TI-Nachrichten

Ausgabe 2/06

Mit Beileger TI-nspire™ CAS

Inhaltsverzeichnis

F. Tinhof:
▸ Konfidenzintervall für den Anteilswert π am Beispiel einer Meinungsumfrage 1

P. Nussbaumer:
▸ Dauer der Ausflusszeit und Integral....................... 4

B. Ringel:
▸ S ≠ σ – Ergänzungen zum Thema Standardabweichung beim TI-89 Titanium/Voyage™ 200 6

G. Pinkernell:
▸ „Mehrwertaufgaben" – ohne großen Aufwand CAS und GTR sinnvoll einsetzen........................... 8

J. Enders:
▸ Der TI-84 Plus im Physikunterricht der Oberstufe – Beispiele für den Einsatz von EasyLink™ und EasyData™................................. 10

F. Liebner:
▸ Neue Medien im Chemieunterricht – Varianten der Säure- Base- Titration.................... 12

S. Schwehr:
▸ Das Lösen von Linearen Gleichungssystemen – gar nicht so einfach.. 14

G. Heitmeyer:
▸ Vorsicht: Eine korrekt erscheinende aber fehlerhafte Bedienung des Voyage™ 200 17

V. Kleene:
▸ Mathematischer Aufsatz: „The rule of the three – drei Wege, ein Problem zu lösen"..................... 18

G. Schöb:
▸ TIGCC – Ein Open Source C-Compiler für TI-89 Titanium und Voyage™ 200 20

H. Schuler:
▸ Der Voyage™ 200 als ökonomisches Hilfsmittel im täglichen Unterricht....................... 22

M. Paul:
▸ „It's all greek to me!" Verschlüsselung mit dem RSA-Verfahren.. 24

▸ Artikel in der Materialdatenbank......................... 27

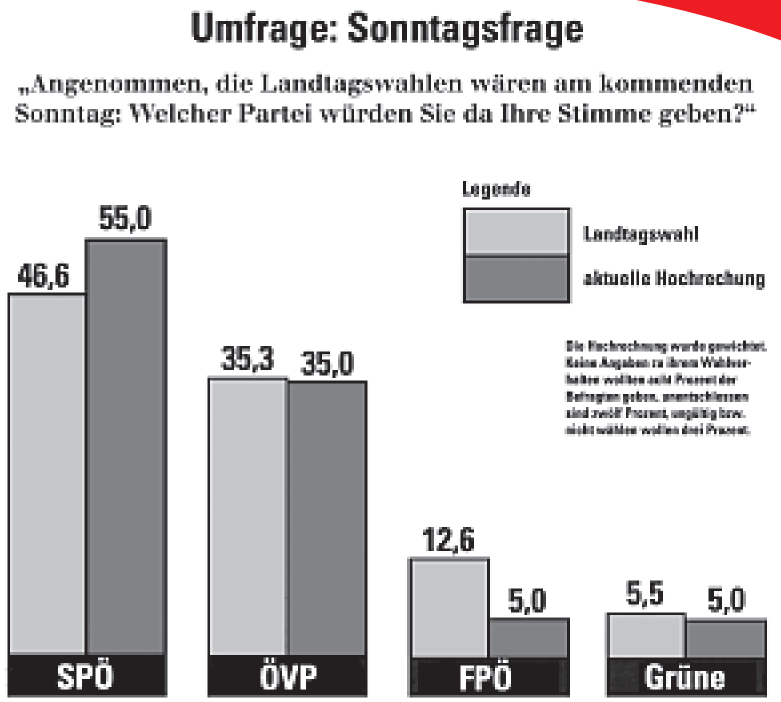


Abb. 1

Konfidenzintervall für den Anteilswert π am Beispiel einer Meinungsumfrage

Friedrich Tinhof

GTR Eine Meinungsumfrage der Wochenzeitung „Bezirksblatt" vom März 2005, ein halbes Jahr vor den Landtagswahlen im Burgenland (Stichprobenumfang $n = 402$) ergab die Umfrageergebnisse aus Abbildung 1: Bei sofortigen Landtagswahlen würde die SPÖ 55%, die ÖVP 35%, die FPÖ 5% und die Grünen 5% der Stimmen erhalten.

Wir wollen eine „Hochrechnung" für den Wahlausgang durchführen und berechen Konfidenzintervalle für den Stimmenanteil der vier Parteien. Anschließend berechnen wir die Schwankungsbreite e für alle berechneten Konfidenzintervalle und vergleichen die berechneten Konfidenzintervalle mit den tatsächlichen Ergebnissen der Wahl: SPÖ 52,2%; ÖVP 36,3%; FPÖ 5,8%; Grüne: 5,2%.

Bei Meinungsumfragen ist es üblich mit einem Konfidenzniveau c = 95% zu rechnen. Die Anzahl X der Wähler der Partei A in einer Stichprobe vom Umfang n ist binomialverteilt mit dem **bekannten** Parameter n und einem **unbekannten** π ($\mu = n \cdot \pi$).

X	Wähler von Partei A in der Stichprobe
n = 402	Umfang der Stichprobe
c = 95%	Niveau des Konfidenzintervals

Der Wähleranteil von Partei A in der Stichprobe ist bekannt:

$$\hat{p} = \frac{x}{402}$$

Für das Konfidenzintervall des Anteilswertes π einer Grundgesamtheit gilt für $0{,}3 < \hat{p} < 0{,}7$ die Näherungsformel:

$$\hat{p} - z \cdot \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot (1-\hat{p})}{n}} \le \pi \le \hat{p} + z \cdot \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot (1-\hat{p})}{n}} \quad \text{mit } z = \Phi^{-1}\left(\frac{c+1}{2}\right)$$

Für c = 0,95 gilt $z \approx 1{,}96$. Mit der Fehlertoleranz bzw. Schwankungsbreite e kann man das Konfidenzintervall

$$\left[\hat{p} - e; \hat{p} + e\right] \text{ mit } e = z \cdot \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot (1-\hat{p})}{n}} \text{ notieren.}$$

Alle TI-Rechner oder Programme berechnen Konfidenzintervalle für Anteilswerte nach dieser Formel mit der Funktion **1-PropZInt**.

Zeichenerklärung:

CAS – Computer Algebra System
TI-89, TI-89 Titanium, TI-92 Plus, Voyage™ 200, TI-Nspire™ CAS+

GTR – Graphische Taschenrechner
TI-82 STATS, TI-83, TI-83 Plus, TI-83 Plus Silver Edition, TI-84 Plus, TI-84 Plus Silver Edition

CBL CBR – Messwerterfassungssystem
CBL™, CBL 2™, CBR 2™

PC – PC Software
Derive™, TI InterActive!™, Cabri Geometry II™, TI-Nspire™ CAS

Liebe Lehrerinnen und Lehrer,

die drei wesentlichen Technologien, die im Mathematikunterricht eingesetzt werden, sind Computer-Algebra-Systeme (CAS), Dynamische Geometriesysteme (DGS) und Tabellenkalkulation (TK). Wie in verschiedenen Untersuchungen nachgewiesen wurde, ist es die ständige Verfügbarkeit dieser verschiedenen Applikationen, die einen nachhaltigen positiven Effekt auf das Lehren und Lernen von Mathematik bewirkt. Nur wenn diese Systeme jederzeit nutzbar sind, werden die individuellen Lerntypen bestmöglich gefördert. Gelegentlicher Einsatz kann dies nicht leisten. Es gibt sogar Studien, die nahelegen, dass in diesem Fall negative Auswirkungen auf die Lernleistungen zu befürchten sind.

Vielfach bewährte Graphikrechner wie der TI-84 Plus oder die Taschencomputer TI-89 Titanium und Voyage™ 200 kommen dem Idealbild eines umfassenden mathematischen Werkzeuges schon recht nahe. Insbesondere wenn sie in Kombination mit der Software SmartView™ bzw. Derive 6.1 und Cabri Géomètre II Plus eingesetzt werden.

TI-Nspire™ CAS wird über das vorhandene Angebot noch ein weiteres Stück hinausgehen. In bisherigen Systemen sind CAS, DGS und TK lose miteinander verknüpft. Beim neuen TI-Nspire™ CAS werden sie eng miteinander verwoben sein. Dies wird es enorm erleichtern, sowohl den Lerntypen ihrer Schülerinnen und Schüler besser gerecht zu werden als auch die konzeptionelle Breite und Tiefe mathematischer Begriffe und Begriffzusammenhänge zu verdeutlichen.

In die Entwicklung von TI-Nspire™ CAS wurde das Lehrerfortbildungsprojekt T^3 – Teachers Teaching with Technology – von Beginn an sehr eng eingebunden. Ebenso in die Materialentwicklung und die Fortbildungskonzeption. Erste Ergebnisse dieser Arbeit können Sie im Beileger dieser Ausgabe der TI-Nachrichten nachlesen.

Einen erfolgreichen Unterricht wünscht

Ihr TI-Team

Wir bestimmen zunächst ein Konfidenzintervall für die SPÖ mit dem TI-84 Plus. Die verwendete Funktion ist aber auch beim Voyage™ 200, bei TI InterActive!™ und natürlich auch später auf dem TI-Nspire™ CAS verfügbar. Auf der Basis des Umfrageergebnisses ist

$$\hat{p} = 0{,}55 = \frac{x}{402} \Rightarrow x \approx 221.$$

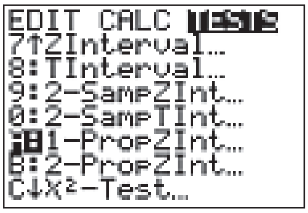


Abb. 2

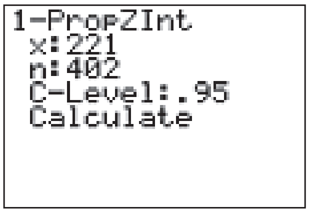


Abb. 3

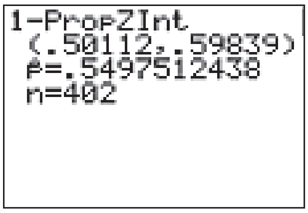


Abb. 4

Interpretation der Ergebnisse:
Mit einer Wahrscheinlichkeit von 95% liegt der Wähleranteil der SPÖ zwischen 50,1% und 59,8% der abgegebenen Stimmen. Konfidenzintervall SPÖ:

[0,5011 ; 0,5984] c = 0,95

Der tatsächliche Stimmenanteil der SPÖ bei der Wahl war 52,2%, der Wert liegt somit innerhalb des Konfidenzintervalls. Auf analoge Weise können die Konfidenzintervalle auch für die anderen Parteien berechnet werden. Interessanter ist es allerdings die Konfidenzintervalle grafisch als „Konfidenzellipse“ darzustellen.

Grafische Darstellung von Konfidenzintervallen
Für die Veranschaulichung von Konfidenzintervallen werden zuerst die Gleichungen der begrenzenden Funktionen definiert. Diese Funktionen werden dann für konkrete Werte von n und $\hat{p}$ graphisch dargestellt.

Zunächst werden die begrenzenden Funktionen sowie die Funktion für die Schwankungsbreite definiert. Beim TI-84 Plus geben Sie die Funktionsterme direkt im Funktionseditor ein.

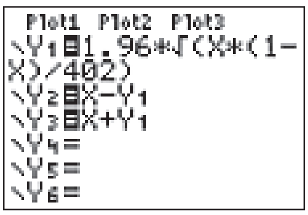


Abb. 5

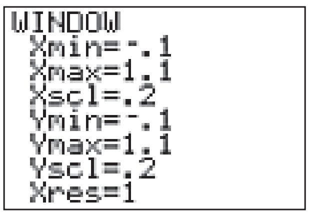


Abb. 6

Im nächsten Schritt werden die Grafen der soeben definierten Funktionen in einem geeigneten Koordinatensystem für den vorliegenden Stichprobenumfang n = 402 dargestellt.

