0,a)<br>$a=\frac{-\sqrt{15}}{3}$ or $a=\frac{\sqrt{15}}{3}$<br><br>Selbstkontrolle:<br>Die Situation wird für $a=\frac{\sqrt{15}}{3}$ grafisch dargestellt.<br>Der Schnittpunkt $S\left(0\middle|-\frac{5}{2a^3}\right)$ hat für $a=\frac{\sqrt{15}}{3}$ näherungsweise die Koordinaten $S(0\|-1{,}2)$.<br><br>$n=\frac{-5}{2\cdot a^3}\|a=\frac{\sqrt{15}}{3}$ $n=-1.1619$<br><br> |
| **2** | |
| **a**<br>(4 BE) | |
| **Lösung** | Die Gleichung der Profillinie der Skipiste als Variable definieren:<br>$p(x)=-0{,}000004x^4+0{,}015x^2-0{,}1x+0{,}1875$ mit $0\leq x\leq 41{,}5$<br>1 LE entspricht 10 m in der Realität.<br>Größe des größten Neigungswinkels berechnen:<br>Der Neigungswinkel (Anstieg) wird durch die 1. Ableitung bestimmt. Das Extremum des Neigungswinkels kann dann durch die Ableitung der 1. Ableitung, also die Nullstelle der 2. Ableitung bestimmt werden.<br>$p''(x)=0{,}03-0{,}000048x^2$; $p''(x)=0$ führt auf x = 25.<br><br>$\frac{d^2}{dx^2}(p(x))$ $0.03-0.000048\cdot x^2$<br>solve$(0.03-4.8\text{E}-5\cdot x^2=0,x)\|0\leq x\leq 41.5$<br>$x=25.$ |

| | |
|---|---|
| | Die Steigung an der Stelle x = 25 wird durch $p'(25)$ berechnet.<br>Es gilt $p'(x) = -0{,}000016x^3 + 0{,}03x - 0{,}1$ und $p'(25) = 0{,}4$<br>Wegen $m = \tan(\alpha)$ ergibt sich aus $\alpha = \arctan(0{,}4)$ der größte Neigungswinkel zu $\alpha \approx 21{,}8°$.<br><br>$\frac{d}{dx}(p(x))$ $-0.000016\cdot x^3+0.03\cdot x-0.1$<br>$-1.6E-5\cdot x^3+0.03\cdot x-0.1\|x=25.$ 0.4<br>$\tan^{-1}(0.4)$ 21.8014 |

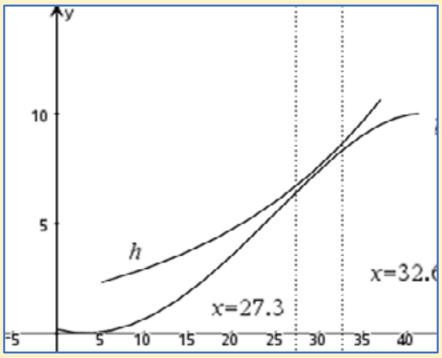
| | |
|---|---|
| **b**<br>(2 BE) | |
| **Lösung** | Seil über der Piste durch A(5\|2,31) und B(37\|10,68):<br><br>Modell für den Verlauf des Seiles durch $h(x) = b \cdot c^x$ mit $b, c \in R^+$.<br>Durch Einsetzen der Punktkoordinaten von A und B ergibt sich ein Gleichungssystem für b und c. Die Lösungen dieses Gleichungssystems sind $b \approx 1{,}818$ und $c \approx 1{,}049$.<br>Mit diesen Werten ist $h(x) \approx 1{,}818 \cdot 1{,}049^x$. Diese Funktion wird nun ebenfalls gespeichert.<br><br>$h(x):=b\cdot c^x$ Fertig<br>$\text{solve}\left(\begin{cases}h(5)=2.31\\h(37)=10.68\end{cases},\{b,c\}\right)\|b>0 \text{ and } c>0$<br>$b=1.81849 \text{ and } c=1.04901$<br><br>$h(x)\|b=1.818494925588 \text{ and } c=1.049010843$▸<br>$1.81849\cdot(1.04901)^x$<br>$h(x):=1.818\cdot(1.049)^x$ Fertig |
| **c**<br>(6 BE) | |
| **Lösung** | Der vertikale Abstand vom Seil zur Piste wird durch $d(x) = h(x) - p(x)$ beschrieben.<br>Zunächst wird unter Berücksichtigung des Maßstabes untersucht, in welchen Bereichen bei der Beschränkung auf das Intervall [5; 37] zwischen den Seilenden $d(x) \geq 0{,}3$ gilt. Das CAS löst allerdings die Ungleichung nicht, sodass es sinnvoll ist, zunächst die Gleichung $d(x) = 0{,}3$ im Intervall [5; 37] zu lösen.<br>Beide Kurven schneiden einander an den Stellen $x_1 \approx 27{,}3$ (aufgerundet wegen der Richtung des Ungleichheitszeichens) und $x_2 \approx 32{,}6$. |

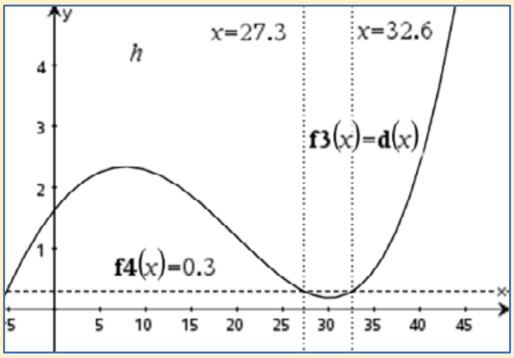


```
solve(d(x)≥0.3,x)|5≤x≤37
   454500.·(1049.)^x+(x^4−3750.·x^2+25000.·x▸
solve(d(x)=0.3,x)|5≤x≤37
                        x=27.2402 or x=32.6427
```

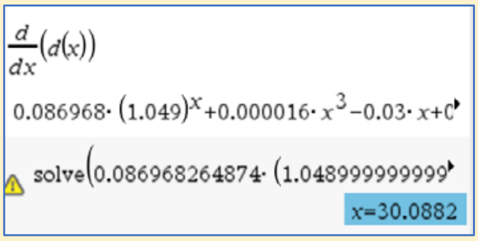
Um herauszufinden, in welchem Intervall h(x) mindestens drei Meter oberhalb von p(x) liegt, werden beide Funktionen zusammen mit den Geraden x = 27,3 und x = 32,6 grafisch dargestellt.

Der vertikale Abstand des Seiles zur Piste beträgt in den Bereichen $5 \le x \le 27{,}3$ und $32{,}6 \le x \le 37$ mindestens drei Meter.



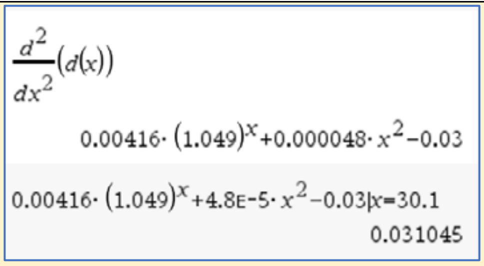
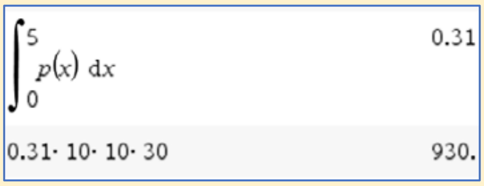


Deshalb hat das Seil im Intervall 27,3 < x < 32,6 einen Abstand von weniger als drei Metern.
Damit das Seil nach einem Anheben auch hier mindestens drei Meter von der Piste entfernt ist, muss es so weit angehoben werden, dass auch der kleinste Wert des bisherigen Abstandes mindestens drei Meter beträgt.
Das lokale Minimum der Funktion d(x) im Intervall 27,3 < x < 32,6 ist zu bestimmen.
Die 1. Ableitung von d(x) ist
$d'(x) = 0{,}0870 \cdot 1{,}049^x + 0{,}000016x^3 - 0{,}03x + 0{,}1$
Als Nullstelle im Intervall 27,3 < x < 32,6 wird $x \approx 30{,}1$ angezeigt.



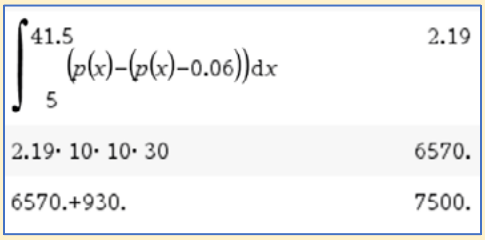
```
d/dx(d(x))
   0.086968·(1.049)^x+0.000016·x^3−0.03·x+0▸
solve(0.086968264874·(1.048999999999▸
                                  x=30.0882
```

Für die 2. Ableitung von d(x) gilt
$d''(x) = 0{,}00416 \cdot 1{,}049^x + 0{,}000048x^2 - 0{,}03$
Wegen $d''(x) \approx 0{,}03 > 0$ ist damit ein lokales Minimum an der Stelle x = 30,1 bestätigt.

| | |
|---|---|
| | <br>$\frac{d^2}{dx^2}(d(x))$<br>$0.00416\cdot (1.049)^x+0.000048\cdot x^2-0.03$<br>$0.00416\cdot (1.049)^x+4.8\mathrm{E}{-}5\cdot x^2-0.03\vert x=30.1$<br>$0.031045$<br>Der Funktionswert der Differenzfunktion an dieser Stelle ist $d(30{,}1) \approx 0{,}19$. Unter Beachtung des Maßstabes bedeutet das, dass das Seil an der Stelle x = 30,1 ca. 1,9 m über der Piste liegt. Damit fehlen rund 1,1 m bis zum gewünschten Mindestabstand von 3 m. Das Seil müsste an den Enden um 1,1 m angehoben werden, damit es überall mindestens 3 m von der Piste entfernt ist.<br><br>$d(30.1)$ $0.188252$<br>$0.3-0.1882519303596$ $0.111748$ |
| **d**<br>(5 BE) | |
| **Lösung** | Im Intervall $0 \leq x \leq 5$ wird die obere Grenze der Schneeauflage durch die Funktion p(x) und die untere Grenze durch die x-Achse bestimmt. Der Flächeninhalt zwischen p(x) und der x-Achse wird berechnet durch $\int_0^5 p(x)dx = 0{,}31$. Wegen des zu beachtenden Maßstabes muss dieser Wert sowohl in x-Richtung als auch in y-Richtung mit 10 multipliziert werden. Außerdem ist die Breite der Piste von 30 m zu beachten.<br>Das Volumen der Schneeauflage im Intervall $0 \leq x \leq 5$ ist $0{,}31 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 30 = 930\ m^3$.<br><br>$\int_0^5 p(x)\ dx$ $0.31$<br>$0.31\cdot 10\cdot 10\cdot 30$ $930.$<br>Im Intervall $5 < x < 41{,}5$ wird der Untergrund der Schneeauflage durch die Funktion p(x) – 0,06 bestimmt, weil die Schneeauflage hier eine Höhe von 60 cm hat. Die Fläche zwischen den Graphen von p(x) und p(x) – 0,06 ist: |

$$\int_{5}^{41.5} [p(x) - (p(x) - 0{,}06)]\, dx = 2.19$$

Auch hier gilt: Wegen des zu beachtenden Maßstabes muss dieser Wert sowohl in x-Richtung als auch in y-Richtung mit 10 multipliziert werden. Außerdem ist die Breite der Piste von 30 m zu beachten. Das Volumen der Schneeauflage im Intervall $5 < x \leq 41.5$ ist $2{,}91 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 30 = 6570\, m^3$.
Als Summe ergibt sich ein Gesamtvolumen der Schneeauflage von $930\, m^3 + 6570\, m^3 = 7500\, m^3$.



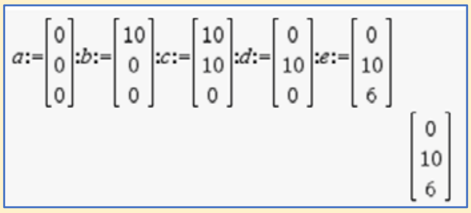
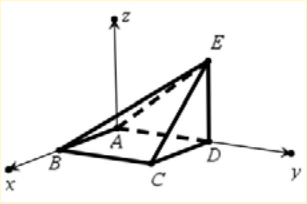
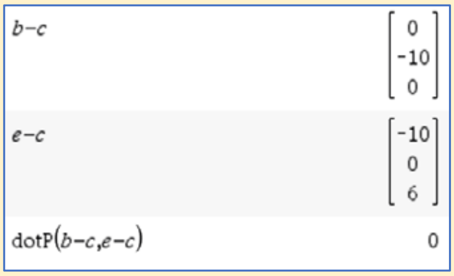
$\int_{5}^{41.5} (p(x)-(p(x)-0.06))\mathrm{d}x$ 2.19

2.19· 10· 10· 30 6570.

6570.+930. 7500.

# Analytische Geometrie - grundlegendes Anforderungsniveau

### Analytische Geometrie/Lineare Algebra A2 - Beispiel 1 (grundlegendes Anforderungsniveau)[6]

| | |
|---|---|
| **1** | |
| **a**<br>(5 BE) | |
| **Lösung** | Ortsvektoren der Punkte unter Variablen speichern.<br><br>$a:=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}:b:=\begin{bmatrix}10\\0\\0\end{bmatrix}:c:=\begin{bmatrix}10\\10\\0\end{bmatrix}:d:=\begin{bmatrix}0\\10\\0\end{bmatrix}:e:=\begin{bmatrix}0\\10\\6\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}0\\10\\6\end{bmatrix}$<br><br> <br>Das Dreieck BCE ist rechtwinklig, weil das Skalarprodukt der Vektoren $\overrightarrow{CB}$ und $\overrightarrow{CE}$ null ist.<br>$\begin{pmatrix}0\\-10\\0\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}-10\\0\\6\end{pmatrix}=0$<br>Daraus folgt die Behauptung.<br><br>$b-c$ $\begin{bmatrix}0\\-10\\0\end{bmatrix}$<br>$e-c$ $\begin{bmatrix}-10\\0\\6\end{bmatrix}$<br>dotP$(b-c,e-c)$ 0<br>Berechnung des Flächeninhaltes der Oberfläche:<br>Viereck ABCD ist ein Quadrat mit dem Flächeninhalt<br>$A_1=(10\,cm)^2=100\,cm^2$.<br>Die Dreiecke BCE und ABE sind wegen der Symmetrie des Körpers kongruent. Außerdem haben sie bei C bzw. A einen rechten Innenwinkel. Dreieck BCE hat den Flächeninhalt<br>$A_2=\frac{1}{2}\cdot\lvert\overrightarrow{BC}\rvert\cdot\lvert\overrightarrow{CE}\rvert$<br>$=\frac{1}{2}\cdot 10\,cm\cdot\sqrt{(10\,cm)^2+(6\,cm)^2}$ |

---

[6] https://www.iqb.hu-berlin.de/abitur/pools2021/abitur/pools2021/mathematik/grundlegend/2021_M_grundlege_13.pdf

$= 5 \cdot \sqrt{136}\ cm^2 = 10 \cdot \sqrt{34}\ cm^2.$

Die Dreiecke CDE und ADE sind wegen der Symmetrie des Körpers kongruent. Außerdem haben sie bei D einen rechten Innenwinkel. Jedes von ihnen hat einen Flächeninhalt von

$$A_3 = \frac{1}{2} \cdot \left|\overrightarrow{CE}\right| \cdot \left|\overrightarrow{DE}\right|$$

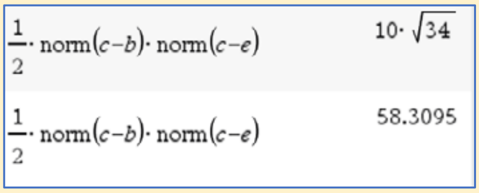
$$A_3 = \frac{1}{2} \cdot (10\ cm) \cdot (6\ cm) = 30\ cm^2$$

Der Oberflächeninhalt ergibt sich zu

$$A_G = A_1 + 2 \cdot A_2 + 2 \cdot A_3$$

$$A_G = \left(100 + 20 \cdot \sqrt{34} + 60\right) cm^2$$

$$A_G = 20 \cdot \left(8 + \sqrt{34}\right) cm^2 \approx 277\ cm^2$$



$\frac{1}{2} \cdot \text{norm}(c-b) \cdot \text{norm}(c-e)$ $10 \cdot \sqrt{34}$

$\frac{1}{2} \cdot \text{norm}(c-b) \cdot \text{norm}(c-e)$ 58.3095

$100+2 \cdot 10 \cdot \sqrt{34}+2 \cdot 30$ $20 \cdot \sqrt{34}+160$

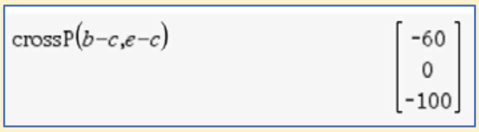
$100+2 \cdot 10 \cdot \sqrt{34}+2 \cdot 30$ 276.619

**b**
(3 BE)

Lösung

Gleichung der Ebene L, in der das Dreieck BCE liegt:
Aus dem Vektorprodukt der Vektoren $\overrightarrow{CB}$ und $\overrightarrow{CE}$ wird ein Normalenvektor der Ebene L gewonnen:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -10 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -60 \\ 0 \\ -100 \end{pmatrix} = -20 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

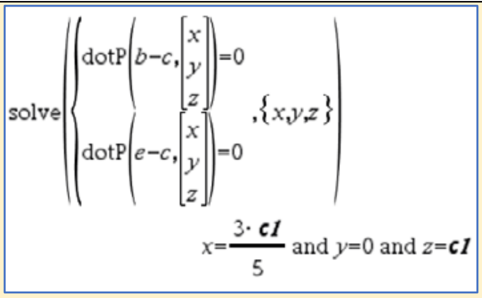


crossP$(b-c,e-c)$ $\begin{bmatrix} -60 \\ 0 \\ -100 \end{bmatrix}$

Als Normalenvektor kann verwendet werden $\vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Alternativ kann der Normalenvektor auch über das Skalarprodukt ermittelt werden:

$\overrightarrow{CB} \circ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$ und $\overrightarrow{CE} \circ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$ ergibt $x = \frac{3}{5} \cdot k; y = 0; z = k$ mit $k \in R$.



$$\text{solve}\left(\begin{cases}\text{dotP}\left(b-c,\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\right)=0\\ \text{dotP}\left(e-c,\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\right)=0\end{cases},\{x,y,z\}\right)$$

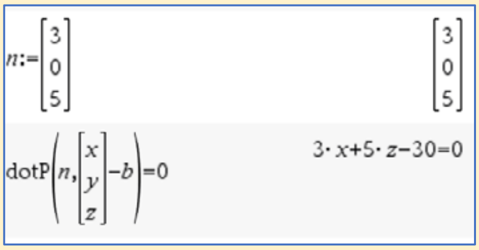
$$x=\frac{3\cdot \mathbf{c1}}{5} \text{ and } y=0 \text{ and } z=\mathbf{c1}$$

Für k = 5 erhält man auch damit $\vec{n} = \begin{pmatrix}3\\0\\5\end{pmatrix}$.