Mit Hilfe der TRACE-Funktion werden an der Stelle p = 0,55 die Funktionswerte ermittelt und die Werte angezeigt. Die y-Koordinaten der berechneten Punkte ergeben die Grenzen des Konfidenzintervalls.

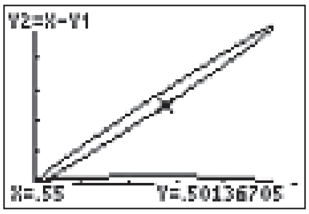


Abb. 7

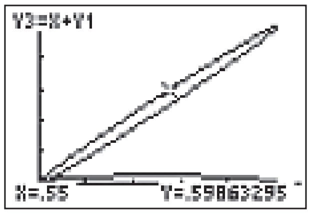


Abb. 8

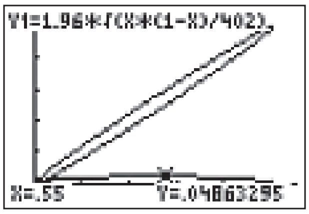


Abb. 9

Aus den Grafiken wird für p = 0,55 das Konfidenzintervall [0,501 ; 0,599] und die Schwankungsbreite e = 0,0486 abgelesen.

Mit TI InterActive!™ können die Konfidenzintervalle optisch noch besser aufbereitet werden. Das vertikale Geradenstück zwischen den Ellipsenhälften stellt das Konfidenzintervall für den Wert $\hat{p}$ (hier p) dar.

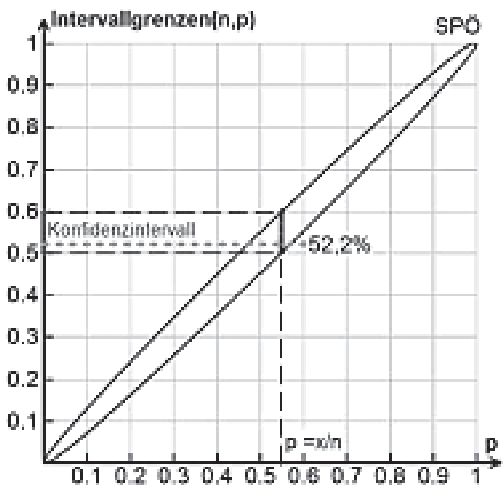


Abb. 10

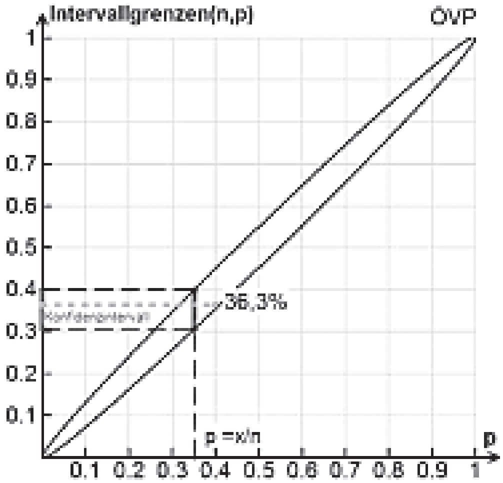


Abb. 11

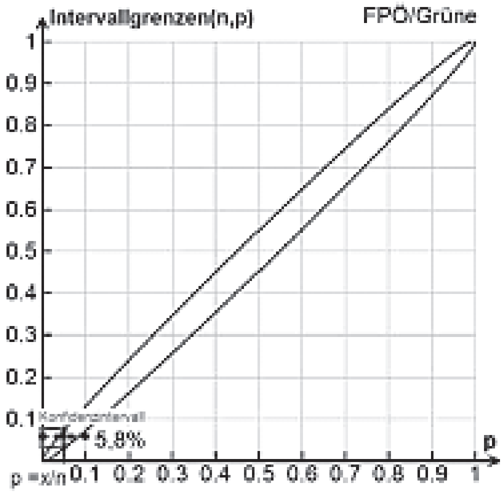


Abb. 12

Bei der Darstellung des „Konfidenzintervalls" mit dem TI-Nspire™ CAS haben Sie übrigens den Vorteil der *Interakivität der Grafik*. Durch Ziehen der vertikalen Geraden, kann $\hat{p}$ und damit das Konfidenzintervall verändert werden.

Man erhält folgende weitere Konfidenzintervalle:
ÖVP: [0,3041 ; 0,3974]
FPÖ/Grüne: [0,0285 ; 0,071]

Alle Konfidenzintervalle enthalten den tatsächlichen Stimmenanteil der jeweiligen Partei nach der Wahl. Die „Hochrechnung" hat also richtige Vorhersagen geliefert.

Die Berechnungen zeigen, dass die Schwankungsbreite e sehr stark vom Anteilswert $\hat{p}$ und vom Umfang n der Stichprobe abhängt. Man kann allgemein zeigen, dass die maximale Schwankungsbreite bei $\hat{p} = 0.5$ auftritt.

In Abbildung 13 erkennt man, dass beispielsweise Umfragen mit n = 100 eine Schwankungsbreite von fast 10% (Breite des Konfidenzintervalls ≈ 20%) haben und somit für Schätzungen unbrauchbar sind. Sinnvoll sind erst Umfragen mit einem Stichprobenumfang von n > 300.

Für den Stichprobenumfang n = 402 ergibt sich eine maximale Schwankungsbreite von ca. 4,9%.

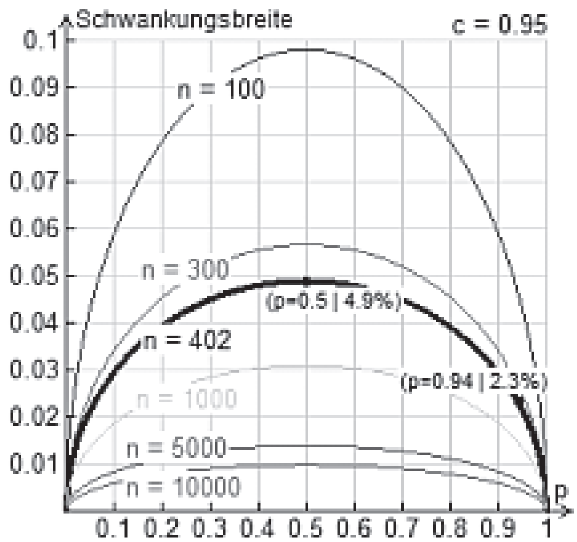


Abb. 13

Hinweis der Redaktion:
Der Autor hat einen ausführlicheren Artikel abgefasst, der neben dem TI-84 auch den Voyage™ 200 und den TI-Nspire™ CAS und zusätzlich das Programm TI-InterActive!™ berücksichtigt. Diese Version des Artikels mit den entsprechenden Screenshots ist im Internet in der Materialdatenbank auf den TI-Internetseiten zu finden.

Autor:
Friedrich Tinhof, Müllendorf (A)
Bundeshandelsakademie Eisenstadt (A)
fritz.tinhof@t3oesterreich.at

Dauer der Ausflusszeit und Integral

Peter Nussbaumer

Zielsetzung

Ausgehend von einem realen Beispiel (siehe Abbildung eines Weinglases, Abb. 1) soll die Ausflusszeit auf zwei Arten bestimmt werden. In jedem Fall gelingt die Lösung mit Hilfe des CAS-Rechners. Dazu wird das Weinglas mit Hilfe des Umrisses vermessen. Dann soll eine Näherungslösung mit Hilfe des Data/Matrix-Editors und dem `Calc`-Menü (F5) gewonnen werden. Zur Kontrolle bestimmt man aus den Messdaten eine „Umrissfunktion" und daraus mit Hilfe des bestimmten Integrals die „exakte" Lösung.

Beispiel:
Aus einem (unregelmäßig geformten) Körper fließt am unteren Ende durch eine Öffnung mit der Querschnittsfläche q eine Flüssigkeit mit der Geschwindigkeit v(t) aus.

Wie lange dauert es, wenn sich die Höhe des Flüssigkeitsstandes um die Differenz Δh von h_0 auf h_1 verändert[1]?

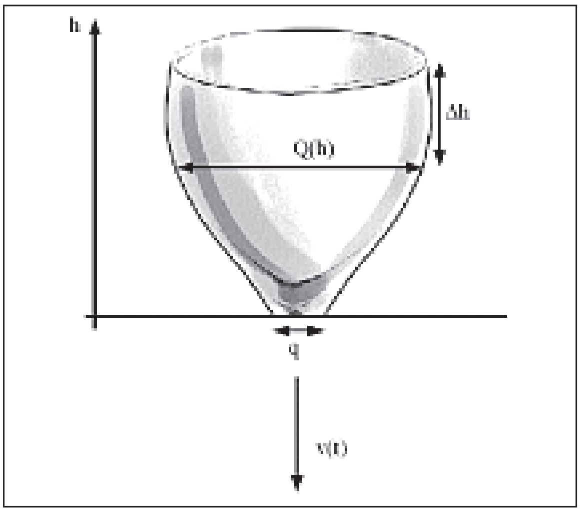


Abb. 1

Man Beachte: q und Q sind Querschnittsflächen. Während q gleich bleibt, ändert sich Q mit der Höhe. Die Ausflussgeschwindigkeit v(t) ändert sich ebenfalls mit der Zeit!

Physikalische Vorkenntnisse

Die Fallgeschwindigkeit (im Vakuum, siehe Fußnote 1) lässt sich berechnen durch[2]:

$$v(t)=\sqrt{2\cdot g\cdot h(t)}.$$

Die Menge des Ausflusses unten lässt sich berechnen durch:

$$\Delta V = q\cdot v(t)\cdot \Delta t$$

Die gleiche Menge geht oben als Schwund verloren:

$$\Delta V = Q(h)\cdot \Delta t.$$

Die Schülerinnen und Schüler sollten die Zusammenhänge durchdenken und begründen können.

Durch Gleichsetzen erhält man

$$q\cdot v(t)\cdot \Delta t = Q(h)\cdot \Delta t$$

und somit:

$$\Delta t = \frac{1}{q\cdot v(t)}Q(h)\cdot \Delta h \;= \frac{1}{q\cdot\sqrt{2g}}Q(h)\cdot\frac{1}{\sqrt{h}}\Delta h \qquad (1)$$

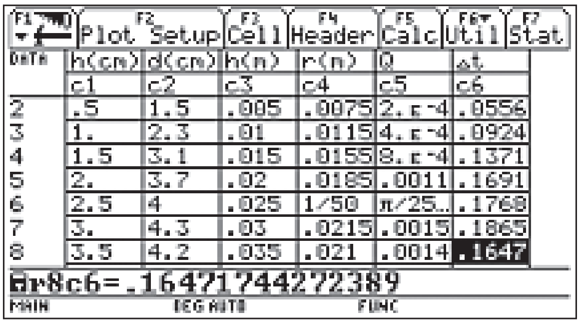
Durch Aufsummierung und Grenzübergang Δh gegen Null erhält man:

$$t = \frac{1}{q\cdot\sqrt{2g}}\cdot\int_{h_0}^{h_1} Q(h)\cdot\frac{1}{\sqrt{h}}dh \qquad (2)$$

Wir stellen uns folgende Aufgabe:
Bestimme die Zeit bis die Flüssigkeit aus dem in der Abbildung 1 dargestellten Gefäß ausgeflossen ist!

Erste Möglichkeit:

Wir vermessen das Gefäß, indem wir in 0,5 cm Schritten den Durchmesser abmessen[3]. Im Data/Matrix-Editor geben wir die Werte ein (Spalten c1 und c2), rechnen die Längen in Meter um (c3 und c4), bestimmen die Querschnittsflächen Q (Spalte c5) und für jeden Wert das Zeitintervall Δt (Spalte c6) gemäß der Formel (1):



DATA	h(cm)	d(cm)	h(m)	r(m)	Q	Δt
	c1	c2	c3	c4	c5	c6
2	.5	1.5	.005	.0075	2.E-4	.0556
3	1.	2.3	.01	.0115	4.E-4	.0924
4	1.5	3.1	.015	.0155	8.E-4	.1371
5	2.	3.7	.02	.0185	.0011	.1691
6	2.5	4	.025	1/50	π/25…	.1768
7	3.	4.3	.03	.0215	.0015	.1865
8	3.5	4.2	.035	.021	.0014	.1647

r8c6=.16471744272389

Abb. 2

Anschließend bestimmen wir die Summe aller Zeitintervalle aus der Spalte c6, z.B. wie in Abb. 3 u. Abb. 4 mit F5 Calc:

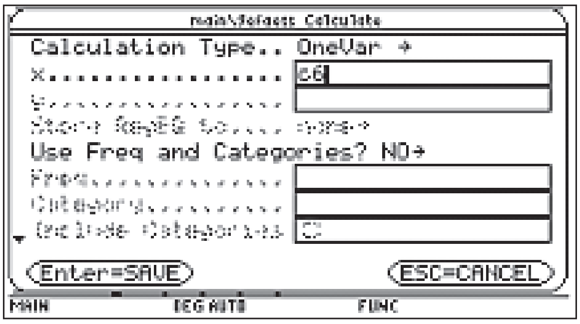


Abb. 3

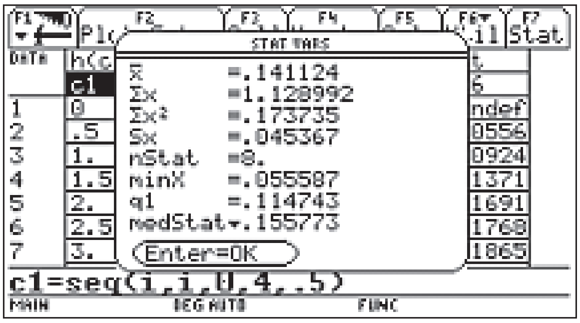


Abb. 4

Neben der Summe lesen wir ab: Es dauert etwas mehr als 1 Sekunde, bis die Flüssigkeit ausgeflossen ist!

Zweite Möglichkeit:

Von den Werten wird mittels Regressionsrechnung ein Funktionsterm bestimmt. Wir wählen als x- Werte die Höhen und als y- Werte die Radien der Querschnittsflächen und benutzen die quadratische Regression.
Dazu verwenden wir die Spalte c3 (Höhe) und die Spalte c4 (Radius) und speichern den Regressionsterm unter y1(x)! Im Grafikscreen kontrollieren wir mittels Plot und Graph (Abb. 6).

---

[1] Die Zähigkeit der Flüssigkeit, die Reibung an den Gefäßwänden und die Tatsache, dass beim Ausfließen potenzielle Energie in kinetische Energie umgewandelt wird, werden hier einmal vernachlässigt. Tatsächlich spielen diese „Nebeneffekte" in realen Situationen – je nach Gefäßform und Art der Flüssigkeit – möglicherweise eine entscheidende Rolle.

[2] Erdbeschleunigung $g \approx 10\ m\cdot s^{-2}$

[3] Dazu nehmen wir den in der Abbildung dargestellten Umriss als Seitenriss des Gefäßes, Maßstab 1:1!

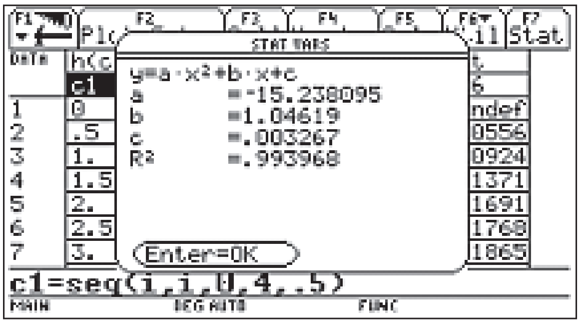


Abb. 5

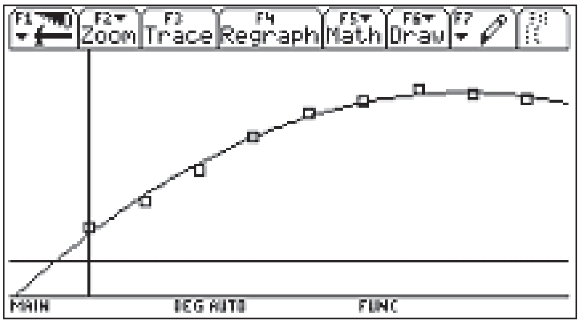


Abb. 6

Im Homescreen rechnen wir mit dem Integral nach Formel (2):

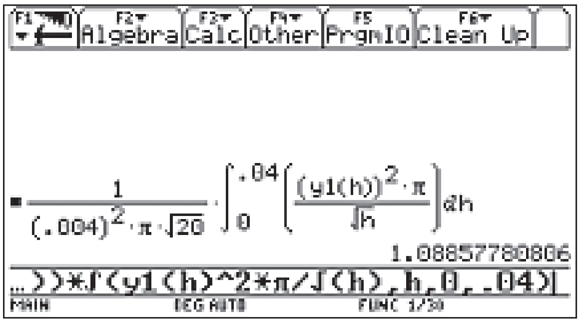


Abb. 7

Antwort: Es dauert etwas mehr als 1 Sekunde, bis die Flüssigkeit ausgeflossen ist!

Weiterführende Frage: Warum ist der „exakte" Wert etwas kleiner als der durch die Summenbildung gewonnene?

Zusatzaufgaben

1. Wie lange dauert es, bis die Flüssigkeit halb hoch steht?
2. Wie lange dauert es dann noch, bis die Flüssigkeit ganz ausgeflossen ist?
3. Wodurch kann man das Näherungsergebnis verbessern?

Lösung zur 1. und 2. Aufgabe:

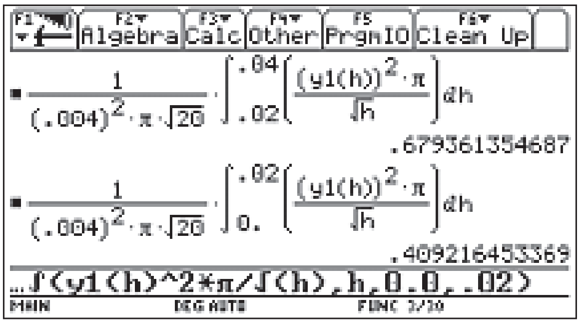


Abb. 8

Autor:
Mag. Peter Nussbaumer
Gymnasium Tulln (A)
peter@nussnet.de

S ≠ σ – Ergänzungen zum Thema Standardabweichungen beim TI-89 Titanium/Voyage™ 200

Barbara Ringel

Guido Pinkernell hat in seinem Artikel „S ≠ σ – oder: Standardabweichung ist nicht gleich Standardabweichung" in den TI-Nachrichten 1/06 die Unterschiede zwischen der empirischen Standardabweichung S und der Standardabweichung σ bei der Auswertung von Datensätzen dargestellt. Er hat u.a. darauf hingewiesen, dass vom TI-83 die Standardabweichung σ ausgewiesen wird, während dies beim TI-89 Titanium nicht geschieht.

Auf eine manuelle Berechnung von σ kann beim TI-89 Titanium oder auch dem Voyage™ 200 verzichtet werden: Die Standardabweichung σ wird nämlich bei der statistischen Auswertung auch berechnet, allerdings nicht angezeigt. Mit dem Befehl σx lässt sich im `Home-Editor` der Wert hervorholen (Abb. 3). Vorher müssen die Daten unter dem Typ `Data` im `Data/Matrix-Editor` eingegeben und dort über das `Calc-Menü` (F5) ausgewertet werden (Abb. 1 / Abb. 2).

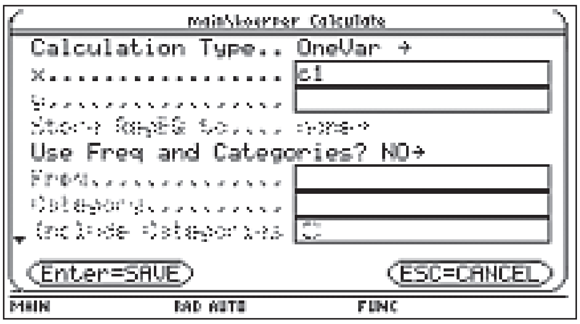


Abb. 1

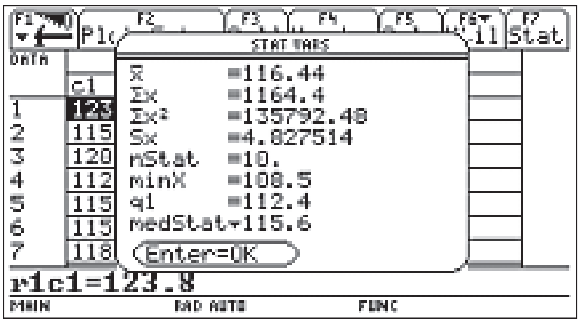


Abb. 2

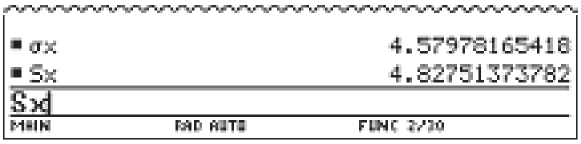


Abb. 3

Beim TI-89 Titanium wird das Zeichen σ so erzeugt: [◆] [(] [alpha] [S]
Beim Voyage™ 200 ist es die Tastenfolge: [2nd] GS

Analog erhält man mit beiden Rechnern im Home-Editor den Wert für S unmittelbar durch die Eingabe Sx.

Es gibt übrigens für alle Kenngrößen, die bei einer statistischen Auswertung berechnet werden, entsprechende Befehle, mit denen man sie einzeln im Home-Editor aufrufen und weiter verwerten kann. Die zugehörigen Tastenfolgen können im Handbuch zum TI-89 im Kapitel 16: *Statistiken und Darstellung von Daten* nachgelesen werden.

Beim TI-89 Titanium und dem Voyage™ 200 sind die Daten im Data/Matrix-Editor leider nicht statistisch auswertbar, wenn sie dort als Typ Liste eingegeben werden; für eine statistische Auswertung muss vorher als Typ Data gewählt werden. Das ist ein Umstand, der – wie ich finde – deutlich stört, gilt doch offensichtlich: Listen sind nicht immer Listen! Das ist für Anwender nicht nachvollziehbar.

Wenn die Daten im Data/Matrix-Editor doch unter dem Typ Liste oder im Home-Editor als Liste (z.B. als l1) eingegeben wurden, lassen sie sich aber im Home-Editor ohne weiteres mit den Befehlen OneVar l1 (Tastenfolge: [2nd][MATH][6][1] l1) und ShowStat auswerten.

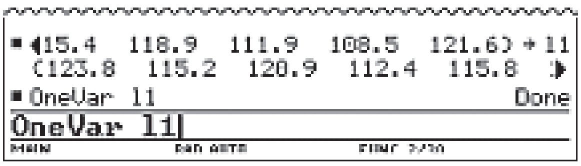


Abb. 4

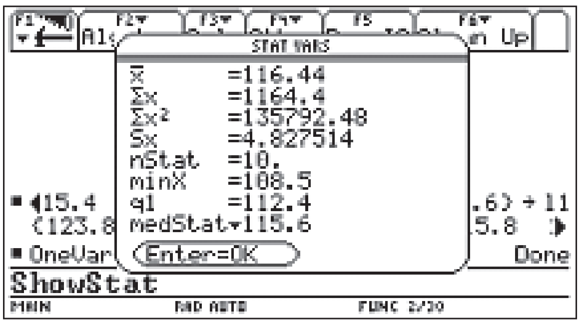


Abb. 5

Der Befehl ShowStat (Tastenfolge: [2nd][MATH][6][8]) zeigt die statistische Auswertung der zuletzt dafür ausgewählten Liste an; ShowStat kann nur nach Ausführung des Befehls OneVar l1 angewendet werden. Auch Sx und σx lassen sich nur nach dem Befehl OneVar l1 aufrufen. Entsprechend verfährt man bei zweidimensionaler Statistik (Befehl TwoVar l1, l2) mit σx und σy, bzw. Sx und Sy.