Damit und mit dem Ortsvektor z. B. des Punktes B wird eine Normalengleichung der Ebene L aufgestellt: $\vec{n}\circ\left[\vec{x} - \overrightarrow{OB}\right] = 0$

$$\begin{pmatrix}3\\0\\5\end{pmatrix}\circ\left[\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}10\\0\\0\end{pmatrix}\right] = 0$$

Daraus folgt durch Ausmultiplizieren die Koordinatenform der Gleichung der Ebene L: $3x + 5z - 30 = 0$.



$$n:=\begin{bmatrix}3\\0\\5\end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix}3\\0\\5\end{bmatrix}$$

$$\text{dotP}\left(n,\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}-b\right)=0 \qquad 3\cdot x+5\cdot z-30=0$$

**c**
(2 BE)

**Lösung**

Der Winkel zwischen der Grundfläche ABCD und der Seitenfläche BCE entspricht dem Winkel zwischen der Ebene L und der xy-Ebene. Dieser wiederum kann durch den Winkel, den die Normalenvektoren der beiden Ebenen miteinander bilden, berechnet werden.

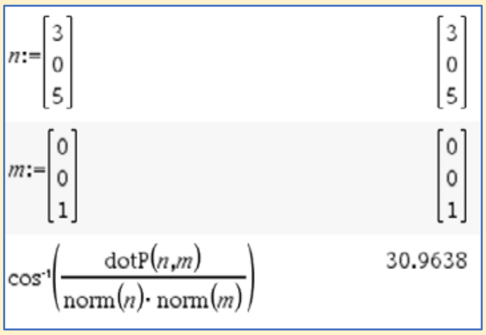
Ebenen L: $\vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$; xy-Ebene: $\vec{m} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\cos\left(\sphericalangle(\vec{n};\ \vec{m}\right) = \frac{\vec{n}\circ\vec{m}}{|\vec{n}|\cdot|\vec{m}|}$$

Die Größe des Winkels zwischen der Grundfläche ABCD und der Seitenfläche BCE ist rund 31°.

Alternativ kann die Größe dieses Winkels auch über das rechtwinklige Dreieck CDE berechnet werden:

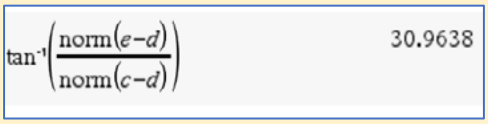
$$\tan(\varphi) = \frac{|\overline{DE}|}{|\overline{CD}|} \Rightarrow \varphi \approx 31°$$



$n:=\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$ $\quad\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$

$m:=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\quad\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\cos^{-1}\left(\frac{\text{dotP}(n,m)}{\text{norm}(n)\cdot\text{norm}(m)}\right)$ $\quad 30.9638$



$\tan^{-1}\left(\frac{\text{norm}(e-d)}{\text{norm}(c-d)}\right)$ $\quad 30.9638$

**d**
(4 BE)

**Lösung**

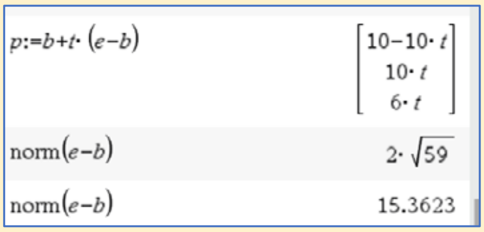
Erläuterungen für das Verfahren zur Ermittlung einer möglichst kurzen Linie von A zu C über die Kante $\overline{BE}$:
Ein beliebiger Punkt P auf der Kante $\overline{BE}$ kann z. B. durch den Ortsvektor $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OB} + t\cdot\overrightarrow{BE}$ mit $t \in R; 0 \leq t \leq \left|\overrightarrow{BT}\right|$ beschrieben werden. Dieser Ansatz ergibt

$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 10-10t \\ 10t \\ 6t \end{pmatrix}$ mit $t \in R; 0 \leq t \leq 2\cdot\sqrt{59}$

Der Punkt P hat also die Koordinaten P(10 – 10t|10t|6t).

Der kürzeste Weg von A über P nach C wird erreicht, wenn $\overline{PC}$ senkrecht zu $\overline{PB}$ ist, deshalb muss das Skalarprodukt dieser beiden

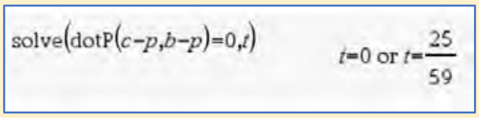
Vektoren null sein. Aus dem Ansatz $\overrightarrow{PC}\circ\overrightarrow{PB}=0$ ergibt sich t = 0 und $t=\frac{25}{59}$.



$p{:=}b+t\cdot(e-b)$ $\quad\begin{bmatrix}10-10\cdot t\\ 10\cdot t\\ 6\cdot t\end{bmatrix}$

$\mathrm{norm}(e-b)$ $\quad 2\cdot\sqrt{59}$

$\mathrm{norm}(e-b)$ $\quad 15.3623$



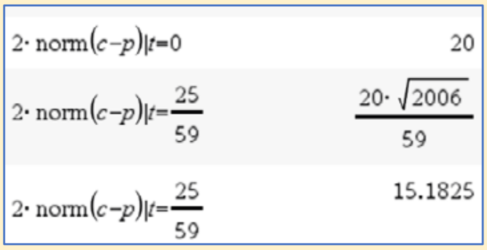
$\mathrm{solve}(\mathrm{dotP}(c-p,b-p)=0,t)$ $\quad t=0 \text{ or } t=\frac{25}{59}$

Die Weglänge ist $\left|\overrightarrow{AP}\right|+\left|\overrightarrow{PC}\right|$. Wegen der Symmetrie des Körpers ist $\left|\overrightarrow{AP}\right|=\left|\overrightarrow{PC}\right|$, deshalb kann die Weglänge auch als $2\cdot\left|\overrightarrow{PC}\right|$ angegeben werden.

Dieser Ansatz ergibt für t = 0 die Weglänge 20 cm und für $t=\frac{25}{59}$ rund 15,2 cm. Der kürzeste Weg geht also über den Punkt $P\left(\frac{340}{59}\middle|\frac{250}{59}\middle|\frac{150}{59}\right)$.

**Hinweis:**

Die Angabe dieser Punktkoordinaten ist in der Aufgabenstellung nicht gefordert.

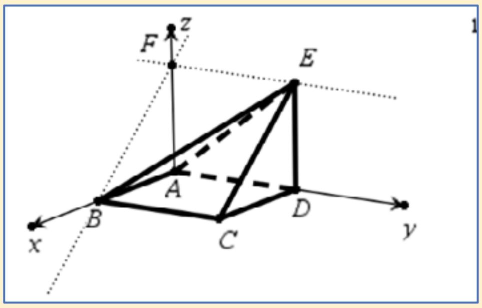


$2\cdot\mathrm{norm}(c-p)|t=0$ $\quad 20$

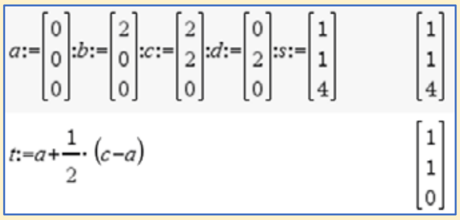
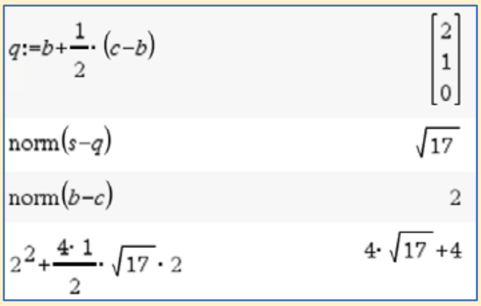
$2\cdot\mathrm{norm}(c-p)|t=\frac{25}{59}$ $\quad \frac{20\cdot\sqrt{2006}}{59}$

$2\cdot\mathrm{norm}(c-p)|t=\frac{25}{59}$ $\quad 15.1825$

$p|t=\frac{25}{59}$ $\quad\begin{bmatrix}\frac{340}{59}\\ \frac{250}{59}\\ \frac{150}{59}\end{bmatrix}$

| | |
|---|---|
| **e**<br>(2 BE) | |
| **Lösung** | Der Schnittpunkt der Ebene L mit der z-Achse ist F.<br>Die untenstehende Zeichnung zeigt die Abbildungen von F und von den Geraden, in denen L die xz- sowie die yz-Ebene schneidet.<br> |
| **f**<br>(4 BE) | |
| **Lösung** | Der Körper ABCDEF ist ein Prisma mit dem Volumen<br>$V_1 = A_{\Delta ABF} \cdot \lvert\overline{AD}\rvert = \frac{1}{2} \cdot \lvert\overline{AB}\rvert \cdot \lvert\overline{AF}\rvert \cdot \lvert\overline{AD}\rvert$.<br>Wegen $\lvert\overline{AB}\rvert = \lvert\overline{AD}\rvert$ und $\lvert\overline{AF}\rvert = \lvert\overline{DE}\rvert$ folgt<br>$V_1 = A_{\Delta ABF} \cdot \lvert\overline{AD}\rvert = \frac{1}{2} \cdot \lvert\overline{AB}\rvert^2 \cdot \lvert\overline{DE}\rvert$<br>Der Körper ABCDE ist eine schiefe Pyramide mit dem Volumen<br>$V_2 = \frac{1}{3} A_{\Delta ABCD} \cdot \lvert\overline{DE}\rvert = \frac{1}{3} \cdot \lvert\overline{AB}\rvert^2 \cdot \lvert\overline{DE}\rvert$.<br>Setzt man die beiden Volumina ins Verhältnis, so ergibt sich<br>$\frac{V_1}{V_2} = \frac{1/2}{1/3} = \frac{3}{2}$. Damit gilt $V_1 = \frac{3}{2} \cdot V_2$.<br>Das Volumen des Körpers ABCDEF ist um 50% größer als das Volumen des Körpers ABCDE. |

## Analytische Geometrie/Lineare Algebra - Beispiel 2 (grundlegendes Anforderungsniveau)[7]

| | |
|---|---|
| **1** | |
| **a**<br>(6 BE) | |
| **Lösung** | Der Ortsvektor des Mittelpunktes T der quadratischen Grundfläche ABCD kann z. B. berechnet werden durch<br>$\overrightarrow{OT} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.<br>Die Pyramide ABCDS ist gerade, weil der Mittelpunkt der quadratischen Grundfläche ABCD dieselben x- und y-Koordinaten hat, wie die Spitze S. T liegt also senkrecht unter S.<br><br>$a:=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}:b:=\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}:c:=\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}:d:=\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}:s:=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$<br>$t:=a+\frac{1}{2}\cdot(c-a)$ $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$<br>Die vier Seitenflächen der Pyramide sind kongruent zueinander, weil es sich um eine gerade quadratische Pyramide handelt. Der Ortsvektor des Mittelpunktes Q der Seite $\overline{BC}$ wird berechnet durch<br>$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OB} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.<br>Die Oberfläche hat den Flächeninhalt<br>$A_o = \lvert\overline{BC}\rvert^2 + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \lvert\overline{BC}\rvert \cdot \lvert\overline{QS}\rvert = 4 + 4 \cdot \sqrt{17}$ FE.<br><br>$q:=b+\frac{1}{2}\cdot(c-b)$ $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$<br>$\text{norm}(s-q)$ $\sqrt{17}$<br>$\text{norm}(b-c)$ $2$<br>$2^2+\frac{4\cdot 1}{2}\cdot\sqrt{17}\cdot 2$ $4\cdot\sqrt{17}+4$ |

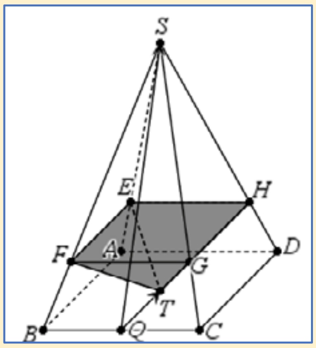
---

[7] https://www.iqb.hu-berlin.de/abitur/pools2021/abitur/pools2021/mathematik/grundlegend/2021_M_grundlege_14.pdf

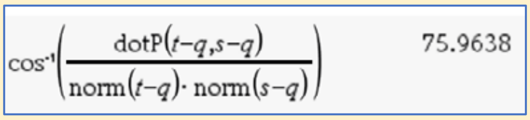
**b**
(3 BE)

**Lösung**

Da alle vier Seitenflächen der geraden quadratischen Pyramide gleichgroße Neigungswinkel gegenüber der Grundfläche haben, kann auch der Neigungswinkel der Seitenfläche BCS gegen die Grundfläche berechnet werden. Dieser Winkel entspricht dem Winkel zwischen den Vektoren $\overrightarrow{QT}$ und $\overrightarrow{QS}$.



$$\measuredangle \overrightarrow{QT};\ \overrightarrow{QS} = arccos\left(\frac{\overrightarrow{QT}\circ\overrightarrow{QS}}{|\overrightarrow{QT}|\cdot|\overrightarrow{QS}|}\right) \approx 75{,}96°$$



$\cos^{-1}\left(\frac{\text{dotP}(t-q,s-q)}{\text{norm}(t-q)\cdot\text{norm}(s-q)}\right)$ 75.9638

Alternativer Lösungsweg:

$$\measuredangle \overrightarrow{QT};\ \overrightarrow{QS} = \arctan\left(\frac{|\overrightarrow{TS}|}{|\overrightarrow{TQ}|}\right) \approx 75{,}96°$$

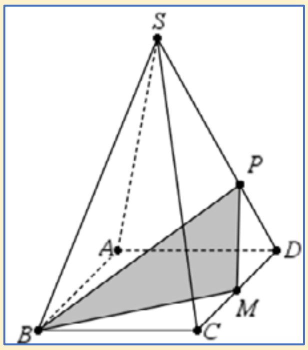
$\tan^{-1}\left(\frac{\text{norm}(s-t)}{\text{norm}(q-t)}\right)$ 75.9638

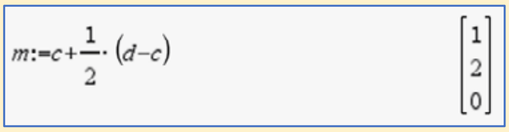
**c**
(5 BE)

**Lösung**

Der Ortsvektor des Mittelpunktes M der Seite $\overline{CD}$ wird berechnet durch

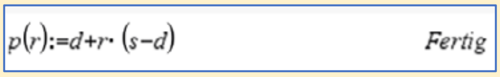
$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OC} + \frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}.$$





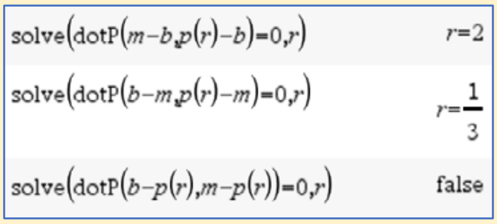
$m:=c+\frac{1}{2}\cdot(d-c)$ $\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix}$

P liegt auf der Geraden $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OD} + r\cdot\overrightarrow{DS}$.
Für $0 \le r \le 1$ liegt P auf der Strecke $\overline{DS}$.



$p(r):=d+r\cdot(s-d)$ Fertig

Das Dreieck BMP könnte an jedem Eckpunkt einen rechten Innenwinkel besitzen. Dann müssten das Skalarprodukt der den Winkel einschließenden Seitenvektoren den Wert null haben.



$\text{solve}(\text{dotP}(m-b,p(r)-b)=0,r)$ $\quad r=2$

$\text{solve}(\text{dotP}(b-m,p(r)-m)=0,r)$ $\quad r=\frac{1}{3}$

$\text{solve}(\text{dotP}(b-p(r),m-p(r))=0,r)$ $\quad$ false

Die Bedingung $0 \le r \le 1$ ist nur für den Innenwinkel am Eckpunkt M mit $r = \frac{1}{3}$ erfüllt. Es gibt also einen solchen Punkt $P\left(\frac{1}{3}\middle|\frac{5}{3}\middle|\frac{4}{3}\right)$.

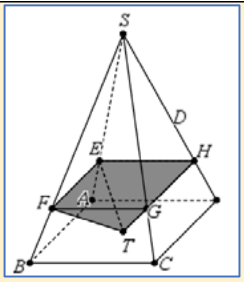
$\left(p\left(\frac{1}{3}\right)\right)^{T}$ $\quad \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{5}{3} & \frac{4}{3} \end{bmatrix}$

**Hinweis:**

Die Angabe der Koordinaten von P ist in der Aufgabenstellung nicht verlangt.

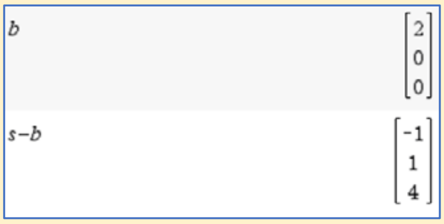
**d**
(3 BE)

**Lösung**



Der Vektor $\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}$ ist der Ortsvektor des Punktes B.

Der Vektor $\begin{pmatrix}-1\\1\\4\end{pmatrix}$ ist der Differenzvektor der Ortsvektoren von S und B.



$b$ $\begin{bmatrix}2\\0\\0\end{bmatrix}$

$s-b$ $\begin{bmatrix}-1\\1\\4\end{bmatrix}$

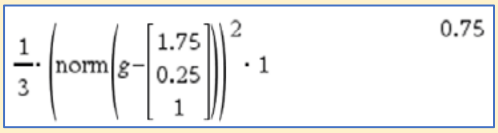
Die Gleichung $\vec{x} = \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix} + \sigma \cdot \begin{pmatrix}-1\\1\\4\end{pmatrix}$ beschreibt die Gerade g(BS) durch die Punkte B und S.

Mit $\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix} + \sigma \cdot \begin{pmatrix}-1\\1\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\1\end{pmatrix}$ wird der Punkt F auf der Geraden g(BS) gesucht, der die z–Koordinate $x_3 = 1$ hat. Aus diesem Ansatz ergibt sich $0 + 4 \cdot \sigma = 1$, also $\sigma = \frac{1}{4}$.

Setzt man diesen Wert in die Gleichung von g(BS) ein, so erhält man $x_1 = 1{,}75$ und $x_2 = 0{,}25$.

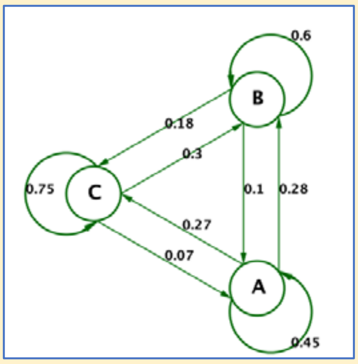
$b+\frac{1}{4}\cdot(s-b)$ $\begin{bmatrix}1.75\\0.25\\1.\end{bmatrix}$

Die Aufgabenstellung könnte lauten:
„Bestimmen Sie die $x_1$– und $x_2$–Koordinate des Punktes F, der auf der Geraden durch B und S liegt und die z-Koordinate 1 hat.“

| **e**<br>(3 BE) | |
|---|---|
| **Lösung** | Da die Pyramide ABCDS eine quadratische gerade Pyramide ist, und weil die Ebene mit der Gleichung $x_3 = 1$ parallel zur Grundfläche ABCD ist, muss die Pyramide EFGHT ebenfalls eine quadratische gerade Pyramide mit der Grundfläche EFGH und der Höhe 1 sein.<br>Um die Länge einer Grundkante dieser Pyramide zu erhalten, kann neben F ein weiterer benachbarter Eckpunkt der Grundfläche bestimmt werden, z. B. der Punkt G. Analog zur Bestimmung der Koordinaten von F gilt: $\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OC} + \frac{1}{4} \cdot \overrightarrow{CS} = \begin{pmatrix} 1{,}75 \\ 1{,}75 \\ 1 \end{pmatrix}$.<br><br>$g:=c+\frac{1}{4}\cdot(s-c)$ $\begin{bmatrix} \frac{7}{4} \\ \frac{7}{4} \\ 1 \end{bmatrix}$<br><br>$\frac{1}{3}\cdot\left(\text{norm}\left(g-\begin{bmatrix} 1.75 \\ 0.25 \\ 1 \end{bmatrix}\right)\right)^2\cdot 1$ 0.75<br>Das Volumen der Pyramide EFGH ist $V = \frac{1}{3} \cdot \lvert\overline{FG}\rvert^2 \cdot 1 = \frac{3}{4}\ VE$. |

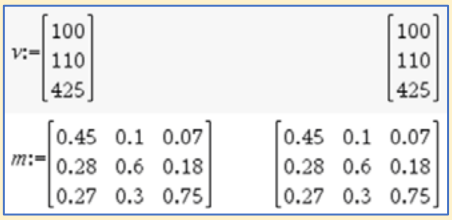
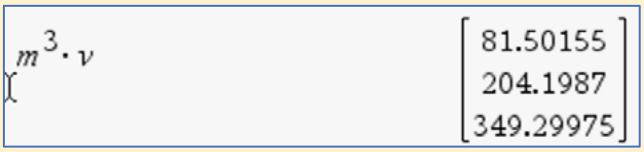
# Analytische Geometrie - erhöhtes Anforderungsniveau

### Analytische Geometrie/Lineare Algebra A1 - (erhöhtes Anforderungsniveau)[8]

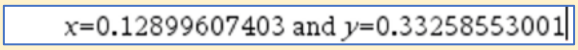
| | |
|---|---|
| **1** | |
| **a**<br>(3 BE) | |
| **Lösung** | Die gegebene Übergangsmatrix $M = \begin{pmatrix} 0{,}45 & 0{,}1 & 0{,}07 \\ 0{,}28 & 0{,}6 & 0{,}18 \\ 0{,}27 & 0{,}3 & 0{,}75 \end{pmatrix}$ und die Verteilung der zu Beginn der Beobachtung in den Wäldern A, B und C lebenden Wildkatzen, die in den Startvektor $v_0 = \begin{pmatrix} 100 \\ 110 \\ 425 \end{pmatrix}$ eingetragen werden, ergeben das Übergangsdiagramm.<br> <br>So erkennt man hieraus, dass z. B. 45% der Wildkatzen, die im Wald A waren, dort bleiben, 28% wandern in den Wald B und 27% in den Wald C ab. |

---

[8] https://www.iqb.hu-berlin.de/abitur/pools2021/abitur/pools2021/mathematik/erhoeht/2021_M_erhoeht_B.pdf

| | |
|---|---|
| **b**<br>(2 BE) | |
| **Lösung** | Wir definieren zunächst den Startvektor und die Übergangsmatrix im *Calculator*.<br><br>$v:=\begin{bmatrix}100\\110\\425\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}100\\110\\425\end{bmatrix}$<br>$m:=\begin{bmatrix}0.45 & 0.1 & 0.07\\0.28 & 0.6 & 0.18\\0.27 & 0.3 & 0.75\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}0.45 & 0.1 & 0.07\\0.28 & 0.6 & 0.18\\0.27 & 0.3 & 0.75\end{bmatrix}$<br>Die Verteilung nach drei Jahren erhält man, indem die Übergangsmatrix dreimal auf die jeweilige Zustandsverteilung angewendet wird, d. h.<br>$\overrightarrow{v_3} = M^3 \cdot \overrightarrow{v_0}$<br><br>$m^3 \cdot v$ $\begin{bmatrix}81.50155\\204.1987\\349.29975\end{bmatrix}$<br>Dies bedeutet $\overrightarrow{v_3} \approx \begin{pmatrix}82\\204\\349\end{pmatrix}$. |
| **c**<br>(4 BE) | |
| **Lösung** | Die Grenzmatrix G existiert nur dann, wenn es eine stabile Verteilung $\vec{v}$ gibt, so dass<br>$M \cdot \vec{v} = \vec{v}$ ist, wobei wir für den Zustandsvektor $\vec{v} = \begin{pmatrix}x\\y\\1-x-y\end{pmatrix}$ annehmen. Dies bedeutet, dass wir die Anteile in den einzelnen Wäldern berechnen: „x entspricht dem Anteil in Wald A, y dem Anteil im Wald B und für den Wald C ergibt sich daher 1-x-y“. |

Die Lösung des linearen Gleichungssystems ergibt



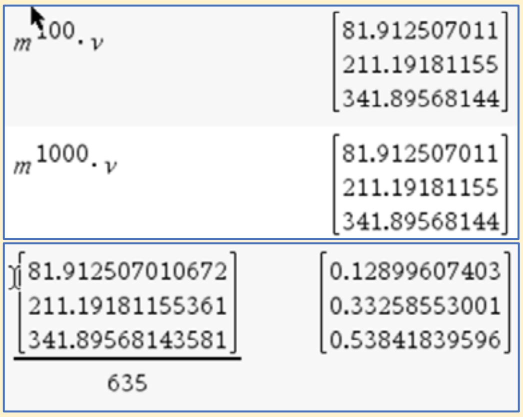
$x=0.12899607403$ and $y=0.33258553001$

Dies bedeutet, dass langfristig etwa 13% der Tiere im Wald A, etwa 33% im Wald B und ca. 54% im Wald C leben.

**Hinweis:**

Eine stabile Verteilung lässt sich auch finden, indem man die Übergangsmatrix sehr oft auf den Zustandsvektor anwendet, z. B. hundert- bzw. tausendmal.

$\overrightarrow{v_{100}} = M^{100} \cdot \overrightarrow{v_0}$ bzw. $\overrightarrow{v_{1000}} = M^{1000} \cdot \overrightarrow{v_0}$

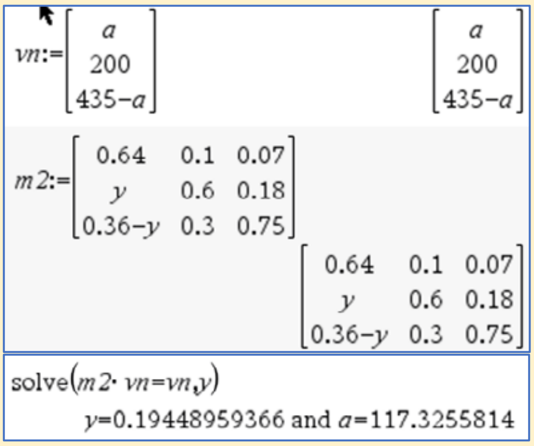


$m^{100} \cdot v \quad \begin{bmatrix} 81.912507011 \\ 211.19181155 \\ 341.89568144 \end{bmatrix}$

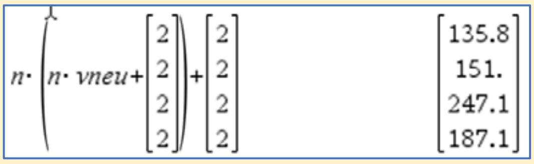
$m^{1000} \cdot v \quad \begin{bmatrix} 81.912507011 \\ 211.19181155 \\ 341.89568144 \end{bmatrix}$

$\dfrac{\begin{bmatrix} 81.912507010672 \\ 211.19181155361 \\ 341.89568143581 \end{bmatrix}}{635} \quad \begin{bmatrix} 0.12899607403 \\ 0.33258553001 \\ 0.53841839596 \end{bmatrix}$

Rechnet man die absolute Anzahl (635 Tiere) anteilmäßig um, erhält man das gleiche Resultat.

| | |
|---|---|
| **d**<br>(4 BE) | |
| **Lösung** | Aus dem Text entnimmt man, dass sich die Übergangsmatrix folgendermaßen verändert:<br>$\begin{pmatrix}0{,}64 & 0{,}1 & 0{,}07\\ y & 0{,}6 & 0{,}18\\ 0{,}36-y & 0{,}3 & 0{,}75\end{pmatrix}$.<br>Für den gesuchten Grenzzustand ist nur bekannt, dass im Wald B konstant 200 der 435 Tiere leben sollen, d. h.:<br>$\begin{pmatrix}a\\ 200\\ 435-a\end{pmatrix}$.<br>Mit dem gleichen Ansatz wie im Aufgabenteil c) zur Berechnung des Grenzzustandes erhält man, dass die Abwanderungsrate von A nach B ca. 19% und die von A nach C 17% betragen muss.<br><br>$vn:=\begin{bmatrix}a\\ 200\\ 435-a\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}a\\ 200\\ 435-a\end{bmatrix}$<br>$m2:=\begin{bmatrix}0.64 & 0.1 & 0.07\\ y & 0.6 & 0.18\\ 0.36-y & 0.3 & 0.75\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}0.64 & 0.1 & 0.07\\ y & 0.6 & 0.18\\ 0.36-y & 0.3 & 0.75\end{bmatrix}$<br>$\text{solve}(m2\cdot vn=vn,y)$<br>$y=0.19448959366$ and $a=117.3255814$ |
| **e**<br>(3 BE) | |
| **Lösung** | Die Übergangsmatrix N wird zunächst auf den Ausgangsvektor $V_0 = \begin{pmatrix}115\\ 200\\ 320\\ 70\end{pmatrix}$ angewendet, und danach wird der Vektor $\begin{pmatrix}2\\ 2\\ 2\\ 2\end{pmatrix}$ addiert.<br>Dies entspricht dem Zustand am Ende des ersten Jahres.<br>$V_1 = N\cdot V_0+\begin{pmatrix}2\\ 2\\ 2\\ 2\end{pmatrix}$. Damit gilt auch $V_2 = N\cdot V_1+\begin{pmatrix}2\\ 2\\ 2\\ 2\end{pmatrix}$.<br>In der letzten Gleichung wird nun $V_1$ durch die Definition ersetzt. |

$V_2 = N \cdot \left( N \cdot V_0 + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$. Dieser Term wird berechnet.



$$n \cdot \left( n \cdot vneu + \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 135.8 \\ 151. \\ 247.1 \\ 187.1 \end{bmatrix}$$

Es ergibt sich eine Verteilung von ca. 136 Tieren in Wald A, 151 in Wald B, 247 in Wald C und 187 in Wald D.

**f**
(3 BE)

**Lösung**

Die Übergangsmatrix N wird zunächst auf den Ausgangsvektor $V_0 = \begin{pmatrix} 115 \\ 200 \\ 320 \\ 70 \end{pmatrix}$ angewendet und dazu wird der Vektor $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ addiert, dies entspricht dem Zustand am Ende des ersten Jahres.

$V_1 = N \cdot V_0 + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$. Damit gilt auch $V_2 = N \cdot V_1 + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ bzw.