Die Befehle mean(, stdDev(usw., die über [2nd][MATH][6] aufrufbar sind, können ebenfalls direkt auf Listen angewendet werden.

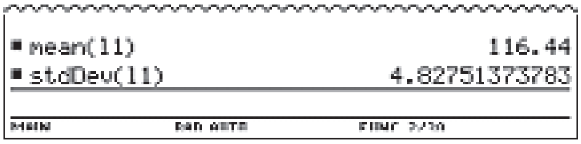


Abb. 6

Hinweis:
Beim Voyage™ 200 ist σ, genau wie bei den Graphikrechnern TI-83 und TI-84 Plus, natürlich sofort sichtbar, wenn die Daten im Stats/List-Editor eingegeben und ausgewertet werden.

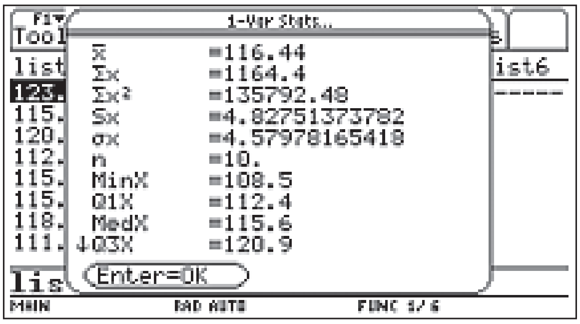


Abb. 7

Hierzu wird die Applikation *Statistics with List Editor* benötigt. Diese Applikation steht für Sie zum kostenlosen Download auf den Internetseiten von TI Deutschland bereit. Einen Screenshot zeigt Abbildung 7.

Autorin:
Barbara Ringel, Bielefeld (D)
ringel.barbara@t3deutschland.de

Autoren willkommen! Kritik erwünscht!

Ihr Beitrag zu den TI-Nachrichten ist herzlich willkommen, besonders natürlich Beispiele aus dem Unterricht. Ihre Kritik hilft uns, Ihren Wünschen besser gerecht zu werden. Ihr Lob spornt uns an.

Senden Sie Ihre Beiträge bitte an unsere Länderredaktion:
Deutschland und Österreich:
Herrn Stefan Luislampe: rade.luislampe@t-online.de
Schweiz:
Herrn Alfred Vogelsanger: a.vogels1@bluwin.ch
oder an
Texas Instruments, E&PS, TI-Nachrichten, Haggertystraße1, D-85356 Freising, E-Mail: ti-nachrichten@ti.com

„Mehrwertaufgaben“ – ohne großen Aufwand CAS und GTR sinnvoll einsetzen

Guido Pinkernell

Man hört es bei Fortbildungsveranstaltungen immer wieder: „Jetzt haben wir den Rechner an der Schule neu eingeführt und ich soll ihn im Unterricht einsetzen. Was kann ich denn jetzt damit machen?“ Der Hinweis auf die mittlerweile zahlreich vorliegenden Materialienbände als Antwort wirkt da unter Umständen entmutigend, sinnvoller sind vielleicht kleine, wirkungsvolle Unterrichtsideen, die den „Mehrwert“ des Rechnereinsatzes ohne großen Aufwand deutlich machen können. Im Folgenden sollen einige solche Aufgaben vorgestellt:

1. „Mach' den Otto zur Null“ – zur Einführung in das Rechnen mit Termen

Algebra lernen mit Computer-Algebra-Systemen? Wie kann man etwas lernen mit einem Gerät, das einem die Arbeit abnimmt? Indem man die versteckte Funktionsweise des Geräts erkundet und dann erklärt. Und zwar so:

Die Schüler sehen es ihrem neuen CAS-Gerät schnell an, dass er sich von den handelsüblichen Taschenrechnern unterscheidet. Man kann damit nicht nur Zahlen, sondern auch Buchstaben schreiben. Und so kann man sie häufig dabei beobachten, wie sie ihren Namen oder ganze Texte eingeben. Diese Neugier auf die Möglichkeiten des Rechners lässt sich für ein exploratives Erkunden der Blackbox „CAS“ nutzen:

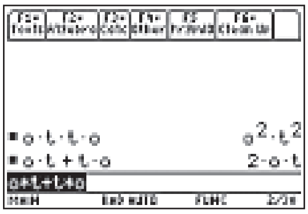


Abb. 1

1. Gib deinen eigenen Namen ein.
2. Finde einen Eingabeterm, bei dem sich besonders viel ändert.

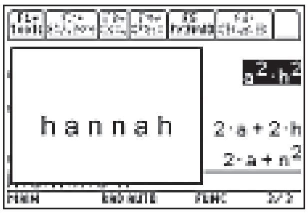


Abb. 2

3. Wie lautet der Eingabeterm?
4. Kann man aus „Hannah“ auch eine 0, 1 oder 2 erzeugen?

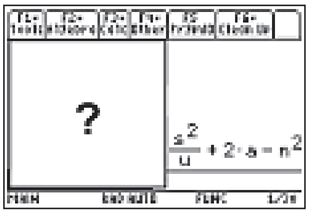


Abb. 3

5. Wie lautet der Name?
6. Erfinde eigene Rätsel.
7. Formuliere Regeln, nach denen der Rechner umformt.

Erst die siebte Frage thematisiert Termumformungsregeln. Dass die Systematisierung erst spät erfolgt ist als eines der wesentlichen Prinzipien der „Blackbox-Aufgabe“ seit langem hinreichend bekannt: Mittels Trial-and-Error-Strategien wird ein Gefühl für die verborgenen Regeln und Gesetze entwickelt, die erst nach dem Bewusstmachen der intuitiv erarbeiteten Zusammenhänge formuliert werden.

2. „Rechenmauern“ – eine weitere Idee zur Einführung in die Algebra

Es handelt sich hier um eine Umsetzung des bekannten Aufgabenformats „Zahlenmauer“ in einer Tabellenkalkulation und ist daher auf verschiedenen Handhelds sowie PCs realisierbar. Dabei sind die Verknüpfungen zwischen den „Mauersteinen“ in Form von Zellbezügen flexibel definierbar, wie das folgende Beispiel zeigt.

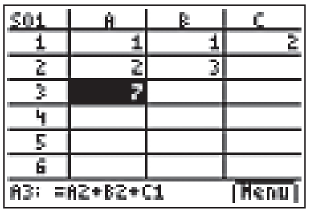


Abb. 4

1. Gebe Zahlen in den Eingabezellen A1, B1 und C1 so ein, dass in Ausgabezelle A3 eine 10 erscheint.
2. Beschreibe, wie die Ausgabezelle mit den Eingabezellen zusammenhängt.
3. Finde eine Formel für A3 in Abhängigkeit von A1, B1 und C1.
4. Programmiere eigene Rechenmauern.

Das Rechnen mit Variablen stellt sich hier dar als ein Rechnen mit Zelleinträgen. Die Zellnamen sind die Zahlvariablen, und sie werden beim Ausprobieren auch als solche wahrgenommen: B1 steht für jede Zahl, die ich in das gleichnamige Feld eingeben kann. Außerdem: Dass die Zellbezüge sichtbar sind (siehe Abbildung: A3:=A2+B2+C1) ermöglicht neben intuitiven Analysen einer Rechenmauer auch algebraische, z.B. mittels Einsetzungsverfahren.

3. „Kanonenschießen“ – zur Einführung in lineare Graphen

Diese Aufgaben kann man im Rahmen einer Einführung in lineare Graphen einsetzen. Der Graph einer proportionalen Funktion wird hier als die Flugbahn eines Geschosses interpretiert, deren Kanone im Ursprung des Koordinatensystems platziert ist. Ein Kreuz (erzeugt durch den Plot eines Datenpunktes) markiert das Ziel. Auf Zuruf modifiziert der Lehrer den Parameter p im Funktionsterm, mittels dessen – wie den Schülern bald klar wird – die Flugbahn des Geschosses gesteuert werden kann.

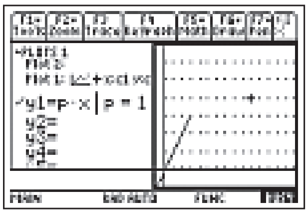


Abb. 5: p=1

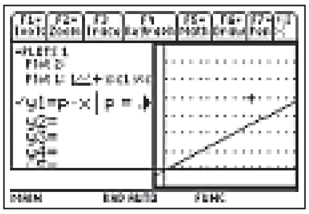


Abb. 6: p=0,25

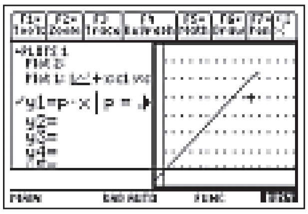


Abb. 7: p=0,5

Offensichtlich liefert der Rechner Hinweise auf eine Verbesserung der anfänglich noch unsicheren Schätzwerte. Bald wird auch der Zusammenhang zwischen einem passenden p und den Zielpunktkoordinaten deutlich. Diese sind den Schülerinnen und Schülern bekannt, wenn sie der Lehrer – mit dem OHP-Display von allen beobachtbar – bei jedem Durchgang neu eingibt. Weitere Variationen sind möglich:

- Abb. 8: Was haben alle getroffenen Zielkoordinaten gemeinsam?
- Abb. 9: Fallen heißt „negativ steigen“
- Abb. 10: p ist nicht mehr unmittelbar als y/x berechenbar.

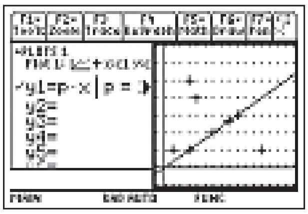


Abb. 8

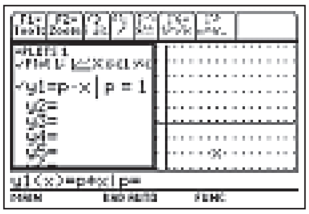


Abb. 9

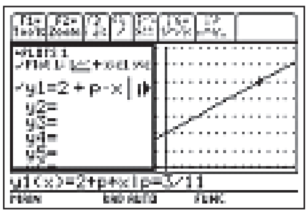


Abb. 10

4. Zahlgefühl entwickeln

Neben dem exakten Berechnen eines Zahlwertes ist das Schätzen und Überschlagenkönnen ein Lernziel des Mathematikunterrichts. Gerade vor dem Hintergrund des extensiven Rechnereinsatzes ist letzteres umso wichtiger, wenn es gilt, mögliche Eingabefehler an einem auffälligen Rechnerergebnis zu erkennen. Also auf den Rechner verzichten? Nicht notwendigerweise. Man kann ihn benutzen, um ein Gefühl für Zahlen und Größen zu entwickeln. Man gibt wie beim Zielwerfen ein Ziel vor, das möglichst genau getroffen werden soll. Nicht die exakte Berechnung ist Zweck der Aufgabe, sondern ihre Näherung durch sinnvolles Schätzen. Dabei gibt ein falscher Schätzwert Hinweise für eine Verbesserung der Aufgabe.

Eine einfache Variation des Zielwerfens im Rahmen der Prozentrechnung könnte so aussehen. Der Lehrer stellt die folgende Aufgabe: „6 von 28 Schülern der Klasse haben schon einmal geraucht. Wie viel Prozent sind das etwa?“

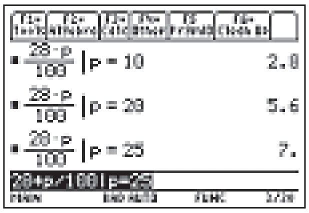


Abb. 11

Die Schätzwerte werden vom Lehrer in den Rechner eingegeben, dessen Eingabefenster mittels Projektion für die Klasse einsichtig ist. 10% ist offensichtlich zu klein, 20% besser, und 25% etwas zu hoch. Wie beim Zielwerfen ist hier die exakte Lösung nicht gefragt, sondern ein guter Schätzwert. Der Rechner insbesondere liefert nicht die Lösung, sondern wird so eingesetzt, dass er Hinweise für eine Verbesserung des Schätzwerts gibt.

5. Rechnerprotokolle – für eine nachvollziehbare Dokumentation

Häufig wird beim Rechnereinsatz die Tatsache beklagt, dass Schüler die Rechnereingaben und -ausgaben schlicht abschreiben und dies als „fertige“ Verschriftlichung ihrer Aufgabenbearbeitung betrachten. Dass da noch einiges an einer nachvollziehbaren und formalmathematisch akzeptablen Dokumentation fehlt kann an den nachfolgend abgebildeten Aufgaben deutlich gemacht werden. Sie stammen aus unterschiedlichen Bereichen, die Idee ist aber immer dieselbe: Die Rechnungen sind erfolgt – wie lautet eine passende Aufgabenformulierung?

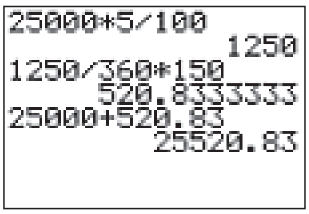


Abb. 12 (Idee: R. Berding)

Als Mehrwertaufgabe sind sie einfach zu konstruieren. Man nehme eine Standardaufgabe, rechne sie als Lehrer selbst mit dem Rechner durch und lege die Bearbeitung in Form von Screenshots den Schülern vor (Abb. 13). Aufgabestellung: Schreibe eine nachvollziehbare Dokumentation der Lösung.

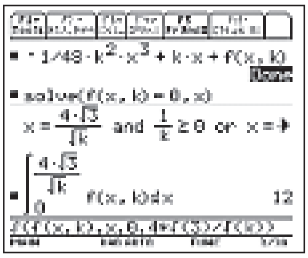


Abb. 13

6. „Kommentiere!“ – Aufgaben für die Klassenarbeit

In einer Klassenarbeit oder Klausur sollen die Schüler zeigen, dass sie die Unterrichtsinhalte verstanden haben. Neben Rechenaufgaben sind Aufgaben wichtig, in denen sie ihr Verständnis von einem Begriff oder einer Regel deutlich machen. Insbesondere darf man im Idealfall erwarten, dass sie wesentliche Eigenschaften wiedererkennen, auch wenn sie nicht explizit auf den Sachverhalt aufmerksam gemacht werden.

Der Rechner ist ein Reservoir mathematischer Begriffe und Regeln. Werden diese gezielt abgerufen, dann kann die Aufgabenstellung kurz ausfallen: Kommentiere!

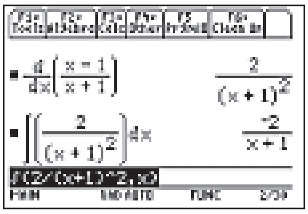


Abb. 14 (Idee: S. Stachniss-Carp)

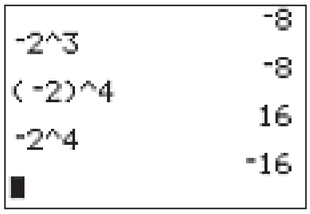


Abb. 15

Autor:
Guido Pinkernell, Lingen (D)
Gymnasium Johanneum Lingen
guido.pinkernell@gmx.de

Der TI-84 Plus im Physikunterricht der Oberstufe Beispiele für den Einsatz von EasyLink™ und EasyData™

Jürgen Enders

1. Vorbemerkungen

EasyLink™ ist ein einfach zu bedienender Einkanal-Messwertaufnehmer für den TI-84 Plus und kann bei vielen Versuchen eingesetzt werden. Das kleine Gerät benötigt keine eigene Stromquelle, denn es wird über den USB-Port mit dem Taschenrechner verbunden. Voraussetzungen für die Verwendung von EasyLink™ sind:

- Das Betriebssystem 2.40 und
- die Applikation EasyData™ 2.0 müssen auf dem TI-84 Plus installiert sein
- ein Sensor, der an EasyLink™ angeschlossen wird.

Ich beschränke mich in den Beispielen auf die Verwendung eines Spannungssensors, wie er in der Sekundarstufe II häufig zum Einsatz kommt.

Wird EasyLink™ mit dem TI-84 Plus verbunden, erkennt der Taschenrechner das Gerät und startet EasyData™. Sobald ein Sensor angeschlossen ist, erkennt ihn die Applikation und der Messwert wird mit großen Ziffern im MAIN-Bildschirm der Applikation dargestellt. Jetzt arbeitet die Gerätekombination als normales Digital-Multimeter (DMM).

Mit den Funktionstasten kann man nun verschiedene Aktionen auslösen. Zur Aufzeichnung von Messreihen bietet das *SETUP* (F2) (Abb. 1) mehrere Möglichkeiten. Bei den nachfolgenden Beispielen wurde stets der Modus *ZEIT-GRAPH* (Abb. 2) verwendet, die Geräte also als xt-Schreiber eingesetzt. Es lassen sich die Intervalllänge und die Anzahl der Messwerte einstellen, woraus EasyData™ die Dauer der Messreihe errechnet. Es können maximal 375 Messwerte im Abstand von minimal 0,005 s aufgenommen werden.

Abb. 1

Abb. 2

Mit *START* (F3) wird eine Messreihe gestartet; mit *STOP* kann sie jederzeit unterbrochen werden. Man kann den Fortgang der Messreihe graphisch in einem Vorschaumodus verfolgen. Ist die Messung beendet, erscheint die Grafik in einem den Messwerten angepassten Fenster. Jetzt hat man die Möglichkeit, über *ANLYZ* (F3) die Grafik auszuwerten (Abb. 3) oder sich über ADV (F1) (Abb. 4) auch andere Plots z.B. zu Vergleichszwecken anzusehen.

Abb. 3

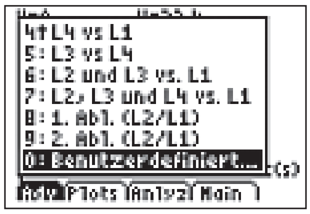


Abb. 4

Die aufgenommene Messreihe wird in den Listen *L1* (Zeit) und *L2* (Messwerte) gespeichert. Diese Listen werden bei jeder neuen Messreihe überschrieben. Für vergleichende Untersuchungen sollte man die Listen unter einem anderen Namen speichern. Man kann sie auch mit TI-Connect™ auf den PC übertragen und von dort als CSV-Datei in eine Tabellenkalkulation exportieren.

Die Messgraphen lassen sich als Screenshots problemlos mit TI-Connect™ auf den PC übertragen, auch wenn dazu EasyLink™ vom Taschenrechner getrennt werden muss, da der USB-Port benötigt wird. Während der Aufnahme einer Messreihe oder im DMM-Betrieb ist eine Kommunikation mit dem PC nicht möglich.

2. Auf- und Entladen eines Kondensators

Bei der Durchführung des Versuchs ist zu beachten,

- dass die Ladespannung kleiner als 10 V ist, da der Spannungssensor nur für Spannungen im Bereich 0 .. ±10 V ausgelegt ist.
- dass man einen Kondensator hoher Kapazität wählt, um gut messbare Ladezeiten zu erhalten

Außerdem habe ich die standardmäßig montierten Abgreifklemmen des Spannungssensors durch handelsübliche Bananenstecker ersetzt.

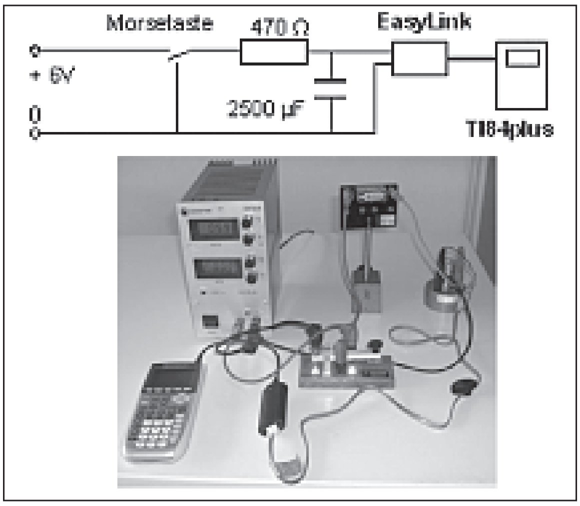


Abb. 5

Abb. 5 zeigt den Schaltplan sowie den Versuchsaufbau, Abb. 6 zeigt die von EasyData™ erzeugte und automatisch skalierte Grafik.

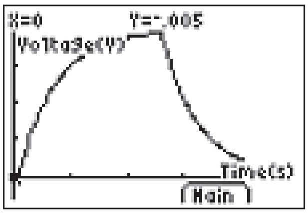


Abb. 6

Wählt man nur den Bereich der Entladung aus und führt man eine exponentielle Regression durch, so erhält man eine perfekte Überdeckung der Messdaten durch den Regressionsgraphen. Die Zeitkonstante ist dann $R \cdot C \approx 1{,}387$ s, ein realistischer Wert für die verwendeten alten Bauelemente.

3. Pendel

Von mehreren Firmen gibt es starre Pendel ähnlich einem Uhrpendel, deren Bewegung in ein elektrisches Signal umgewandelt wird. Ich habe ein Pendel der Firma ERWE verwendet, bei dem ein Hallgenerator zum Einsatz kommt. Oberhalb der Pendelmasse ist eine Stativstange befestigt, die in einen Wassertank ragt, so dass eine deutliche Reibung erzeugt wird (Abb. 7).

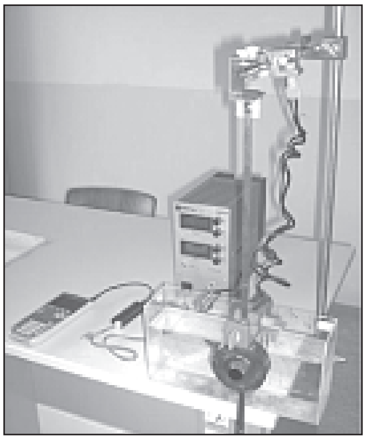


Abb. 7

Zeichnet man nur wenige Perioden auf (Abb. 8), so lässt sich gut die Periodendauer bestimmen (hier $T \approx 1{,}2$ s). Bei mehreren Perioden, in Abbildung 9 sind es 15, wird die Dämpfung deutlich sichtbar.

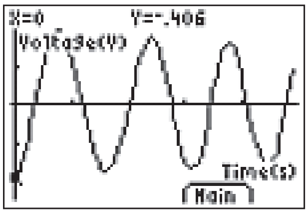


Abb. 8

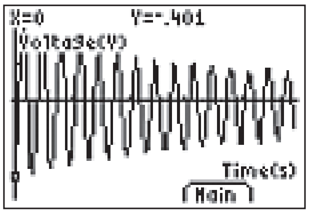


Abb. 9

Damit die Schwingung für eine Auswertung genau genug abgebildet wird, wurden hier 200 Messungen mit $\Delta t = 0{,}1$ s durchgeführt. Zur Berechnung der Dämpfungsfunktion bestimmt man mittels *TRACE* die Maxima. Man kann sie auch gleich auf einen zweiten Taschenrechner übertragen und dort eine exponentielle Regression durchführen. Die gemeinsame Darstellung von Regressionsfunktion und Schwingung ergibt dann die Abb. 10.