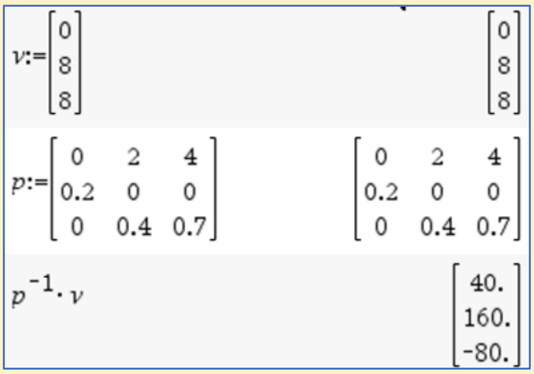
$V_3 = N \cdot V_2 + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Ersetzt man nun in der letzten Gleichung $V_2$ durch die Definition, erhält man

$V_3 = N \cdot \left( N \cdot V_1 + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$. Zum Schluss muss noch $V_1$ ersetzt werden:

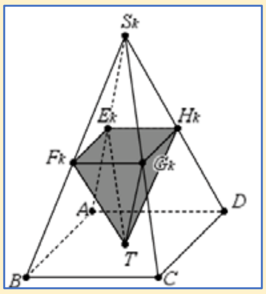
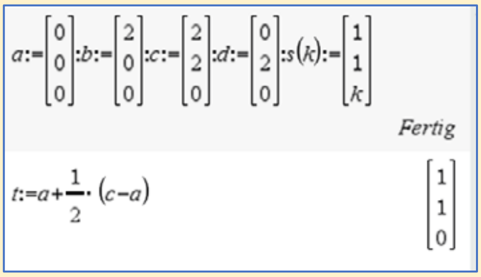
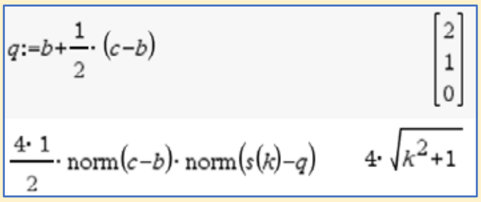
$$V_3 = N \cdot \left( N \cdot \left( N \cdot V_0 + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

| | |
|---|---|
| | Ausmultiplizieren und Ausklammern führt letztlich zu<br>$V_3 = N^3 \cdot \begin{pmatrix} 115 \\ 200 \\ 320 \\ 70 \end{pmatrix} + (N^2 + N + E) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ mit $E = \begin{pmatrix} 1\,0\,0\,0 \\ 0\,1\,0\,0 \\ 0\,0\,1\,0 \\ 0\,0\,0\,1 \end{pmatrix}$.<br>Damit ist gezeigt, dass der Term die Verteilung der Wildkatzen drei Jahre nach der Erweiterung bestimmt. |

| | |
|---|---|
| **2** | |
| **a**<br>(2 BE) | |
| **Lösung** | Um Aussagen zur Entwicklung der Population vor einem oder mehreren Jahren zu bekommen, muss der Zustandsvektor $\overrightarrow{v_0}$ mit der Übergangsmatrix $P^{-1}$ bzw. $P^{-n}$ (n gibt die Anzahl der Jahre vor Beginn der Untersuchung an) multipliziert werden.<br><br>$v:=\begin{bmatrix} 0 \\ 8 \\ 8 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 0 \\ 8 \\ 8 \end{bmatrix}$<br>$p:=\begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0.7 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0.7 \end{bmatrix}$<br>$p^{-1} \cdot v$ $\begin{bmatrix} 40. \\ 160. \\ -80. \end{bmatrix}$<br>Es ergibt sich für das Vorjahr eine negative Anzahl von erwachsenen Tieren, was aber im praktischen Fall unmöglich ist. |
| **b**<br>(4 BE) | |
| **Lösung** | Die Funktion f(r) liefert als Ergebnis nur die Anzahl der Welpen nach r Halbjahren.<br>Dies erreicht man mit der Multiplikation des jeweiligen Zustandsvektors mit dem Vektor [1; 0; 0]. Da für $r \geq 4$ der Quotient aus den Anzahlen zweier aufeinanderfolgender Halbjahre annähernd konstant 1,1 beträgt, handelt es sich bei der Entwicklung der Anzahl der Welpen um ein exponentielles Wachstum. Eine mögliche Aufgabenstellung wäre damit: |

| | |
|---|---|
| | Die zeitliche Entwicklung der Anzahl der Welpen kann ab dem vierten Halbjahr nach Beginn der Untersuchung näherungsweise durch eine Exponentialfunktion beschrieben werden. Bestimmen Sie einen passenden Funktionsterm, der nur die Anzahl der Welpen ausgibt, wobei die Wachstumsrate pro Halbjahr 10% beträgt. |

## Analytische Geometrie/Lineare Algebra A2- (erhöhtes Anforderungsniveau)[9]

| | |
|---|---|
| **1** | |
| **a**<br>(5 BE) | |
| **Lösung** | Der Ortsvektor des Mittelpunktes T der quadratischen Grundfläche ABCD kann z. B. berechnet werden durch<br><br> <br>$\overrightarrow{OT} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Die Pyramide ABCD$S_k$ ist gerade, weil der Mittelpunkt der quadratischen Grundfläche ABCD dieselben x- und y-Koordinaten hat wie die Spitze $S_k$.<br>Der Punkt T liegt also senkrecht unter $S_k$.<br><br>$a:=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}:b:=\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}:c:=\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}:d:=\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}:s(k):=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ k \end{bmatrix}$ Fertig<br>$t:=a+\frac{1}{2}\cdot(c-a)$ $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$<br>Die vier Seitenflächen der Pyramide sind kongruent zueinander, weil es sich um eine gerade, quadratische Pyramide handelt. Der Ortsvektor des Mittelpunktes Q der Seite $\overline{BC}$ wird berechnet durch<br>$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OB} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.<br>Die Mantelfläche hat den Flächeninhalt<br>$M_o(k) = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \lvert\overline{BC}\rvert \cdot \lvert\overline{QS}\rvert = 4 \cdot \sqrt{k^2+1}$ FE.<br><br>$q:=b+\frac{1}{2}\cdot(c-b)$ $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$<br>$\frac{4\cdot 1}{2}\cdot \mathrm{norm}(c-b)\cdot \mathrm{norm}(s(k)-q)$ $4\cdot\sqrt{k^2+1}$ |

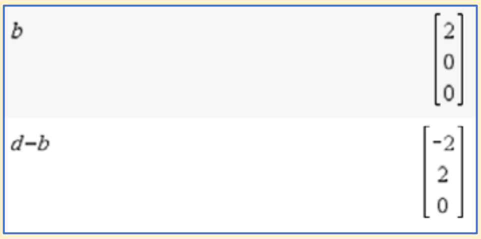
---

[9] https://www.iqb.hu-berlin.de/abitur/pools2021/abitur/pools2021/mathematik/erhoeht/2021_M_erhoeht_B_2.pdf

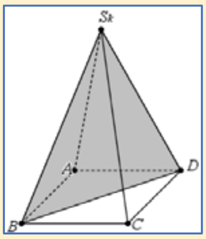
**b**
(3 BE)

**Lösung**

Die Gleichung $\vec{x} = \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$ beschreibt die Gerade g(BD) durch die Punkte B und D, denn $\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}$ ist der Ortsvektor des Punktes B und $\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix}-2\\2\\0\end{pmatrix}$ ein Vielfaches des Richtungsvektors $\overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix}-2\\2\\0\end{pmatrix}$.

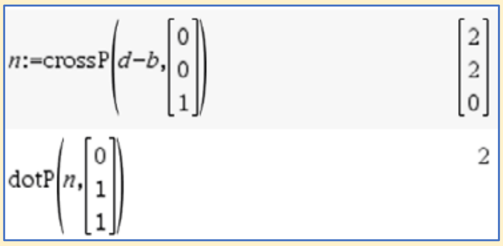


```
b                 [2]
                  [0]
                  [0]
d−b              [-2]
                  [2]
                  [0]
```



Eine Symmetrieebene der Pyramide ABCD$S_k$, die die Gerade g(BD) enthält, wäre die Ebene durch die Punkte B, D und $S_k$. Diese Ebene verläuft senkrecht zur Ebene durch die Punkte A, B, C und D. Für diese Ebene wäre z. B. der Vektor $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ ein zweiter geeigneter Richtungsvektor, weil er senkrecht zur Grundfläche der Pyramide verläuft. Als Gleichung dieser Ebene kommt $\vec{x} = \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ in Frage.

Der zweite in der Aufgabenstellung gegebene Richtungsvektor $\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ liegt aber nicht in dieser Symmetrieebene, denn wenn das so wäre, dann müsste der Normalenvektor $\vec{n} = \overrightarrow{BD} \times \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}$ der Ebene orthogonal zum Vektor $\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ sein. Dies ist aber nicht der Fall, denn das Skalarprodukt $\vec{n}° \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = 2 \neq 0$ hat nicht den Wert null.

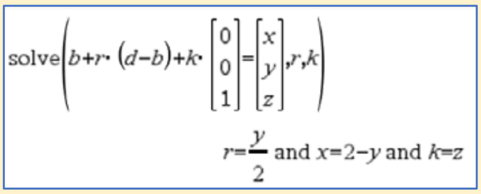


```
n:=crossP(d−b,[0;0;1])      [2]
                            [2]
                            [0]
dotP(n,[0;1;1])              2
```

Es gibt mehrere Möglichkeiten für Symmetrieebenen der Pyramide ABCD$S_k$. Eine davon ist obenstehend schon durch ihre Parametergleichung gegeben. Diese muss nun noch in die Koordinatenform umgewandelt werden.

$$\vec{x} = \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

Dazu wird das Gleichungssystem $\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ nach r und k gelöst: Wir lesen die Koordinatengleichung ab: x = 2 – y bzw. x + y = 2.

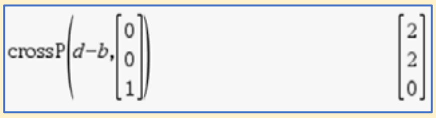


$$\text{solve}\left(b+r\cdot(d-b)+k\cdot\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix},r,k\right)$$

$$r=\frac{y}{2} \text{ and } x=2-y \text{ and } k=z$$

Alternativ kann die Koordinatengleichung auch mithilfe eines Normalenvektors $\vec{n}$ bestimmt werden.

$$\vec{n} = \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$$



$$\text{crossP}\left(d-b,\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right) \qquad \begin{bmatrix}2\\2\\0\end{bmatrix}$$

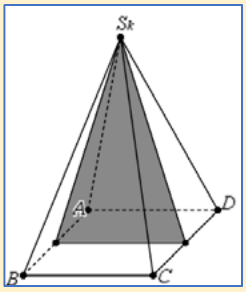
Normalenform der Gleichung der Symmetrieebene:

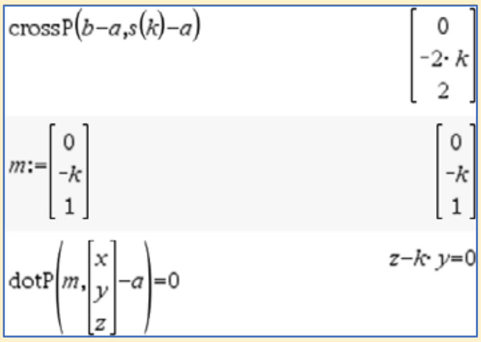
$$\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \circ \left[\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}\right] = 0$$

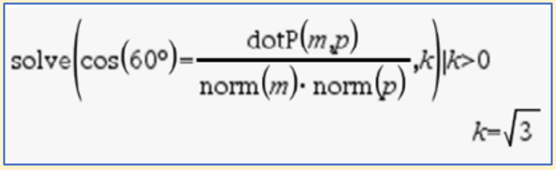
Koordinatenform der Gleichung der Symmetrieebene:
x + y – 2 = 0.

**Hinweis:**

Neben anderen Ebenen kommt auch die Ebene, die durch die Mittelpunkte der Grundkanten $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ sowie die Spitze $S_k$ verläuft, als Symmetrieebene der Pyramide ABCD$S_k$ in Frage. Diese Ebene hat die Gleichung x = 1.

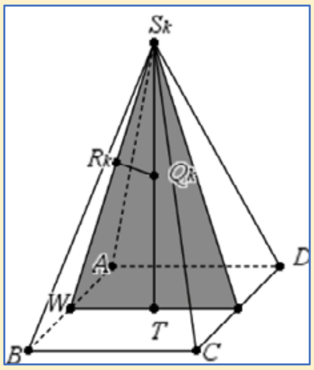


| | |
|---|---|
| **c**<br>(3 BE) | |
| **Lösung** | Für eine Gleichung der Ebene L, in der die Seitenfläche AB$S_k$ liegt, kann der Normalenvektor $\vec{m}$ über das Kreuzprodukt<br>$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AS_k} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2k \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -k \\ 1 \end{pmatrix}$ bestimmt werden zu $\vec{m} = \begin{pmatrix} 0 \\ -k \\ 1 \end{pmatrix}$.<br>Die Koordinatengleichung kann dann mithilfe einer Normalengleichung $\vec{m}\circ\left[\vec{x} - \overrightarrow{OA}\right] = 0$ bestimmt werden zu $-k \cdot y + z = 0$. Nach Division durch (-1) erhalten wir daraus das Kontrollergebnis $k \cdot y - z = 0$.<br><br>$\text{crossP}(b-a,s(k)-a)$ $\quad\begin{bmatrix} 0 \\ -2\cdot k \\ 2 \end{bmatrix}$<br>$m:=\begin{bmatrix} 0 \\ -k \\ 1 \end{bmatrix}$ $\quad\begin{bmatrix} 0 \\ -k \\ 1 \end{bmatrix}$<br>$\text{dotP}\left(m,\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}-a\right)=0$ $\quad z-k\cdot y=0$ |

| | |
|---|---|
| **d**<br>(3 BE) | |
| **Lösung** | Wenn die Seitenfläche AB$S_k$ gegenüber der Grundfläche ABCD um 60° geneigt sein soll, dann müssen auch die Normalenvektoren der Ebenen, in denen die Seitenfläche AB$S_k$ und die Grundfläche ABCD liegen, einen Winkel von 60° einschließen. Ein Normalenvektor der Ebene, in der die Grundfläche ABCD liegt, ist z. B. $\vec{p} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.<br>Der Normalenvektor der Ebene L ist $\vec{m} = \begin{pmatrix} 0 \\ -k \\ 1 \end{pmatrix}$ (siehe Teilaufgabe c).<br>Es muss dann gelten: $\cos(60°) = \left\lvert \frac{\vec{m}\circ\vec{p}}{\lvert\vec{m}\rvert\cdot\lvert\vec{p}\rvert} \right\rvert$.<br><br>$\text{solve}\left(\cos(60°)=\frac{\text{dotP}(m,p)}{\text{norm}(m)\cdot\text{norm}(p)},k\right) \mid k>0$<br>$k=\sqrt{3}$<br>Die Lösung dieser Gleichung ergibt $k = \sqrt{3}$. |

**e**
(3 BE)

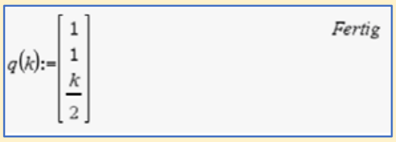
**Lösung**



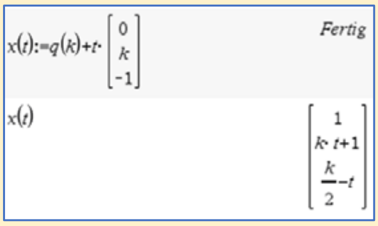
Der Mittelpunkt $Q_k$ der Strecke $\overline{TS_k}$ liegt senkrecht über T, seine z-Koordinate ist wegen der halben Höhe $z = \frac{k}{2}$, also gilt $Q_k\left(1|1|\frac{k}{2}\right)$. Der Fußpunkt des Lotes von $Q_k$ auf die Seitenfläche AB$S_k$ sei $R_k$.
(Es ist wegen der Symmetrie der Pyramide egal, welche der vier Seitenflächen man zur Berechnung auswählt.)
Der Abstand $|\overline{Q_kR_k}|$ entspricht dem Abstand des Punktes $Q_k$ von der Ebene L: $k \cdot y - z = 0$ in Teilaufgabe c.
Die Hesse'sche Normalenform von L ist $\frac{k \cdot y - z}{\sqrt{k^2+1}} = 0$.
Setzt man hier die Koordinaten von $Q_k\left(1|1|\frac{k}{2}\right)$ ein, so ergibt sich der Abstand $|\overline{Q_kR_k}|$.
$|\overline{Q_kR_k}| = \frac{k \cdot 1 - \frac{k}{2}}{\sqrt{k^2+1}} = \frac{k}{2 \cdot \sqrt{k^2+1}}$.

Alternativ lässt sich der Abstand des Punktes $Q_k$ von der Ebene L: $k \cdot y - z = 0$ in Teilaufgabe c auch durch das Lotfußpunktverfahren ermitteln.

Lotgerade $\ell$ von $Q_k$ zu Ebene L hat die Gleichung $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \frac{k}{2} \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ k \\ -1 \end{pmatrix}$.



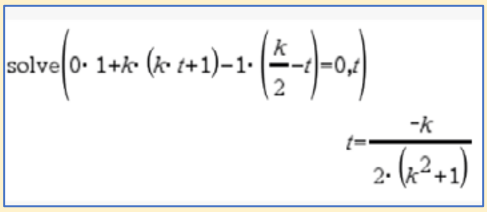
$q(k) := \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \frac{k}{2} \end{bmatrix}$ Fertig



$x(t) := q(k) + t \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ k \\ -1 \end{bmatrix}$ Fertig

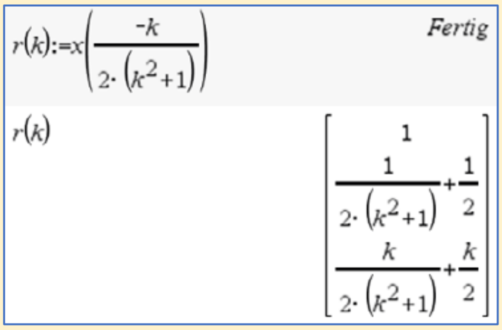
$x(t)$ $\begin{bmatrix} 1 \\ k \cdot t+1 \\ \frac{k}{2}-t \end{bmatrix}$

Sie schneidet die Ebene L im Lotfußpunkt $R_k$. Dessen Koordinaten ergeben sich durch Einsetzen der Koordinaten von $\ell$ in die Gleichung der Ebene L:



$\text{solve}\left(0 \cdot 1 + k \cdot (k \cdot t+1) - 1 \cdot \left(\frac{k}{2} - t\right) = 0, t\right)$

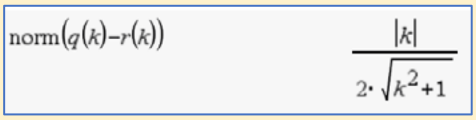
$t = \frac{-k}{2 \cdot (k^2+1)}$



$r(k) := x\left(\frac{-k}{2 \cdot (k^2+1)}\right)$ Fertig

$r(k)$ $\begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2 \cdot (k^2+1)} + \frac{1}{2} \\ \frac{k}{2 \cdot (k^2+1)} + \frac{k}{2} \end{bmatrix}$

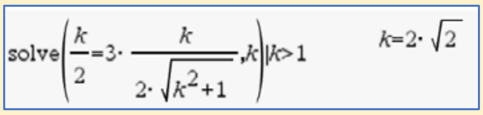
Der Abstand $|\overline{Q_kR_k}|$ ist dann $|\overline{Q_kR_k}| = \frac{k}{2 \cdot \sqrt{k^2+1}}$.



norm(q(k)−r(k)) $\frac{|k|}{2\cdot\sqrt{k^2+1}}$

Laut Aufgabenstellung soll gelten $|\overrightarrow{TQ_k}| = 3\cdot|\overrightarrow{R_kQ_k}|$.
Mit $|\overrightarrow{TQ_k}| = \frac{k}{2}$ folgt $\frac{k}{2} = 3\cdot\frac{k}{2\cdot\sqrt{k^2+1}}$ mit k > 1.