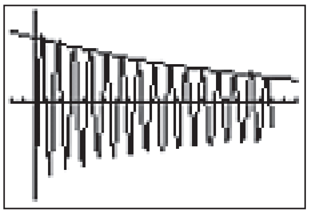


Abb. 10

4. Franck-Hertz-Versuch

Üblicherweise stellt man den Auffängerstrom gegen die Beschleunigungsspannung dar. Der Versuch kann mit einem Einkanal-Messgerät durchgeführt werden, wenn man dafür sorgt, dass der Spannungsanstieg konstant erfolgt. Ich habe im Versuch ein Netzgerät verwendet, das einen linearen Spannungsanstieg erzeugt (Abb. 11). Die Anstiegsgeschwindigkeit sowie die maximale Spannung habe ich vorher durch Ausprobieren bestimmt und EasyData™ entsprechend eingestellt.

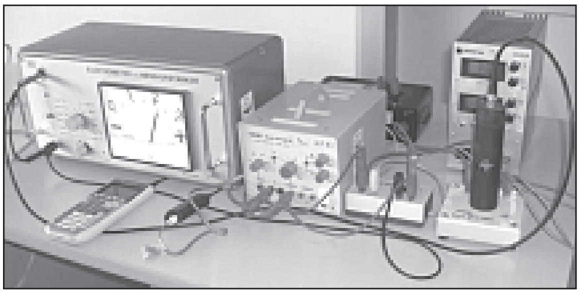


Abb. 11

Die Beschleunigungsspannung ist jetzt proportional zur Zeit (Zeitachse), und der Auffängerstrom wird auf der y-Achse dargestellt (Abb. 12) – natürlich als Spannung, da ja ein Spannungssensor verwendet wird!

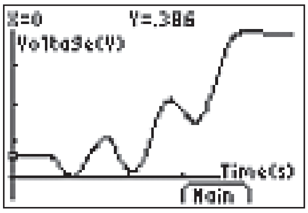


Abb. 12

EasyData™ und das Netzgerät werden zeitgleich gestartet; die Applikation wird gestoppt, wenn die maximale Spannung erreicht ist. Dieser Zeitpunkt lässt sich im Graphen durch Abtasten mit *TRACE* noch genauer bestimmen.

Im Beispiel waren 50 V nach 167 Zeitintervallen zu je 0,075 s erreicht. Das ergibt pro Zeitintervall einen Spannungsanstieg von $\Delta U \approx 0{,}3$ V. Damit erhält man für die Minima 12,9 V - 26,1 V - 39,3 V.

5. Spektrum der Röntgenröhre

Das Spektrum wird mit der Drehkristallmethode unter Verwendung eines NaCl-Kristalls bestimmt. Die Drehung muss mit einer konstanten Winkelgeschwindigkeit erfolgen, damit Zeit und Winkel zueinander proportional sind, so dass man aus der Zeit auf den Winkel zurück schließen kann.

Ich habe dazu einen langsam drehenden Experimentiermotor verwendet, der einen Stahldraht aufwickelt, der vom Drehknopf der Winkelverstellung abgewickelt wird (Abb. 13).

EasyLink™ wurde an den Analog-Ausgang (für ein Zeigermessinstrument) des GM-Betriebsgerätes angeschlossen.

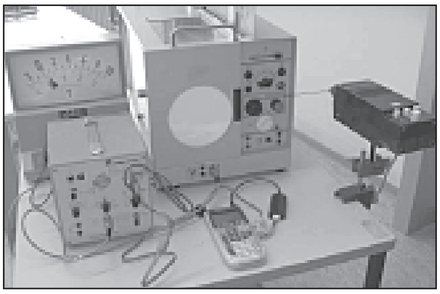


Abb. 13

Die Zeiger für die Winkelstellung wandern dabei langsam über eine Skala. EasyData™ wurde bei 4° gestartet und bei 12° wieder gestoppt. Bei $\Delta t = 0{,}25$ s und 200 Messungen ergab sich eine effektive Messzeit von 48 s, damit eine Geschwindigkeit von 0,083 °/s (Abb. 14).

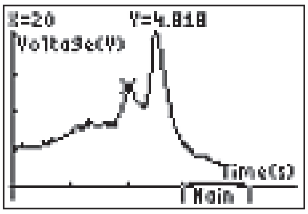


Abb. 14

Für die K_α-Linie ergibt sich ein Winkel von 8,3° gegenüber dem Literaturwert von 7,3° für das 1. Maximum.

Autor:
Jürgen Enders, Hameln (D)
Gymnasium Bad Pyrmont
aj.enders@t-online.de

Neue Medien im Chemieunterricht – Varianten der Säure-Base-Tradition

Frank Liebner

Die Volumetrie, auch Titration genannt, ist eine quantitative Analysenmethode in der Chemie. Volumetrische Bestimmungen können in der Regel mit einfachen Geräten ausgeführt werden und erfordern wenig Zeit.

Die Nutzung von modernen Messgeräten in Form von Handheldtechnologie ermöglicht eine neue Herangehensweise an die Behandlung des Analysenverfahrens im Unterricht. Unter Nutzung des eigenen Rechners, des CBL 2™ und entsprechender Messfühler wie Temperatursensor, pH- Sensor und Leitfähigkeitssensor können die Schüler selbst experimentieren.

Nachfolgend werden drei „Varianten“ der Säure- Base- Titration am Beispiel der Reaktion von Natronlauge mit Salzsäure vorgestellt. Die im Teilchenbereich ablaufenden Veränderungen werden durch die folgende Reaktionsgleichung beschrieben.

$$Na^+ + OH^- + H_3O^+ + Cl^- \rightleftarrows Na^+ + Cl^- + 2\,H_2O$$

Das Wesen jeder Neutralisation ist die Reaktion von Hydronium(H_3O^+)- und Hydroxid(OH^-)- Ionen zu Wassermolekülen (H_2O) durch einen Protonenübergang. Diese Tatsache bildet die Grundlage für die durchzuführenden Messungen.

Experiment I

Dem Experiment I liegt eine pH- Wertmessung zu Grunde. Mittels des pH- Sensors kann die Veränderung der Stoffmengenkonzentration der Hydronium- Ionen der Salzsäure bei Zugabe von Natronlauge gemessen werden.

Einer Verringerung der Stoffmengenkonzentration der Hydronium- Ionen durch Neutralisation und damit der langsamen Erhöhung des pH- Wertes folgt ein pH- Wertsprung, der den Endpunkt der Titration (Äquivalenz- und Neutralpunkt; pH= 7) enthält. Durch weitere Zugabe von Natronlauge erhöht sich die Konzentration der Hydroxid- Ionen und damit der pH- Wert.

Abb. 1

100 ml Salzsäure, Stoffmengenkonzentration $c = 0{,}1\ mol \cdot l^{-1}$ werden mit Natronlauge der Stoffmengenkonzentration $c = 1\ mol \cdot l^{-1}$ titriert. Eine pH- Wertmessung wird nach Zugabe von jeweils 1 ml Natronlauge durchgeführt. Die Messung ist nach Aufnahme von 15 Messwerten beendet.

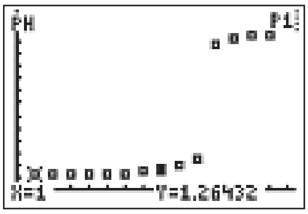


Abb. 2

Experiment II

Grundlage für die Durchführung dieses Experimentes ist die Änderung der Leitfähigkeit von Lösungen durch Änderungen der Stoffmengenkonzentration von Ionen. Mittels eines Leitfähigkeitssensors werden auftretende Veränderungen gemessen.

Bei Zugabe von Natronlauge zur Salzsäure kommt es zu oben beschriebener Neutralisation. Dabei verringert sich die Konzentration der Hydronium-Ionen in der Lösung. Durch eine geringere relative Ionenbeweglichkeit der ebenfalls zugegebenen Natrium-Ionen im Vergleich zu den Hydronium-Ionen sinkt die Leitfähigkeit der Lösung.

Am Äquivalenzpunkt (Neutralpunkt) besitzt die Lösung die geringste Leitfähigkeit. Danach steigt diese aufgrund der zunehmenden Hydroxid-Ionenkonzentration wieder an.

Abb. 3

100 ml Salzsäure, Stoffmengenkonzentration $c = 0{,}1\ mol \cdot l^{-1}$ werden mit Natronlauge der Stoffmengenkonzentration $c = 1\ mol \cdot l^{-1}$ titriert. Eine Leitfähigkeitsmessung wird nach Zugabe von jeweils 1 ml Natronlauge durchgeführt. Die Messung ist nach Aufnahme von 20 Messwerten beendet.

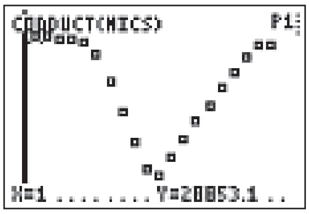


Abb. 4

Experiment III

Bei der Reaktion von Hydroxid- mit Hydronium- Ionen kommt es zu einer Energieumwandlung und damit zur Abgabe von Wärme. Die daraus resultierende Temperaturänderung der Lösung wird mittels Temperatursensor gemessen.

Die aufgezeichnete Kurve zeigt zuerst einen Anstieg der Temperatur, der durch die ablaufende Neutralisationsreaktion zu erklären ist.

Das Temperaturmaximum gibt den Äquivalenzpunkt (Neutralpunkt) an. Der sich anschließende Temperaturabfall kommt durch das Ausbleiben der Reaktion und dem eintretenden Verdünnungseffekt zustande.

20 ml Natronlauge, Stoffmengenkonzentration $c = 1\ mol \cdot l^{-1}$ werden in ein Kalorimetergefäß gegeben und deren Temperatur bestimmt.

Abb. 5

Unter Rühren gibt man siebenmal je 5 ml Salzsäure der Stoffmengenkonzentration $c = 1\ mol \cdot l^{-1}$ in die Natronlauge und bestimmt nach jeder Säurezugabe die Temperatur.

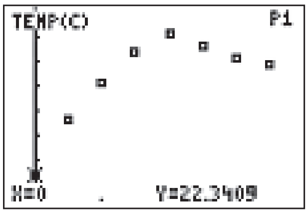


Abb. 6

Die beschriebenen Experimente eignen sich sowohl zur Erarbeitung als auch zur Bestätigung der zu Grunde liegenden Gesetzmäßigkeiten und zum Einsatz in der analytischen Chemie.

Der Einsatz von z.B. Ethansäure der Stoffmengenkonzentration $c = 0{,}1\ mol \cdot l^{-1}$ statt Salzsäure ermöglicht den Vergleich der Titration von starken bzw. schwachen Säuren mit starken Basen. Schüler können durch die Interpretation der entsprechenden Graphen z.B. erkennen, dass es beim Einsatz von schwachen Säuren Unterschiede zwischen Äquivalenz- und Neutralpunkt gibt.

Hinweis:

Seit dem Jahre 2005 entwickeln und testen Lehrerinnen und Lehrer aus mehreren Bundesländern für T3-Deutschland verschiedene Experimente aus den Bereichen Chemie und Naturwissenschaften. Als Ergebnis präsentiert die Arbeitsgruppe eine Handreichung unter dem Titel:

„Experimenteller Chemieunterricht – Datenerfassung mit dem CBL 2™“ .

In dem Material finden Sie eine kurze Einführung in die Handhabung der verwendeten Software, Anleitungen für 9 Experimente und Kopiervorlagen zum Einsatz im Unterricht. Dieses Material wird durch die Autoren ständig erweitert.

Weitere Informationen und Materialien finden Sie im Internet unter http://ww.t3deutschland.de.