Daraus ergibt sich $k = 2\cdot\sqrt{2}$.



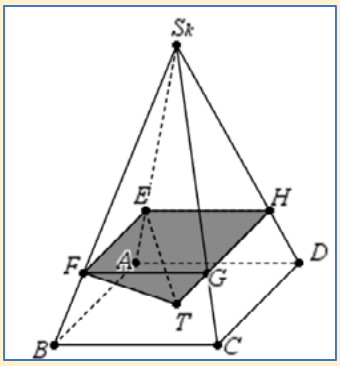
solve$\left(\frac{k}{2}=3\cdot\frac{k}{2\cdot\sqrt{k^2+1}},k\right)|k>1$ $k=2\cdot\sqrt{2}$

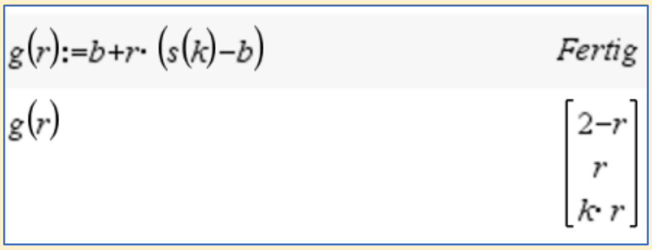
**f**
(3 BE)

**Lösung**

Die Gleichung der Geraden, auf der die Punkte $F_k$ und $S_k$ liegen, ist gegeben durch

$$g(F_kS_k)\colon \vec{x} = \overrightarrow{OB} + r\cdot\overrightarrow{BS_k} = \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\\k\end{pmatrix}.$$

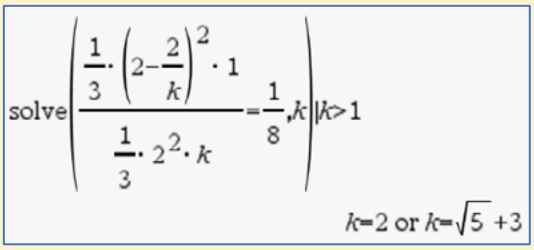




$g(r):=b+r\cdot(s(k)-b)$ Fertig

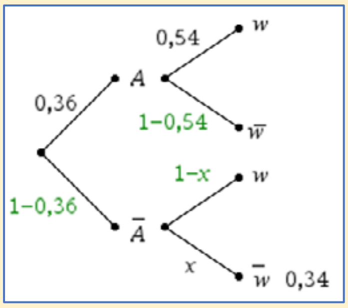
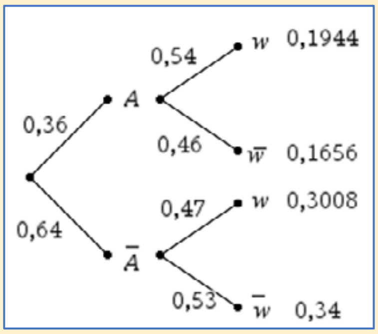
$g(r)$ $\begin{bmatrix}2-r\\r\\k\cdot r\end{bmatrix}$

Für z = 1 können die Koordinaten des gesuchten Punktes bestimmt werden:
Aus z = 1 folgt $k\cdot r = 1$, also $r = \frac{1}{k}$. Damit ergeben sich die Koordinaten des gesuchten Punktes zu $F_k\left(2-\frac{1}{k}|\frac{1}{k}|1\right)$.

| **g**<br>(4 BE) | |
|---|---|
| **Lösung** | In dieser Teilaufgabe gilt immer noch z = 1. Der Punkt $F_k$ hat deshalb nach Teilaufgabe f die Koordinaten $F_k\left(2-\frac{1}{k}\middle\vert\frac{1}{k}\middle\vert 1\right)$.<br>Aus Symmetriegründen gilt für $E_k$: $E_k\left(\frac{1}{k}\middle\vert\frac{1}{k}\middle\vert 1\right)$.<br>Damit hat die Grundkante $\overline{E_kF_k}$ die Länge $d=2-2\cdot\frac{1}{k}$.<br>Das Volumen $V_1$ der Pyramide $E_kF_kG_kH_kT$ ist $V_1=\frac{1}{3}\cdot\left(2-\frac{2}{k}\right)^2\cdot 1$.<br>Das Volumen $V_2$ der Pyramide ABCD$S_k$ ist $V_2=\frac{1}{3}\cdot(2)^2\cdot k$.<br>Nun soll gelten $\frac{V_1}{V_2}=\frac{1}{8}$.<br><br>Damit ergeben sich für k zwei Lösungen, $k_1=2$ und $k_2=3+\sqrt{5}$.<br><br>solve$\left(\frac{\frac{1}{3}\cdot\left(2-\frac{2}{k}\right)^2\cdot 1}{\frac{1}{3}\cdot 2^2\cdot k}=\frac{1}{8},k\right)\vert k>1$<br>$k=2$ or $k=\sqrt{5}+3$ |

# Stochastik - grundlegendes Anforderungsniveau

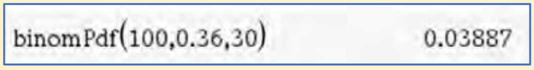
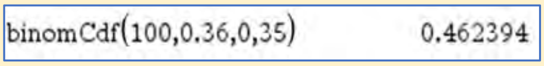
## Stochastik - A1 (grundlegendes Anforderungsniveau)[10]

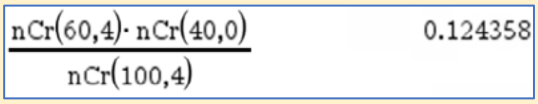
| | |
|---|---|
| **1** | |
| **a**<br>(2 BE) | |
| **Lösung** | Es ist sinnvoll, auch mit Blick auf Teilaufgabe b, ein Baumdiagramm anzulegen.<br>A: Abitur; w: weiblich<br>Gegeben sind P(A) = 0,36, $P_A(w) = 0{,}34$<br>sowie $P(\bar{A} \cap \bar{w}) = 0{,}34$.<br>Gesucht ist $P_{\bar{A}}(\bar{w}) = x$.<br>Wegen $P(\bar{A} \cap \bar{w}) = P(\bar{A}) \cdot P_{\bar{A}}(\bar{w})$ folgt<br>$(1 - 0{,}36) \cdot x = 0{,}34 \Longrightarrow x = \frac{0{,}34}{0{,}64} = 0{,}53125 \approx 0{,}53$<br><br> |
| **b**<br>(3 BE) | |
| **Lösung** | <br> |

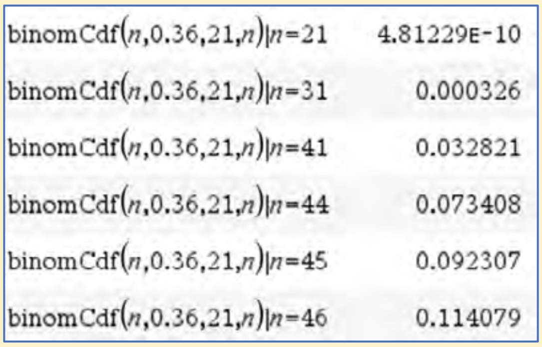
---

[10] https://www.iqb.hu-berlin.de/abitur/pools2021/abitur/pools2021/mathematik/grundlegend/2021_M_grundlege_19.pdf

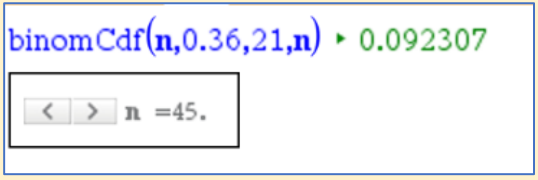
| | |
|---|---|
| **c**<br>(3 BE) | |
| **Lösung** | Dem Baumdiagramms lässt sich entnehmen, dass der Anteil der weiblichen Personen sich aus der Summe der beiden Pfadwahrscheinlichkeiten $P(A \cap w)$ und $P(\bar{A} \cap w)$ ergibt:<br>$0{,}36 \cdot 0{,}54 + 0{,}64 \cdot 0{,}47 = 0{,}4952$.<br>Damit sind $0{,}4952 \cdot 27000 \approx 13370$ weibliche Personen unter den 27000 Personen der Bevölkerungsgruppe. |

| | |
|---|---|
| **d**<br>(1 BE) | |
| **Lösung** | Die Zufallsgröße X beschreibt die Anzahl der Personen mit Abitur unter den befragten Personen. X ist binomialverteilt mit n = 100 und p = 0,36.<br>Gesucht ist $P(X = 30) \approx 0{,}04$<br><br>binomPdf(100,0.36,30) 0.03887 |
| **e**<br>(3 BE) | |
| **Lösung** | Der Erwartungswert ist $E(X) = 100 \cdot 0{,}36 = 36$.<br>Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit $P(X < 36)$.<br><br>binomCdf(100,0.36,0,35) 0.462394<br>Ergebnis: $P(X < 36) \approx 0{,}46$ |

| | |
|---|---|
| **f**<br>(2 BE) | |
| **Lösung** | Wenn sich unter den 100 Personen 40 mit Abitur befinden, so sind es 60 Personen ohne Abitur. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit kann mithilfe der hypergeometrischen Verteilung („Lotto-Formel“) berechnet werden.<br>$\frac{\binom{60}{4}\cdot\binom{40}{0}}{\binom{100}{4}} \approx 0{,}12$<br><br>$\frac{\mathrm{nCr}(60,4)\cdot \mathrm{nCr}(40,0)}{\mathrm{nCr}(100,4)}$ 0.124358 |
| **g**<br>(2 BE) | |
| **Lösung** | Das Zufallsexperiment beschreibt die Wahrscheinlichkeit, dass unter sechs aus 100 zufällig ausgewählten Personen genau zwei Abitur haben und vier kein Abitur haben. |

| | |
|---|---|
| **h**<br>(4 BE) | |
| **Lösung** | Da unter den n zufällig ausgewählten Personen mehr als 20 mit Abitur sein sollen, macht es Sinn, als Mindestgröße n = 21 anzusetzen. Dann kann z. B. durch systematisches Probieren n so weit erhöht werden, bis $P(X \geq 21)$ letztmalig kleiner als 0,1 ist. Das ist für n = 45 der Fall. Alle Werte, die für n in Frage kommen, liegen im Intervall $21 \leq n \leq 45$.<br><br>`binomCdf(n,0.36,21,n)|n=21    4.81229E-10`<br>`binomCdf(n,0.36,21,n)|n=31    0.000326`<br>`binomCdf(n,0.36,21,n)|n=41    0.032821`<br>`binomCdf(n,0.36,21,n)|n=44    0.073408`<br>`binomCdf(n,0.36,21,n)|n=45    0.092307`<br>`binomCdf(n,0.36,21,n)|n=46    0.114079` |

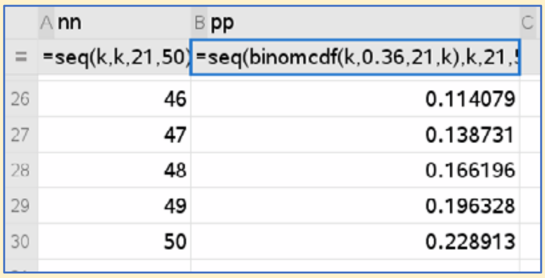
Alternative 1: Schieberegler verwenden:



binomCdf(n,0.36,21,n) ▸ 0.092307

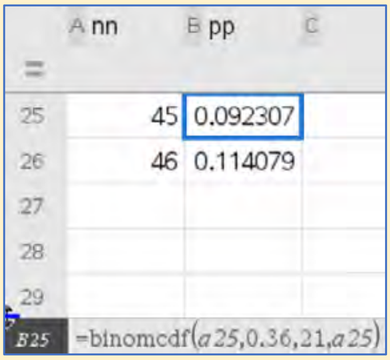
n =45.

Alternative 2: Tabellenkalkulation verwenden.



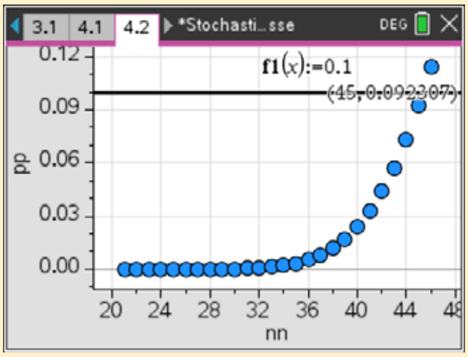
|  | A nn | B pp | C |
|---|---|---|---|
| = | =seq(k,k,21,50) | =seq(binomcdf(k,0.36,21,k),k,21, |  |
| 26 | 46 | 0.114079 |  |
| 27 | 47 | 0.138731 |  |
| 28 | 48 | 0.166196 |  |
| 29 | 49 | 0.196328 |  |
| 30 | 50 | 0.228913 |  |

Oder so:

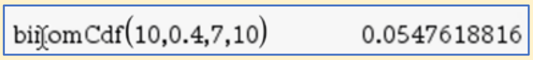


|  | A nn | B pp | C |
|---|---|---|---|
| = |  |  |  |
| 25 | 45 | 0.092307 |  |
| 26 | 46 | 0.114079 |  |
| 27 |  |  |  |
| 28 |  |  |  |
| 29 |  |  |  |

B25 =binomcdf(a25,0.36,21,a25)



## Stochastik -Beispiel 2 (grundlegendes Anforderungsniveau)[11]

| | |
|---|---|
| **1** | |
| **a**<br>(2 BE) | |
| **Lösung** | Die Zufallsgröße X: „Anzahl der gewonnenen Sterne bei 10 Versuchen“ ist binomialverteilt, es gilt: $X \sim B_{10;0.4}$ und gesucht ist $P(X > 6)$.<br>binomCdf(10,0.4,7,10) 0.0547618816<br>Die Wahrscheinlichkeit, dass mehr als 6 Sterne gewonnen werden, beträgt ca. 5,5%. |
| **b**<br>(2 BE) | |
| **Lösung** | Die Aussage ist falsch. Die Wahrscheinlichkeit, einen Stern zu gewinnen, ist bei allen Versuchen gleich groß. Damit besteht auch nächsten Sonntag die gleiche Wahrscheinlichkeit, 8 Sterne zu gewinnen, auch wenn diese Wahrscheinlichkeit mit ca. 1% sehr gering ist.<br>binomPdf(10,0.4,8) 0.010616832 |
| **c**<br>(3 BE) | |
| **Lösung** | Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Spieler 5 Sterne gewinnt, kann berechnet werden mit P(X=5).<br>binomPdf(10,0.4,5) 0.2006581248<br>Es ergibt sich eine Wahrscheinlichkeit von ca. 20%.<br>Die Zufallsgröße Y: „Anzahl der Spieler, die genau 5 Sterne bei vier Versuchen gewinnen“, ist ebenfalls binomialverteilt,<br>es gilt $Y \sim B_{4;0.2}$ und gesucht ist $P(Y = 2)$.<br>binomPdf(4,0.2,2) 0.1536<br>Die gesuchte Wahrscheinlichkeit beträgt ca. 15.4%. |

---

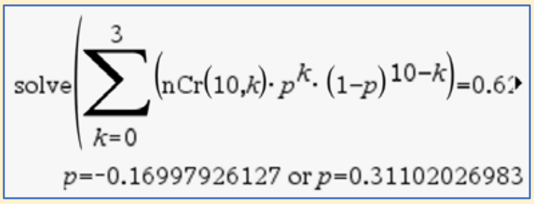
[11] https://www.iqb.hu-berlin.de/abitur/pools2021/abitur/pools2021/mathematik/grundlegend/2021_M_grundlege_20.pdf

**d**
(3 BE)

**Lösung**

Gesucht wird die unbekannte Wahrscheinlichkeit p für die Zufallsgröße Z: „Anzahl der gewonnenen Sterne bei 10 Versuchen“, die auch binomialverteilt ist, es gilt $Z{\sim}B_{10;p}$ und gesucht ist $P(X \leq 3)$.

Für die gesuchte Wahrscheinlichkeit muss die folgende Gleichung, die die Summenwahrscheinlichkeit berechnet, nach p gelöst werden.
$\sum_{k=0}^{3}\binom{10}{k}\cdot p^{k}\cdot(1-p)^{10-k}$=0,62



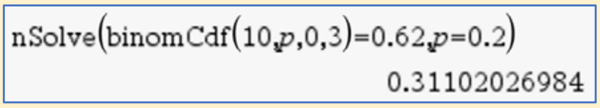
$\text{solve}\left(\sum_{k=0}^{3}\left(\text{nCr}(10,k)\cdot p^{k}\cdot (1-p)^{10-k}\right)=0.6▸\right.$

$p=-0.16997926127$ or $p=0.31102026983$

Die negative Lösung entfällt, damit erhält man für p $\approx 31\%$.

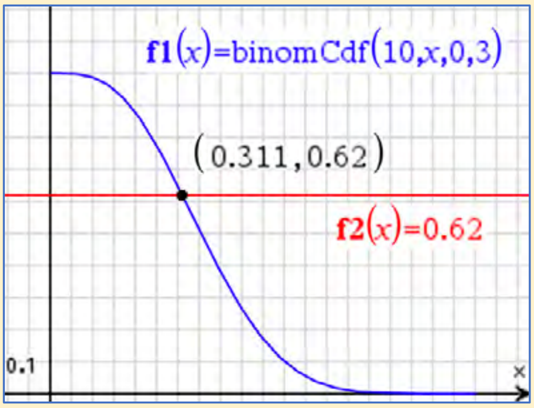
**Hinweise:**

Alternative Lösung 1:
Nutzung des *nSolve*-Befehls in Verbindung mit *binomCdf()*, hier muss allerdings für p ein günstiger Startwert gewählt werden.

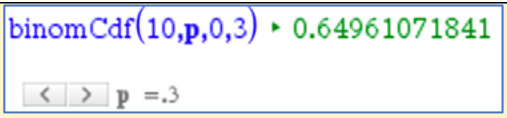


```
nSolve(binomCdf(10,p,0,3)=0.62,p=0.2)
                              0.31102026984
```

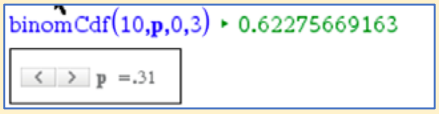
Alternative Lösung 2:
Grafische Lösung: Es wird die Funktion *binomCdf*(10,x,0,3) dargestellt und deren Schnittpunkt mit dem y-Wert von 0,62 gesucht.



Alternative Lösung 3
Systematisches Probieren mit Schieberegler im Notes-Fenster:



```
binomCdf(10,p,0,3) ▸ 0.64961071841
p =.3
```



```
binomCdf(10,p,0,3) ▸ 0.62275669163
p =.31
```

**e**
(2 BE)

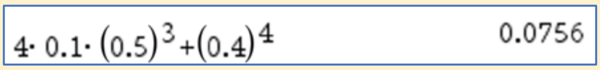
**Lösung**

Damit der Spieler an drei aufeinanderfolgenden Tagen von Tag zu Tag weniger Bonuspunkte bekommt, gibt es nur die eine Möglichkeit, am ersten Tag 50, am zweiten Tag 40 und am dritten Tag 10 Bonuspunkte zu gewinnen.
Damit erhält man P(E)= $0{,}1 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}5 = 0{,}02$.

**f**
(4 BE)

**Lösung**

Um an vier Tagen genau 80 Bonuspunkte zu bekommen, gibt es bei der gegebenen Anzahl von Bonuspunkten nur zwei Möglichkeiten:
1. An einem der vier Tage 50 Punkte und an den übrigen Tagen jeweils 10 Punkte gewinnen.
2. An allen vier Tagen jeweils 20 Punkte zu gewinnen.
Für den ersten Fall existieren vier Möglichkeiten, daher berechnet sich die gesuchte Wahrscheinlichkeit mit:
P(F) = $4 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}5^3 + \ 0{,}4^4 \approx 0{,}08$.



```
4· 0.1· (0.5)^3+(0.4)^4          0.0756
```

**g**
(4 BE)

**Lösung**

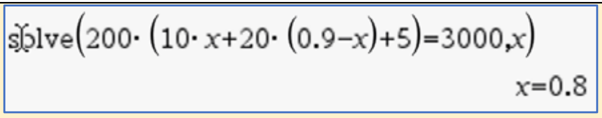
Es wird der Erwartungswert E(X) für 200 Spieltage gesucht. Es gilt:

| $x_i$: Anzahl der Bonuspunkte: | 10 | 20 | 50 |
|---|---|---|---|
| P(X=$x_i$) | x | 0,9-x | 0,1 |

Für den gesuchten Erwartungswert gilt:

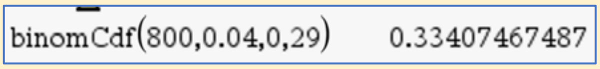
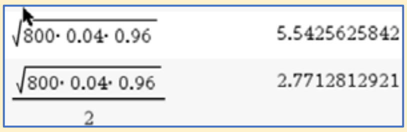
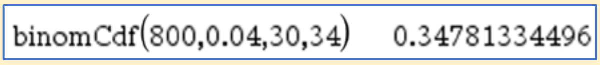
$$200 \cdot (10 \cdot x + 20 \cdot (0{,}9 - x) + 0{,}1 \cdot 50) = 3000$$

Die Lösung der Gleichung nach x liefert x = 0,8.

| | |
|---|---|
| | <br>$\text{solve}(200\cdot(10\cdot x+20\cdot(0.9-x)+5)=3000,x)$<br>$x=0.8$<br>Damit muss die Wahrscheinlichkeit für 10 Bonuspunkte auf 80% erhöht und die für 20 Bonuspunkte auf 10% gesenkt werden. |

# Stochastik - erhöhtes Anforderungsniveau

### Stochastik - Beispiel 1 (erhöhtes Anforderungsniveau)[12]

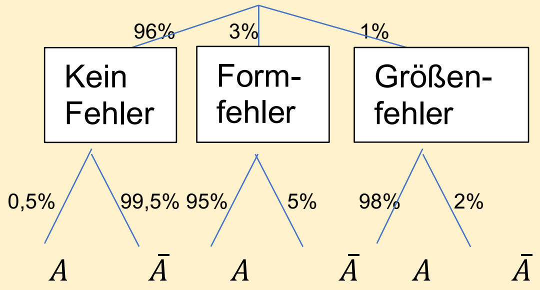
| | |
|---|---|
| **1** | |
| | |
| **a**<br>(2 BE) | |
| **Lösung** | Die Zufallsgröße X: „Anzahl der fehlerhaften unter den ausgewählten Kugeln“ ist binomialverteilt, es gilt $X \sim B_{800;0,04}$ und gesucht ist $P(X < 30)$.<br><br>binomCdf(800,0.04,0,29) 0.33407467487<br>Die gesuchte Wahrscheinlichkeit beträgt ca. 33,4% |
| **b**<br>(5 BE) | |
| **Lösung** | Für den Erwartungswert einer binomialverteilten Zufallsgröße gilt $\mu = n \cdot p$ und für die Standardabweichung $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$.<br>Damit ergibt sich $\mu = 800 \cdot 0{,}04 = 32$ und $\sigma = \sqrt{800 \cdot 0{,}04 \cdot 0{,}96} \approx 5{,}6$ und damit ist $\frac{\sigma}{2} \approx 2{,}8$.<br><br>$\sqrt{800\cdot 0.04\cdot 0.96}$ 5.5425625842<br>$\frac{\sqrt{800\cdot 0.04\cdot 0.96}}{2}$ 2.7712812921<br>Damit die Abweichung höchstens die halbe Standardabweichung beträgt, muss man die Wahrscheinlichkeit P$(30 \leq X \leq 34)$ berechnen, da für die untere Grenze 32 – 2,8 = 29,2 gilt. Aber wegen der Ganzzahligkeit der Anzahl der Kugeln und der Richtung der Ungleichheitszeichen muss man 30 als untere Grenze wählen, analog ergibt sich die obere Grenze.<br><br>binomCdf(800,0.04,30,34) 0.34781334496<br>Die gesuchte Wahrscheinlichkeit beträgt ca. 34,8%. |

---

[12] https://www.iqb.hu-berlin.de/abitur/pools2021/abitur/pools2021/mathematik/erhoeht/2021_M_erhoeht_B_7.pdf

**c**
(4 BE)

**Lösung**



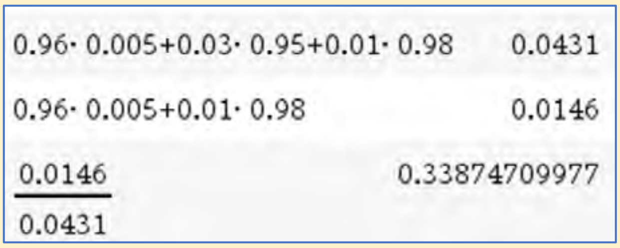
A: Eine Kugel wird aussortiert.
Da 4% aller Kugeln fehlerhaft sind, Formfehler zu 3% auftreten, ergibt sich, dass bei 1% der Kugeln Größenfehler vorliegen. Damit hat man die Wahrscheinlichkeiten für die erste Stufe im Baumdiagramm ermittelt.
Die zweite Stufe ergibt sich aus den im Text angegebenen Wahrscheinlichkeiten.

**d**
(3 BE)

**Lösung**

Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Kugel aussortiert wird, berechnet sich mit
$P(A) = 0{,}96 \cdot 0{,}005 + 0{,}03 \cdot 0{,}95 + 0{,}01 \cdot 0{,}98 = 0{,}0431.$
Die Wahrscheinlichkeit, dass eine aussortierte Kugel gleichzeitig keinen Formfehler hat, berechnet sich mit
$P(B) = 0{,}96 \cdot 0{,}005 + 0{,}01 \cdot 0{,}98 = 0{,}0146.$
Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ergibt sich dann aus

$$\frac{P(B)}{P(A)} \approx 33{,}9\%$$

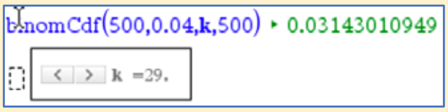
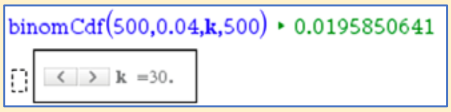


$0.96 \cdot 0.005+0.03 \cdot 0.95+0.01 \cdot 0.98$ 0.0431

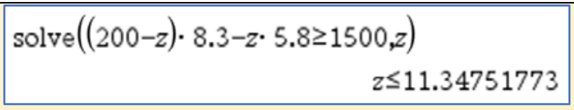
$0.96 \cdot 0.005+0.01 \cdot 0.98$ 0.0146

$\frac{0.0146}{0.0431}$ 0.33874709977

| **e**<br>(3 BE) | |
|---|---|
| **Lösung** | Ein Fehler 2. Art liegt hier vor, wenn die Anzahl fehlerhafter Kugeln zufällig im Annahmebereich/Nichtverwerfungsbereich der Nullhypothese liegt, obwohl in Wirklichkeit der Anteil fehlerhafter Kugeln größer als 4% ist.<br>Das Unternehmen geht dann irrtümlich davon aus, dass der Anteil der fehlerhaften Kugeln nicht größer als 4% ist.<br>Als Konsequenz daraus wird die Produktion nicht unterbrochen, obwohl die Qualität nicht den Anforderungen entspricht, d. h. es könnten weitere Reklamationen eintreten. |

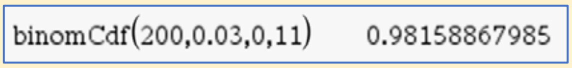
| **f**<br>(4 BE) | |
|---|---|
| **Lösung** | Es liegt ein einseitiger Test vor mit der Nullhypothese $H_0$: $p \leq 0{,}04$ und der Alternativhypothese $H_1$: $p > 0{,}04$. Dies bedeutet, dass rechtsseitig getestet werden muss. Das Signifikanzniveau beträgt 0,03.<br>Für den Verwerfungsbereich muss damit der Wert für k bestimmt werden, für den gilt:<br>$P(Y \geq k) \leq 0{,}03$.<br>Daher ist die Ungleichung I falsch.<br>Die Ungleichung II ist ebenfalls falsch, es müsste $P(Y < k) > 0{,}97$ heißen.<br>**Hinweis:**<br>Zur Kontrolle könnte man den Wert für k bestimmen:<br><br>binomCdf(500,0.04,k,500) ▸ 0.03143010949<br>k =29.<br><br>binomCdf(500,0.04,k,500) ▸ 0.0195850641<br>k =30.<br>Die Entscheidungsregel lautet dann: Wenn höchstens 29 fehlerhafte Kugeln in der Stichprobe gefunden werden, geht man davon aus, dass der Anteil der fehlerhaften Kugeln höchstens 4% beträgt. |

| **g**<br>(4 BE) | |
|---|---|
| **Lösung** | Bezeichnet man die Zufallsgröße, die die Anzahl z der zurückgegebenen Packungen beschreibt, mit Z, dann gilt:<br>$(200 - z) \cdot 8{,}3 - z \cdot 5{,}8 \geq 1500$ |



```
solve((200−z)· 8.3−z· 5.8≥1500,z)
                        z≤11.34751773
```

Es dürfen also höchstens 11 Packungen zurückgegeben werden.
$Da\ Z \sim B_{200;0,03}$ ist, wird $P(Z \leq 11)$ gesucht.

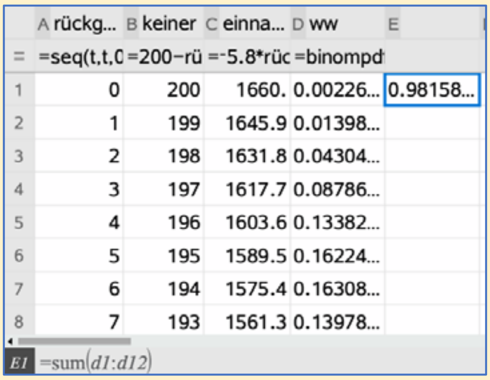


```
binomCdf(200,0.03,0,11)     0.98158867985
```

Damit beträgt die gesuchte Wahrscheinlichkeit ca. 98,2%.

Alternative Lösung:
Die gleiche Lösung ist auch mittels Tabellenkalkulation denkbar.

(Man betrachtet alle möglichen Fälle für die Anzahl der zurückgegebenen Packungen von 0 bis 200 (Spalte A), daraus ergibt sich die Anzahl der nicht zurückgegebenen Packungen in Spalte B. In Spalte C berechnet man die Einnahmen und erkennt, dass maximal 11 Packungen zurückgegeben werden dürfen. In Spalte D ermittelt man die Einzelwahrscheinlichkeiten und in Spalte E werden diese Werte für 0, 1, ...,11 Rückgaben summiert.)



| | A rückg... | B keiner | C einna... | D ww | E |
|---|---|---|---|---|---|
| = | =seq(t,t,0 | =200−rü | =-5.8*rüc | =binompd | |
| 1 | 0 | 200 | 1660. | 0.00226... | 0.98158... |
| 2 | 1 | 199 | 1645.9 | 0.01398... | |
| 3 | 2 | 198 | 1631.8 | 0.04304... | |
| 4 | 3 | 197 | 1617.7 | 0.08786... | |
| 5 | 4 | 196 | 1603.6 | 0.13382... | |
| 6 | 5 | 195 | 1589.5 | 0.16224... | |
| 7 | 6 | 194 | 1575.4 | 0.16308... | |
| 8 | 7 | 193 | 1561.3 | 0.13978... | |

E1 =sum(d1:d12)

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 12 | 11 | 189 | 1504.9 | 0.02171... | |
| 13 | 12 | 188 | 1490.8 | 0.01057... | |
| 14 | 13 | 187 | 1476.7 | 0.00473... | |

## Stochastik -Beispiel 2 (erhöhtes Anforderungsniveau)[13]

**1**

**a**
(3 BE)

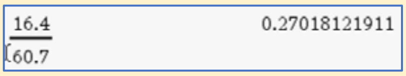
**Lösung**

| | $A$ | $\bar{A}$ | |
|---|---|---|---|
| $B$ | **17%** | 10% | **27%** |
| $\bar{B}$ | 71% | 2% | 73% |
| | **88%** | 12% | 100% |

Mit den Bezeichnungen

A: Person nutzt das Internet
B: Person ist mindestens 65 Jahre alt,

lassen sich aus Text zunächst die beiden Werte 17% für $A \cap B$ (die Person nutzt das Internet und ist mindestens 65 Jahre alt) und 88% für die Anzahl der Internetnutzer eintragen.
Der Anteil der Personen, die mindestens 65 Jahre alt sind, kann berechnet werden, da von den 60,4 Millionen 16,4 Millionen mindestens 65 Jahre alt sind. Der Anteil beträgt ca. 27%.



$\frac{16.4}{60.7}$ 0.27018121911

Mit diesen drei Werten kann die Vierfeldertafel vollständig weiter ausgefüllt werden.

**b**
(3 BE)

**Lösung**

Zwei Ereignisse A und B sind genau dann stochastisch unabhängig, wenn $P_B(A) = P(A)$ bzw. gleichwertig $P_A(B) = P(B)$ gilt.

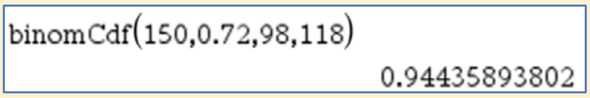
Auch die Multiplikationsregel $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ kann zur Beantwortung der Frage genutzt werden.
Da $P_B(A) = \frac{0,17}{0,27} \approx 0,63$ und P(A) = 0,88 beträgt, sind A und B stochastisch abhängig voneinander.

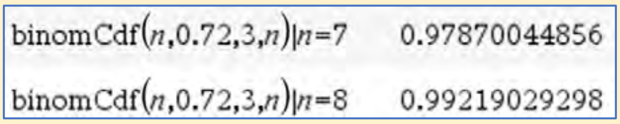
Alternative Lösung:
$P(A \cap B)$= 0,17
$P(A) \cdot P(B)$=$0,88 \cdot 0,27 \approx 0,24$
Auch damit ist der Nachweis erbracht, dass A und B stochastisch abhängig voneinander sind.