Autor:

Frank Liebner, Herrnhut (D)
Geschwister-Scholl-Gymnasium Löbau
Frank_Liebner@t-online.de

Das Lösen von Linearen Gleichungssystemen – gar nicht so einfach

Siegfried Schwehr

Das Problem

„Bei `rref()` wird dividiert, und zwar unerwünscht“, so könnte man plakativ den von G. DREEßEN-MEYER in den TI-Nachrichten 2/05 [1] geschilderten Problemkreis benennen. Dieses Problem stellte sich auch den Lehrkräften der Technischen Gymnasien Baden-Württembergs vor Jahren, als der CAS-Schulversuch gestartet wurde (s. SCHWEHR [7]). Das Lösen von Gleichungssystemen mit Parametern gehörte zum Bestand der zentral gestellten Abituraufgaben. Natürlich testete man die neuen Rechner an alten Aufgaben – und erlebte, dass beim `rref()`-Befehl etwas schief ging, wie das folgende Beispiel eines homogenen linearen Gleichungssystems aus einer Nachprüfung von 1990 zeigt:

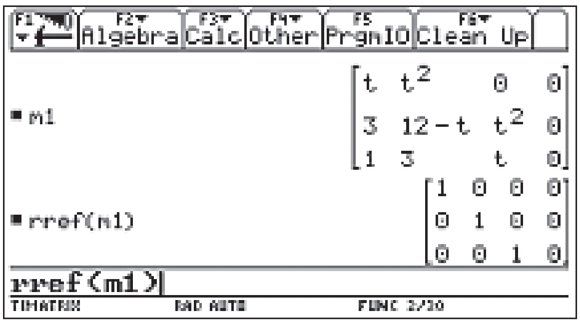


Abb. 1

Man könnte vermuten, dass dieses LGS nur die triviale Lösung besitzt. In derselben Aufgabe war anschließend ein damit zusammenhängendes inhomogenes LGS zu lösen:

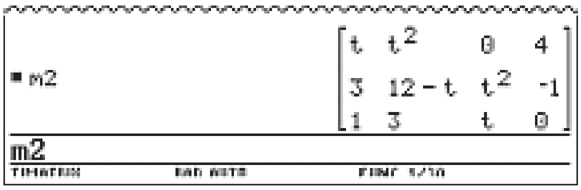


Abb. 2

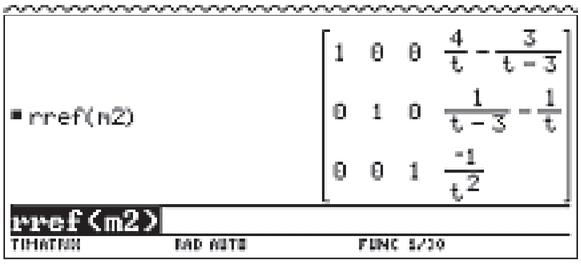


Abb. 3

Hier ergaben sich durch Anwendung des `rref()`-Befehls in der 4. Spalte Nenner, aus denen man auf zwei kritische Werte t=0 und t=3 aufmerksam gemacht wurde. Mit dem Substitutionsoperator erhielt man z.B. für t=3, dass das LGS unlösbar ist. Für t=0 ergab sich dasselbe.

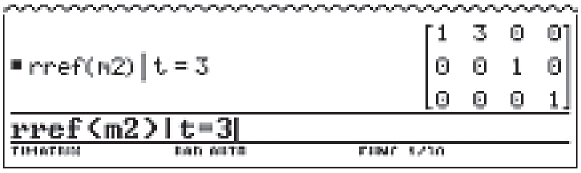


Abb. 4

Bei verschiedenen Lehrerfortbildungsveranstaltungen wurde erörtert, dass man mit Determinanten arbeiten könnte. Bildet man bei diesem Beispiel aus `m2` durch Löschen der 4. Spalte die neue Matrix `m2red` und ermittelt die Nullstellen der Determinante dieser Matrix, bekommt man zu den schon bekannten Werten 0 und 3 den fehlenden Wert 4 geliefert. Für diesen Wert hat das LGS unendlich viele Lösungen:

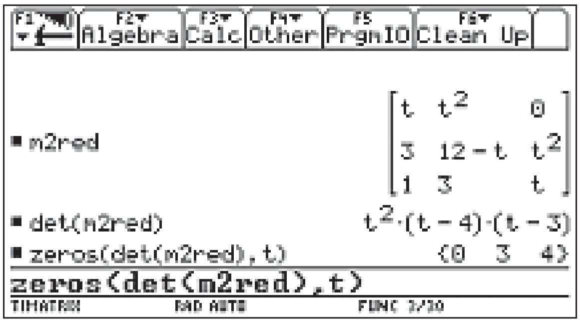


Abb. 5

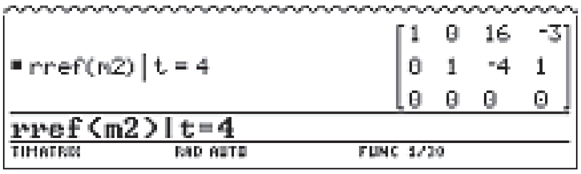


Abb. 6

Das lies sich gut unterrichten. Determinanten waren zwar nicht Lehrplaninhalt, aber man hatte das gute Gefühl, etwas für die Zukunft der Schüler zu tun. Schließlich sind Determinanten wichtig, und dank des Rechners erfordert die Rechnung nicht viel Aufwand.

Die Kontrollspalte

Offen blieb, wie man bei nichtquadratischen Systemen vorgeht. Meines Wissens hat DR. F. GRENACHER (Teningen) als erster auf mehreren Veranstaltungen die Idee vorgetragen, Kontrollspalten zu verwenden. Im Unterschied zu DREEßEN-MEYER [1] schlug er vor, für jede Zeile eine Variable zu verwenden.

Ergänzt man mittels `augment()`-Befehl die Matrix `m2`, so erhält man in der Kontrollspalte Ausdrücke, welche im Nenner die passenden ganzrationalen Funktionen in der Variablen t haben, deren Nullstellen alle gesuchten t-Werte liefern:

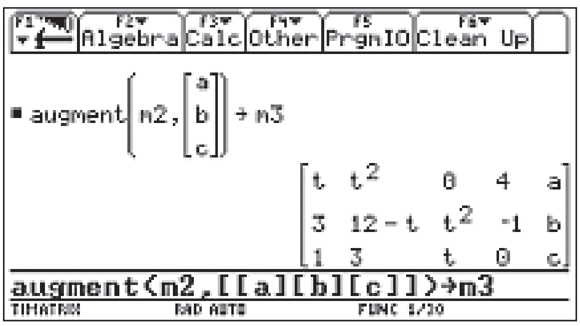


Abb. 7

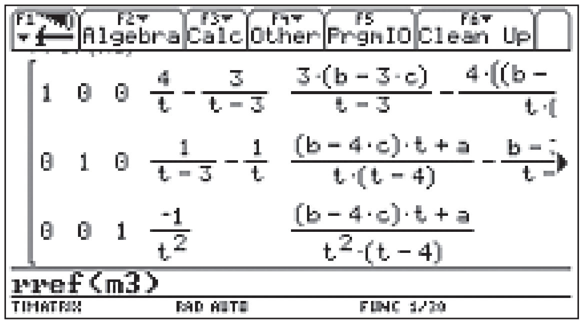


Abb. 8

Auf dieselbe Weise kann das oben angegebene homogene Gleichungssystem gelöst werden. Auch das von DREEßEN-MEYER [1] aufgegriffene Beispiel von KEUNECKE [3] lässt sich so erfolgreich bearbeiten.

Der Unterricht

Wie kann man den Schülern die Idee vermitteln, dass für diese mit dem `rref()`-Befehl zusammenhängenden Probleme eine Kontrollspalte verwendet wird? Es funktioniert, mag man sagen, aber für den Unterricht wünscht man sich Hinführungen, welche über dieses rein praktische Argument hinausgehen. Ein möglicher Vorschlag wird hier vorgestellt.

Ein Blick auf das, was bei dem homogenen LGS geschieht, kann hier weiterhelfen. Zuerst muss erkannt werden, dass der Rechner die einzelnen Gleichungen durch Division möglichst vereinfacht. Löst man das homogene System von Hand, vertauscht man zuerst die 1. und die 3. Zeile und erhält nach den üblichen Umformungen die folgende Dreiecksform:

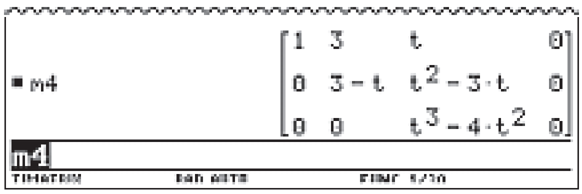


Abb. 9

Dass der Voyage™ 200 dividiert, kann man schon anhand des `ref()`-Befehls erkennen:

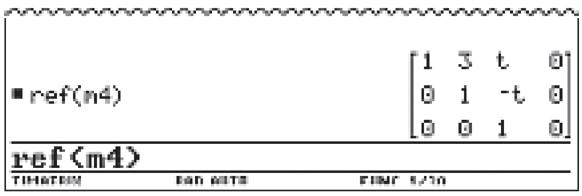


Abb. 10

Die Beobachtung, dass der Rechner dividiert, um die Einsen in der Hauptdiagonalen zu bekommen, führt auf die Idee, wie man das Dividieren verhindern kann: Man ersetzt die 4. Spalte durch etwas, was von Null verschieden ist. Dass man hier eher verschiedene Variablen als konkrete Zahlen nimmt, kann man diskutieren lassen (mit passenden Beispielen) oder mitteilen, das ist u.A. auch eine Frage der verfügbaren Zeit. Bei der Behandlung des inhomogenen Systems liegt es dann relativ nahe, diese „Divisionsverhinderungsspalte“ als Zusatzspalte anfügen. Ob man dieses Unwort verwenden will sei dahingestellt. Der Wortteil „Kontroll“ suggeriert, dass das

Dividieren „kontrolliert“ wird, von daher kann man auch beim Ausdruck Kontrollspalte bleiben.

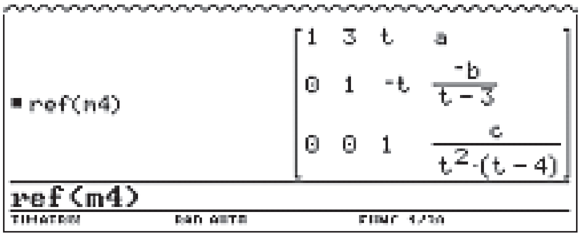


Abb. 11

Mit `rref()` bekommt man in der 4. Spalte etwas kompliziertere Terme.

Akzentverschiebungen

An diesem Thema/Beispiel kann man gut die durch Einführung von CAS-Systemen bedingten „Akzentverschiebungen“ (vgl. HENN [2]) erkennen. Früher stellte man derartige Aufgaben, um abzuprüfen, ob man Kenntnisse über die Lösbarkeit von linearen Gleichungssystemen und damit zusammenhängend, über die Lösbarkeit von Polynomgleichungen hatte. Dazu musste man neben der Beherrschung der Lösungstechniken für LGS die Polynomdivision und die Faktorzerlegung ganzrationaler Terme beherrschen. Mit dem CAS wird man mit genau denselben Themen konfrontiert, allerdings von einer anderen Warte aus. Die Termumformungen, deren Komplexität früher hauptsächlich den Bewertungsmaßstab bildete, bleiben jetzt eher im Hintergrund. Die anderen Themen bleiben.

Lösen mit Hilfe von `Solve`?

Man kann natürlich auch versuchen, Lineare Gleichungssysteme mittels `Solve` zu bearbeiten, was mit dem TI-92 noch nicht möglich war, aber mit dem TI-92 Plus und Voyage™ 200 durchgeführt werden kann.

Bei dem ersten Beispiel aus diesem Artikel ergeben sich Probleme. Beschränkt man sich in der Liste der Lösungsvariablen nur auf die Unbekannten x, y und z, so bekommt man, wie RAUPP und SCHEU [5, S. 8] beschreiben, nicht den gewünschten vollständigen Überblick über alle Fälle: Der Fall t=4 bleibt außen vor.