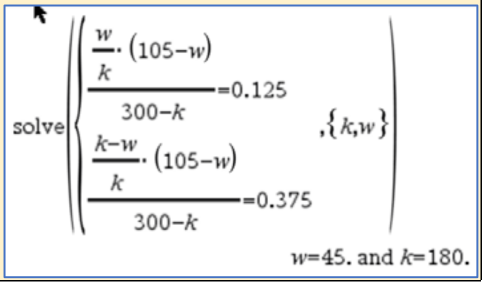
---

[13] https://www.iqb.hu-berlin.de/abitur/pools2021/abitur/pools2021/mathematik/erhoeht/2021_M_erhoeht_B_8.pdf

| | |
|---|---|
| **c**<br>(2 BE) | |
| **Lösung** | Das Ereignis $\bar{A} \cap B$ beschreibt im Sachzusammenhang eine Person, die mindestens 65 Jahre alt ist und das Internet nicht nutzt. |

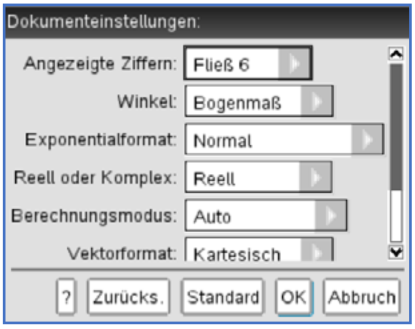
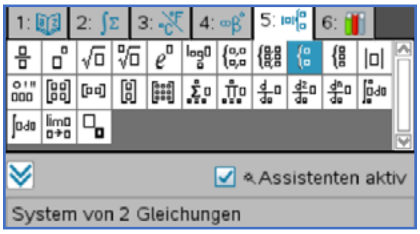
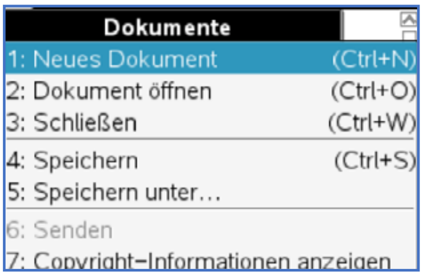
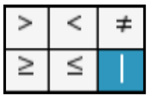
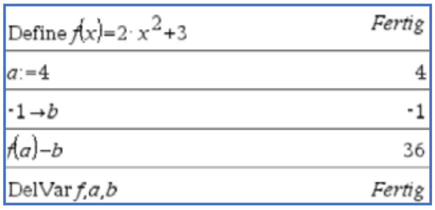
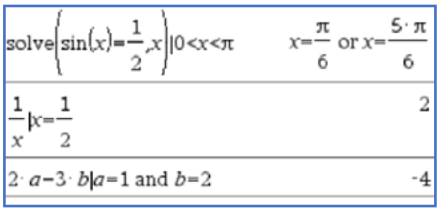
| | |
|---|---|
| **d**<br>(2 BE) | |
| **Lösung** | Es wird die bedingte Wahrscheinlichkeit $P_{\bar{B}}(A)$=$\frac{P(A\cap\bar{B}}{P(\bar{B})}$ gesucht.<br>Der Vierfeldertafel entnimmt man: $P_{\bar{B}}(A)$=$\frac{0{,}71}{0{,}73} \approx 0{,}97$. |
| **e**<br>(4 BE) | |
| **Lösung** | Die Zufallsgröße X: „Anzahl derjenigen, die das Internet mit einem Smartphone nutzen“ ist binomialverteilt, es gilt $X{\sim}B_{150;0{,}72}$.<br>Mit dem Erwartungswert $\mu = 150 \cdot 0{,}72 = 108$ und der geforderten Abweichung vom Erwartungswert von höchstens 10% muss die Wahrscheinlichkeit $P(98 \leq X \leq 118$ berechnet werden.<br><br>**Hinweis:**<br><br>Um z. B. die untere Grenze des Intervalls zu ermitteln, ergibt sich 108 – 10,8 = 97,2. Wegen der Ganzzahligkeit und der geforderten Genauigkeit von höchstens 10% Abweichung, muss man als untere Grenze 98 verwenden, analog ergibt sich als obere Grenze 118.)<br><br><br>binomCdf(150,0.72,98,118)<br>0.94435893802<br><br>Es ergibt sich ein Wert von ca. 94,4%. |

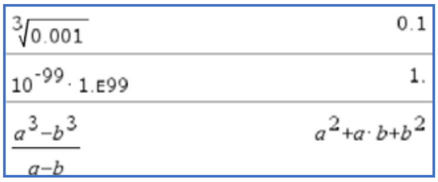
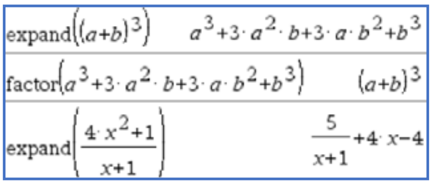
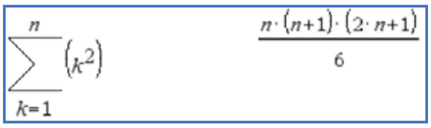
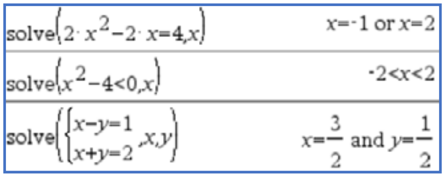
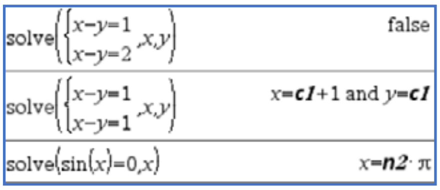
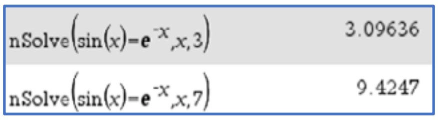
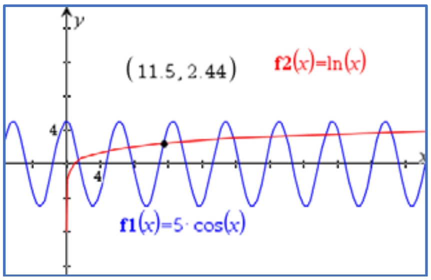
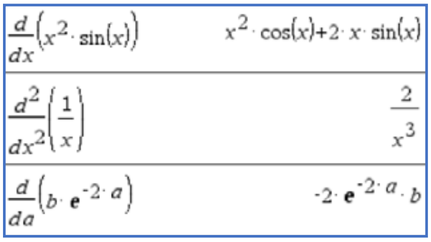
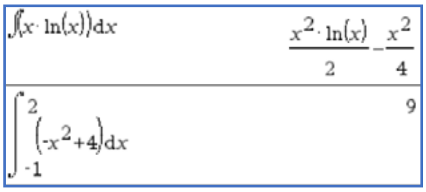
| | |
|---|---|
| **f**<br>(4 BE) | |
| **Lösung** | Diese mindestens-mindestens-mindestens-Aufgabe lässt sich am einfachsten durch systematisches Probieren lösen. Es wird nach der Mindestlänge der Bernoullikette gefragt:<br><br>binomCdf(n,0.72,3,n)\|n=7 0.97870044856<br>binomCdf(n,0.72,3,n)\|n=8 0.99219029298<br>Es gilt $X \sim B_{150;0,72}$ und $P(3 \leq X \leq 7) \approx 97{,}9\%$ sowie $P(3 \leq X \leq 8) \approx 99{,}2\%$.<br>Es müssen also mindestens 8 Personen ausgewählt werden. |

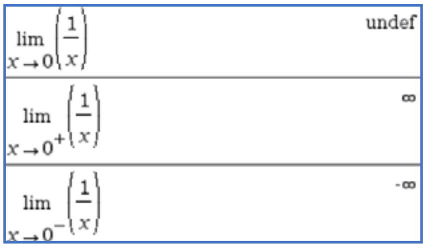
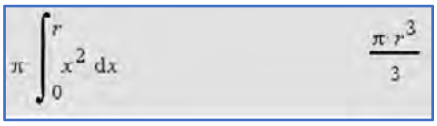
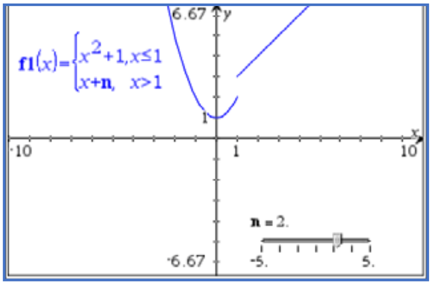
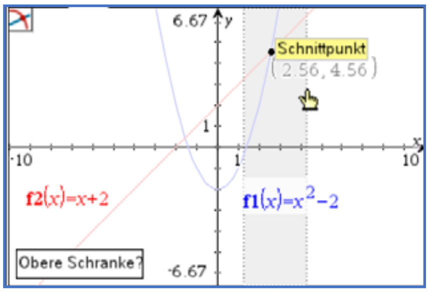
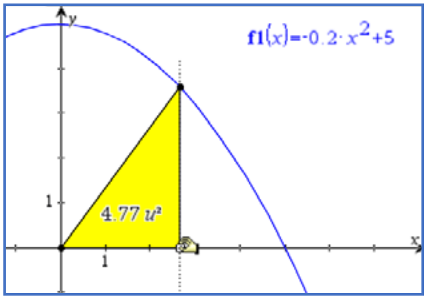
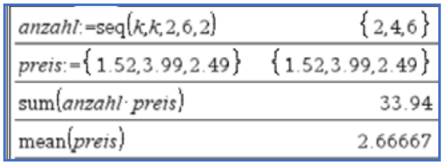
| **2** | |
|---|---|
| **a**<br>**(3 BE)** | |
| **Lösung** | Der Nenner (300 – k) gibt die Gesamtzahl der Kugeln im zweiten Behälter an.<br>Der Zähler (195 – (k – w)) gibt die Anzahl der schwarzen Kugeln im zweiten Behälter an.<br>Der gesamte Term gibt damit die Wahrscheinlichkeit an, dass eine aus dem zweiten Behälter gezogene Kugel schwarz ist. |
| **b**<br>**(4 BE)** | |
| **Lösung** | Die Gleichung $\frac{w}{k} \cdot \frac{105-w}{300-k} = 0{,}125$ steht für die Wahrscheinlichkeit, dass sowohl aus dem ersten Behälter ($\frac{w}{k}$) als auch aus dem zweiten Behälter ($\frac{105-w}{300-k}$) eine weiße Kugel gezogen wird.<br>Die Gleichung $\frac{k-w}{k} \cdot \frac{105-w}{300-k} = 0{,}375$ beschreibt die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses, dass aus dem ersten Behälter eine schwarze und aus dem zweiten eine weiße Kugel gezogen wird.<br>Die Lösung des Gleichungssystems aus beiden Gleichungen liefert, dass sich im ersten Behälter 45 weiße Kugeln befinden.<br><br>$\text{solve}\left(\begin{cases} \frac{\frac{w}{k}\cdot(105-w)}{300-k}=0.125 \\ \frac{\frac{k-w}{k}\cdot(105-w)}{300-k}=0.375 \end{cases},\{k,w\}\right)$<br>$w=45.$ and $k=180.$ |

# Kompetenzen im Umgang mit dem TI-Nspire™ CX II-T CAS

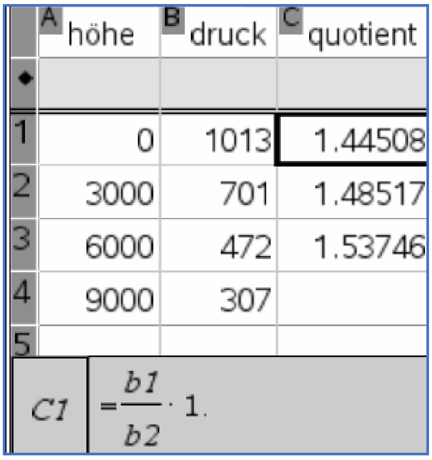
Nachstehend werden zusammenfassend einige grundlegende Kompetenzen im Umgang mit dem CAS-Rechner TI-Nspire™ CX II-T CAS dargestellt. Sie erheben keinen Anspruch auf Vollständigkeit.

| **Der Schüler kann** | |
|---|---|
| – Einstellungen vornehmen, u. a.:<br>• Winkelmaß (Grad- und Bogenmaß),<br>• angezeigte Ziffern,<br>• Helligkeit des Displays,<br>– das Betriebssystem aktualisieren,<br>– den Prüfungsmodus herstellen,<br>– den Ladezustand überprüfen.<br>– den Katalog und die Vorlagen nutzen.<br>– Dokumente<br>• anlegen,<br>• speichern,<br>• aufrufen,<br>• löschen,<br>• in Probleme und Seiten gliedern. | <br>Dokumenteinstellungen:<br>Angezeigte Ziffern: Fließ 6<br>Winkel: Bogenmaß<br>Exponentialformat: Normal<br>Reell oder Komplex: Reell<br>Berechnungsmodus: Auto<br>Vektorformat: Kartesisch<br> <br><br> <br><br> |
| – Variablen und Funktionen definieren und löschen.<br>– den Bedingungsoperator (WITH-Operator) zur Einschränkung von Definitionsbereichen, zum Ersetzen von Variablen u. ä. verwenden. (Zweitbelegung von ⊟)<br><br> | <br>Define $f(x)=2\cdot x^2+3$ Fertig<br>$a:=4$ 4<br>$-1\to b$ -1<br>$f(a)-b$ 36<br>DelVar $f,a,b$ Fertig<br><br>solve$\left(\sin(x)=\frac{1}{2}\cdot x,x\right)\|0<x<\pi$ $x=\frac{\pi}{6}$ or $x=\frac{5\cdot\pi}{6}$<br>$\frac{1}{x}\|x=\frac{1}{2}$ 2<br>$2\cdot a-3\cdot b\|a=1$ and $b=2$ -4 |

| | |
|---|---|
| – Terme<br>• berechnen,<br>• umformen,<br>• ausmultiplizieren,<br>• faktorisieren,<br>• in unechte Brüche zerlegen.<br>– das Summenzeichen verwenden. | <br>$\sqrt[3]{0.001}$ 0.1<br>$10^{-99}\cdot 1.E99$ 1.<br>$\frac{a^3-b^3}{a-b}$ $a^2+a\cdot b+b^2$<br><br>$\text{expand}((a+b)^3)$ $a^3+3\cdot a^2\cdot b+3\cdot a\cdot b^2+b^3$<br>$\text{factor}(a^3+3\cdot a^2\cdot b+3\cdot a\cdot b^2+b^3)$ $(a+b)^3$<br>$\text{expand}\left(\frac{4\cdot x^2+1}{x+1}\right)$ $\frac{5}{x+1}+4\cdot x-4$<br><br>$\sum_{k=1}^{n}(k^2)$ $\frac{n\cdot(n+1)\cdot(2\cdot n+1)}{6}$ |
| – Gleichungen/Ungleichungen/ Gleichungssysteme mit dem *solve*-Befehl lösen und dabei<br>– die Anzeigen des Rechners richtig interpretieren.<br>– Gleichungen und Ungleichungen mit *nSolve* näherungsweise lösen. (sinnvollen Startwert verwenden)<br>– Gleichungen mit grafischen Verfahren lösen. | <br>$\text{solve}(2\cdot x^2-2\cdot x=4,x)$ $x=-1 \text{ or } x=2$<br>$\text{solve}(x^2-4<0,x)$ $-2<x<2$<br>$\text{solve}\left(\begin{cases}x-y=1\\x+y=2\end{cases},x,y\right)$ $x=\frac{3}{2} \text{ and } y=\frac{1}{2}$<br><br>$\text{solve}\left(\begin{cases}x-y=1\\x-y=2\end{cases},x,y\right)$ false<br>$\text{solve}\left(\begin{cases}x-y=1\\x-y=1\end{cases},x,y\right)$ $x=c1+1 \text{ and } y=c1$<br>$\text{solve}(\sin(x)=0,x)$ $x=n2\cdot\pi$<br><br>$\text{nSolve}(\sin(x)=e^{-x},x,3)$ 3.09636<br>$\text{nSolve}(\sin(x)=e^{-x},x,7)$ 9.4247<br> |
| – Ableitungen von Funktionen ermitteln.<br>– bestimmte und unbestimmte Integrale von Funktionen bestimmen. | <br>$\frac{d}{dx}(x^2\cdot\sin(x))$ $x^2\cdot\cos(x)+2\cdot x\cdot\sin(x)$<br>$\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{1}{x}\right)$ $\frac{2}{x^3}$<br>$\frac{d}{da}(b\cdot e^{-2\cdot a})$ $-2\cdot e^{-2\cdot a}\cdot b$<br><br>$\int(x\cdot\ln(x))dx$ $\frac{x^2\cdot\ln(x)}{2}-\frac{x^2}{4}$<br>$\int_{-1}^{2}(-x^2+4)dx$ 9 |

| | |
|---|---|
| – Grenzwerte von Funktionen ermitteln.<br>– den Definitionsbereich von Termen/Funktionen ermitteln.<br>– Volumen von Rotationskörpern ermitteln. | <br>$\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x}\right)$ undef<br>$\lim_{x \to 0^+} \left(\frac{1}{x}\right)$ $\infty$<br>$\lim_{x \to 0^-} \left(\frac{1}{x}\right)$ $-\infty$<br><br>$\mathrm{domain}\left(\frac{x-4}{x^2-1},x\right)$ $x \neq -1$ and $x \neq 1$<br><br>$\pi \cdot \int_0^r x^2 \, dx$ $\frac{\pi \cdot r^3}{3}$ |
| – Graphen zeichnen und dabei ggf.<br>• geeignete Fenstereinstellungen vornehmen,<br>• Wertetabellen anzeigen,<br>• stückweise definierte Funktionen darstellen,<br>• Funktionenscharen darstellen,<br>• das Menü *Graphen analysieren* nutzen,<br>• Schieberegler verwenden. | <br> <br><br> |
| – einfache geometrische Objekte konstruieren.<br>– den Zugmodus nutzen.<br>– Größen messen. | <br> |
| – Listen<br>• definieren,<br>• auswerten. | <br>*anzahl*:=seq(k,k,2,6,2) {2,4,6}<br>*preis*:={1.52,3.99,2.49} {1.52,3.99,2.49}<br>sum(*anzahl*·*preis*) 33.94<br>mean(*preis*) 2.66667 |

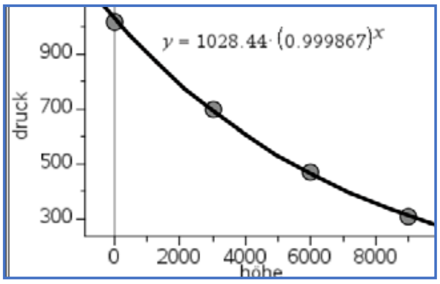
- Tabellen füllen.
- Spalten mit Listen verknüpfen.
- Operationen auf Spalten bzw. Zellen anwenden.



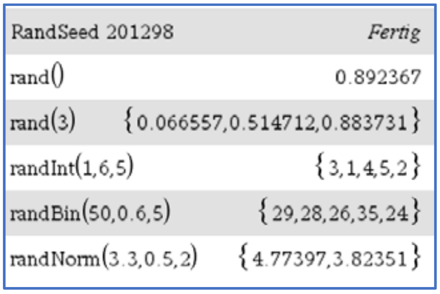
| | A höhe | B druck | C quotient |
|---|---|---|---|
| ◆ | | | |
| 1 | 0 | 1013 | 1.44508 |
| 2 | 3000 | 701 | 1.48517 |
| 3 | 6000 | 472 | 1.53746 |
| 4 | 9000 | 307 | |
| 5 | | | |

$C1 \; =\frac{b1}{b2}\cdot 1.$

- Diagramme in *Data&Statistics* erstellen.
- Daten mit Regression analysieren.

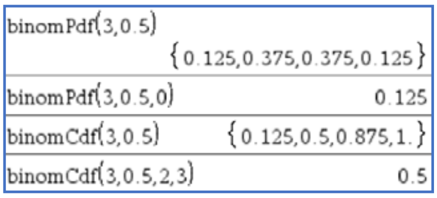


- Zufallszahlen erzeugen.



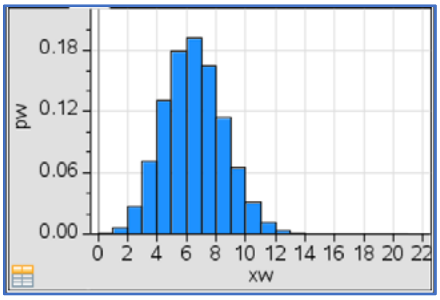
```
RandSeed 201298                       Fertig
rand()                              0.892367
rand(3)      {0.066557,0.514712,0.883731}
randInt(1,6,5)                   {3,1,4,5,2}
randBin(50,0.6,5)         {29,28,26,35,24}
randNorm(3.3,0.5,2)      {4.77397,3.82351}
```

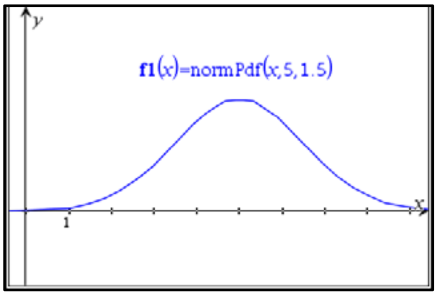
- Wahrscheinlichkeiten binomialverteilter Zufallsgrößen berechnen.

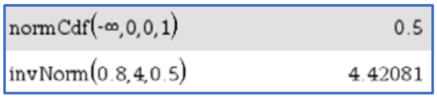
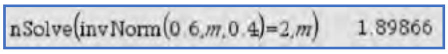
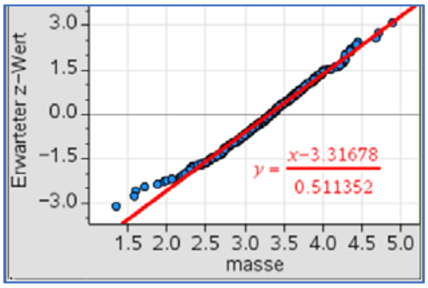
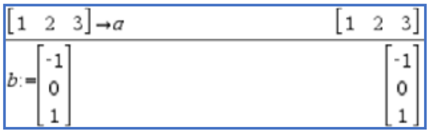
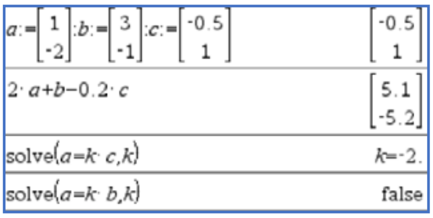
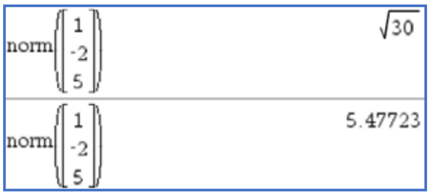
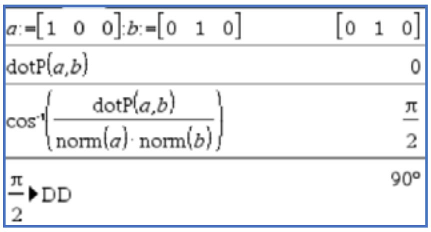
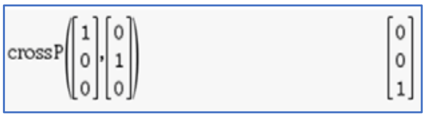


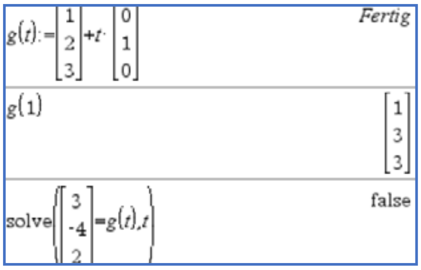
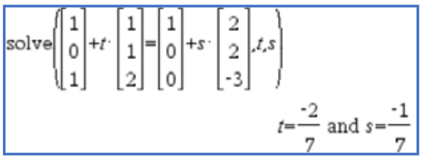
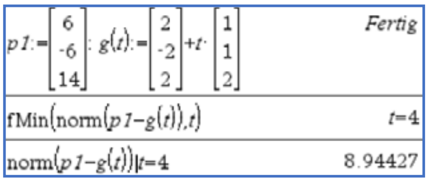
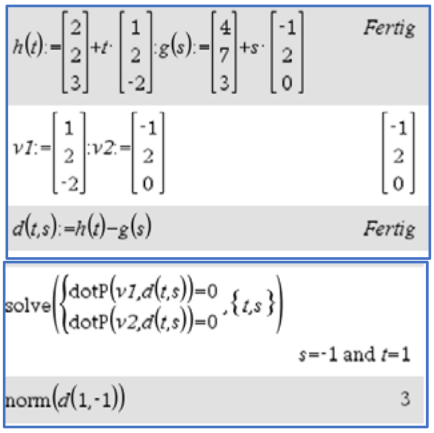
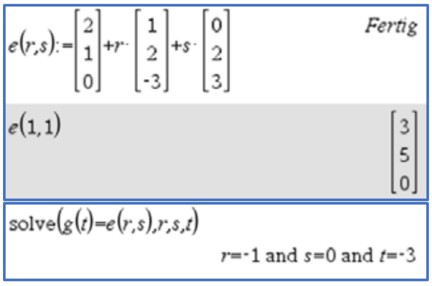
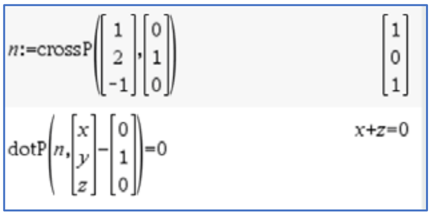
```
binomPdf(3,0.5)
                 {0.125,0.375,0.375,0.125}
binomPdf(3,0.5,0)                    0.125
binomCdf(3,0.5)         {0.125,0.5,0.875,1.}
binomCdf(3,0.5,2,3)                    0.5
```

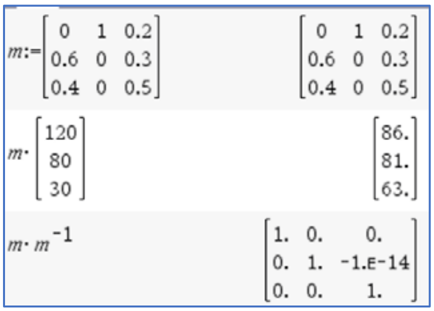
- binomial- und normalverteilte Zufallsgrößen graphisch darstellen.





| | |
|---|---|
| – Berechnungen im Zusammenhang mit normalverteilten Zufallsgröße rationell durchführen. | <br>$\text{normCdf}(-\infty,0,0,1)$ 0.5<br>$\text{invNorm}(0.8,4,0.5)$ 4.42081<br><br>$\text{nSolve}(\text{invNorm}(0.6,m,0.4)=2,m)$ 1.89866 |
| – ein Normalwahrscheinlichkeitsdiagramm erstellen und beurteilen | <br> |
| – Vektoren als Zeilen- oder Spaltenvektoren eingeben.<br>– mit Vektoren rechnen<br>– den Betrag eines Vektors ermitteln.<br>– das Skalarprodukt zweier Vektoren berechnen und anwenden. | <br>$[1\ \ 2\ \ 3]\to a$ $[1\ \ 2\ \ 3]$<br>$b:=\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$<br><br>$a:=\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix}:b:=\begin{bmatrix}3\\-1\end{bmatrix}:c:=\begin{bmatrix}-0.5\\1\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}-0.5\\1\end{bmatrix}$<br>$2\cdot a+b-0.2\cdot c$ $\begin{bmatrix}5.1\\-5.2\end{bmatrix}$<br>$\text{solve}(a=k\cdot c,k)$ $k=-2.$<br>$\text{solve}(a=k\cdot b,k)$ false<br><br>$\text{norm}\left(\begin{bmatrix}1\\-2\\5\end{bmatrix}\right)$ $\sqrt{30}$<br>$\text{norm}\left(\begin{bmatrix}1\\-2\\5\end{bmatrix}\right)$ 5.47723<br><br>$a:=[1\ \ 0\ \ 0]:b:=[0\ \ 1\ \ 0]$ $[0\ \ 1\ \ 0]$<br>$\text{dotP}(a,b)$ 0<br>$\cos^{-1}\left(\frac{\text{dotP}(a,b)}{\text{norm}(a)\cdot\text{norm}(b)}\right)$ $\frac{\pi}{2}$<br>$\frac{\pi}{2}$▶DD 90° |
| – das Vektorprodukt zweier Vektoren berechnen und anwenden. | <br>$\text{crossP}\left(\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right)$ $\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$ |

| | |
|---|---|
| – Geradengleichungen der Form<br>– $\vec{x}=\overrightarrow{p_0}+t\cdot\vec{a}$ als Variable speichern und damit arbeiten.<br>– die gegenseitige Lage von Geraden bzw. Geraden und Koordinatenebenen bestimmen.<br>– Abstand Punkt – Gerade berechnen.<br>– den Abstand windschiefer Geraden berechnen. | <br>$g(t):=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}+t\cdot\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$ Fertig<br>$g(1)$ $\begin{bmatrix}1\\3\\3\end{bmatrix}$<br>$\text{solve}\left(\begin{bmatrix}3\\-4\\2\end{bmatrix}=g(t),t\right)$ false<br><br>$\text{solve}\left(\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}+t\cdot\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}+s\cdot\begin{bmatrix}2\\2\\-3\end{bmatrix},t,s\right)$<br>$t=\frac{-2}{7}$ and $s=\frac{-1}{7}$<br><br>$p1:=\begin{bmatrix}6\\-6\\14\end{bmatrix}:g(t):=\begin{bmatrix}2\\-2\\2\end{bmatrix}+t\cdot\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}$ Fertig<br>$\text{fMin}(\text{norm}(p1-g(t)),t)$ $t=4$<br>$\text{norm}(p1-g(t))\|t=4$ 8.94427<br><br>$h(t):=\begin{bmatrix}2\\2\\3\end{bmatrix}+t\cdot\begin{bmatrix}1\\2\\-2\end{bmatrix}:g(s):=\begin{bmatrix}4\\7\\3\end{bmatrix}+s\cdot\begin{bmatrix}-1\\2\\0\end{bmatrix}$ Fertig<br>$v1:=\begin{bmatrix}1\\2\\-2\end{bmatrix}:v2:=\begin{bmatrix}-1\\2\\0\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}-1\\2\\0\end{bmatrix}$<br>$d(t,s):=h(t)-g(s)$ Fertig<br>$\text{solve}\left(\begin{cases}\text{dotP}(v1,d(t,s))=0\\\text{dotP}(v2,d(t,s))=0\end{cases},\{t,s\}\right)$<br>$s=-1$ and $t=1$<br>$\text{norm}(d(1,-1))$ 3 |
| – Ebenengleichungen in Parameterform als Variable speichern und damit arbeiten. | <br>$e(r,s):=\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}+r\cdot\begin{bmatrix}1\\2\\-3\end{bmatrix}+s\cdot\begin{bmatrix}0\\2\\3\end{bmatrix}$ Fertig<br>$e(1,1)$ $\begin{bmatrix}3\\5\\0\end{bmatrix}$<br>$\text{solve}(g(t)=e(r,s),r,s,t)$<br>$r=-1$ and $s=0$ and $t=-3$ |
| – Ebenengleichungen in Normalen- und Koordinatenform erstellen. | <br>$n:=\text{crossP}\left(\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right)$ $\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$<br>$\text{dotP}\left(n,\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right)=0$ $x+z=0$ |

| | |
|---|---|
| – Matrizen erstellen und mit Matrizen arbeiten. | <br>$m:=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0.2\\0.6 & 0 & 0.3\\0.4 & 0 & 0.5\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}0 & 1 & 0.2\\0.6 & 0 & 0.3\\0.4 & 0 & 0.5\end{bmatrix}$<br>$m\cdot\begin{bmatrix}120\\80\\30\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}86.\\81.\\63.\end{bmatrix}$<br>$m\cdot m^{-1}$ $\begin{bmatrix}1. & 0. & 0.\\0. & 1. & -1.\mathrm{E}{-14}\\0. & 0. & 1.\end{bmatrix}$ |

T³ DEUTSCHLAND

# T³ Teachers Teaching with Technology

**Netzwerk**
Das T³ Lehrerfortbildungsnetzwerk richtet sich an Sie, an Lehrerinnen und Lehrer, die sich zum sinnvollen Einsatz digitaler Werkzeuge im MINT-Unterricht austauschen und weiterentwickeln wollen. T³ Deutschland ist Teil des internationalen T³ Netzwerks.

**Fortbildungen**
T³ Deutschland bietet Ihnen pädagogisch-didaktische Unterstützung in Form von schulinternen Fortbildungen, Online-Seminaren und Tagungen an.

**Materialien**
Aufgabenbeispiele, Tutorials, Videos und mehr nützliche Materialien für Ihren MINT-Unterricht stellen wir auf der Materialdatenbank kostenlos zur Verfügung.

➔ **Der T³ EduBlog bietet exklusive Interviews, inspirierende Erfahrungsberichte und mehr**

## Informieren Sie sich. Machen Sie mit!

Nehmen Sie Kontakt zu uns auf unter:

**www.t3deutschland.de** I info@t3deutschland.de

Abonnieren Sie unseren Newsletter!

**@T3Europe**

**T3 Europe**

## TI-Nspire™ CX CAS Technologie

Ob Handheld, Software (Win/Mac) oder Tablet (Win/iPad) - alle Produkte sind einzeln oder als integrierte Lösung einsetzbar. Passendes Zubehör unterstützt den fächerübergreifenden Einsatz in Mathematik, Informatik, Naturwissenschaft und Technik (MINT).

www.tinspirecas.de

## Praxisorientierte Unterrichtsmaterialien

Nützliche Aufgabenbeispiele für Ihren Unterricht, kostenlose Downloads und Hinweise auf Verlagspublikationen finden Sie auf der TI Materialdatenbank, auch ganz speziell zur TI-Nspire™ CX Technologie.

**Schauen Sie mal rein:**
TI Materialdatenbank: www.ti-unterrichtsmaterialien.net

- Nutzen Sie beispielsweise unser kostenloses Ausleihprogramm!
- Ausführliche Produkt- und Serviceinformationen sowie Bezugsquellen finden Sie auf unseren TI Webseiten education.ti.com/de
- Die TI Schulberater unterstützen Sie gerne bei allen Fragen rund um den Einsatz von TI Rechnern im Unterricht: schulberater-team@ti.com

Abonnieren Sie unseren Newsletter!

**www.youtube.com/TIedtechDE**

**education.ti.deutschland**

**@TIEducationDE**

www.t3deutschland.de

education.ti.com

T³ DEUTSCHLAND

Teachers Teaching with Technology™

Texas Instruments