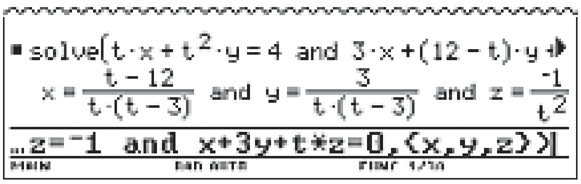


Abb. 12

Den Versuch, wie dort vorgeschlagen, mit der Variablenliste {x,y,z,t} zu arbeiten, führt vielleicht zum Ziel: Allerdings habe ich nach 15 min (Voyage™ 200) bzw. 45 min (TI-92 Plus) den Versuch erfolglos abgebrochen.
Bearbeitet man das KEUNECKE-Beispiel mit `Solve`, so bekommt man bei beiden Varianten der Lösungsvariablenliste dasselbe Resultat:

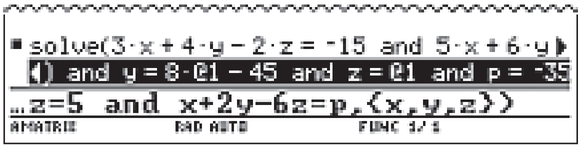


Abb. 13

Schrittweise von Hand bearbeiten

Mit der von KEUNECKE vorgeschlagenen selbstgeschriebenen Funktion, mit der ein Vielfaches einer Zeile zu einem Vielfachen einer anderen Zeile addiert werden kann, kann man das eingangs gewählte Beispiel erfolgreich bearbeiten. Nach einigen Umformungsschritten gelangt man am Schluss zu einer Matrix, deren Diagonalelemente aus aussagekräftigen Produkten bestehen (hier aus Gründen der Übersichtlichkeit im Texteditor dargestellt):

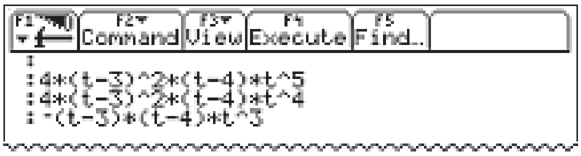


Abb. 14

Setzt man die einzelnen Terme gleich Null, wird man auf die interessanten Fälle t=0, 3 oder 4 geführt. Der zeitliche und technische Aufwand (Polynome als Faktoren eingeben) ist gegenüber der Verwendung der Kontrollspalte deutlich höher. Dafür hat man schöne Ausdrücke, an denen man die kritischen Fälle leicht ablesen kann.

Diskussion

Damit wäre die Entscheidung eigentlich klar, welche Methode man beim Lösen von Linearen Gleichungssysteme mit Parametern nimmt: `Solve` funktioniert nicht immer, bei der Verwendung von Zahlen als Kontrollspalte kann es Probleme geben [1], und die von KEUNECKE vorgeschlagene, schrittweise Lösungsmethode ist zeitaufwendig. Mit einer Kontrollspalte aus Variablen kommt man sicher und schnell zum Ziel.

Ganz so einfach ist es leider nicht. Es liegt in der Natur der Sache, dass man nun versucht, Grenzfälle auszuloten. Funktioniert die Kontrollspaltenmethode wirklich immer? Wie z.B. sieht es aus, wenn man das aus einer Gleichung bestehende System t*x+t*y=0 lösen will? Natürlich braucht man zum Lösen dieses Gleichungssystems keinen CAS-Rechner: Für t=0 ist die Lösungsmenge die ganze Ebene, für t<>0 ist es die Gerade mit der Gleichung y=-x. `Solve` unterscheidet diese beiden Fälle, `rref([t,t,0])` ergibt `[1,1,0]`, somit wird der Sonderfall t=0 übersehen, und mit einer Kontrollspalte `rref([t,t,0,a])` ergibt sich `[1,1,0,a/t]` womit der gewünschte Hinweis auf den Sonderfall t=0 vorhanden ist. Man kann auch wie DREEßEN-MEYER [1] eine von Null verschieden Zahl anstelle von a verwenden.

Jedoch: Doppelt man diese Gleichung, so bekommt man Probleme. Ohne Kontrollspalte wird der Fall t=0 übersehen, ebenso mit einer Kontrollspalte, die aus Variablen besteht:

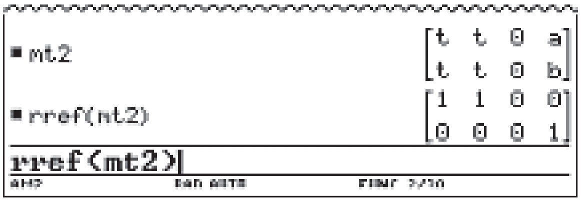


Abb. 15

Zum Ziel führt hier eine Kontrollspalte, die entweder mit lauter Einsen oder, ähnlich wie bei DREEßEN-MEYER [1] vorgeschlagen, mit derselben Variablen (Hinweis von W. GOLL, Adelsheim) gefüllt ist:

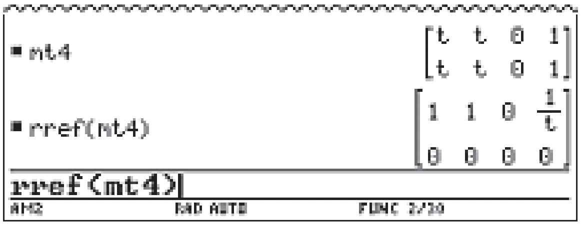


Abb. 16

Eine verwirrende Situation. Welche Vorgehensweise ist denn nun für das Lösen von Gleichungssystemen mit Parametern zu empfehlen? Mit dem von KEUNECKE propagierten Weg, schrittweise vorzugehen, ist man auf der sicheren, aber langsameren Seite (s. auch SCHEU [6, S. 13f]). Mit `rref()` geht es aber deutlich schneller.

Eine weitere systematische Untersuchung wäre wünschenswert. Gibt es subtilere Beispiele, bei denen das Rechnen mit der Kontrollspalte nicht funktioniert? Liegt das Versagen der Kontrollspaltenmethode vielleicht nur daran, dass eine allgemeingültige Gleichung entsteht? Gibt es Informationen über die von TI eingesetzten Algorithmen? Hier gibt es noch viel zu tun.

Vielleicht wird bei den von Texas Instruments immer wieder durchgeführten Neuerungen des Betriebssystems (vgl. etwa PRÖPPER [4]) ein Modul eingebaut, welches das Kürzen gemeinsamer Faktoren verhindert bzw. anzeigt.

Literatur:

[1] Dreeßen-Meyer, G.: *`rref()` – ist der Lösungsmatrix des Voyage™ 200 immer zu trauen?* TI Nachrichten 2/05

[2] Henn, H.-W.: *Computer-Algebra-Systeme- junger Wein oder neue Schläuche?* Journal für Didaktik der Mathematik 25 (2004), S. 198 – 220.

[3] Keunecke, K.-H.: *Erlernen einer Lösungsstrategie für lineare Gleichungssysteme mit Unterstützung von Derive™ oder TI-92 Plus/Voyage™ 200;* TI-Nachrichten 1/04

[4] Pröpper, W.: *Ein wirklich neues Betriebssystem für CAS-Rechner?* TI Nachrichten 2/05

[5] Raupp, R.; Scheu, G.: *Mathematik unterrichten mit TI-89 und TI-92 Plus in Klassenstufe 12 und 13 – Baden-Württemberg, Teil 2 – Analytische Geometrie;* TI-Materialien, Download http://www.t3deutschland.de

[6] Scheu, G.: *Materialien zu den Schulversuchen mit dem TI-92;* Download http://www.t3deutschland.de

[7] Schwehr, S.: *Der CAS-Schulversuch an den Technischen Gymnasien Baden-Württembergs;* Computeralgebra-Rundbrief der GI, DMV, GAMM Ausgabe 36 (März 2005)

Autor:
Siegfried Schwehr, Emmendingen (D)
Technisches Gymnasium Emmendingen
siegfried.schwehr@t-online.de

Vorsicht: Eine korrekt erscheinende aber fehlerhafte Bedienung des Voyage™ 200

Günter Heitmeyer

CAS Wir betrachten die Funktionenschar f_n mit

$$f_n(x)=\frac{x^n}{e^x}\wedge n\in Z.$$

Bestimmt man zu den Graphen dieser Funktionenschar algebraisch mit dem Voyage™ 200 die Punkte mit waagerechter Tangente, so erhält man als Lösung:

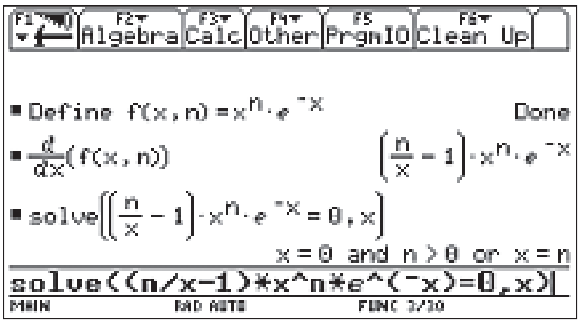


Abb. 1

Diese Lösung suggeriert bereits den fehlerhaften Schluss, für n=1 läge bei x=0 eine waagerechte Tangente vor. Problematisch ist hier die Ausklammerungspraxis im Term der ersten Ableitung.

Ziel ist es jetzt, mit Hilfe der 2. Ableitung die hinreichende Bedingung zu prüfen:

1. Eingabe mit Fehler:

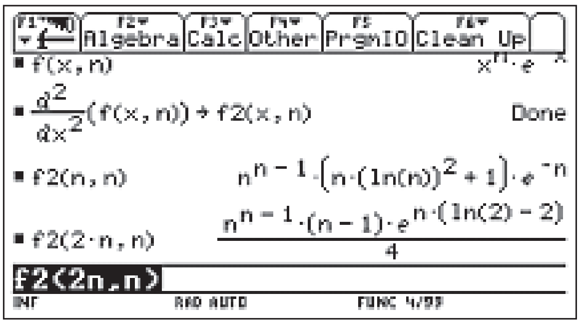


Abb. 2

2. Fehlerfreie Eingabe:

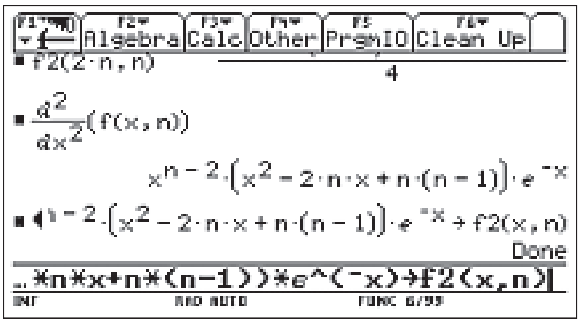


Abb. 3

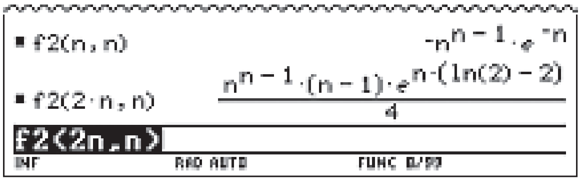


Abb. 4

Die 2. Ableitung wird bei der 2. Version explizit berechnet. Dann wird der errechnete Ableitungsterm in die Editierzeile kopiert und z.B. unter `f2(x,n)` gespeichert. Beim Aufruf von `f2` muss der Rechner dann keine Ableitung mehr ermitteln, sondern kann den bereits bestimmten Term verwenden. Dadurch können Fehler vermieden werden – wie bei dieser Aufgabe – wenn z.B. `f2(n,n)` berechnet werden soll zur Kontrolle der Extremstelle, die „unglücklicherweise“ bei liegt. Benutzt man die 1. Version, die im Ansatz so einfach erscheint, ist für positives n die 2. Ableitung positiv, so dass sich hier ein Tiefpunkt ergeben würde, was natürlich falsch ist.

Bei der ersten Version taucht also der Fehler auf, weil zwischen den „gleichen“ n bei `f2(n,n)` nicht bei der Ableitungsbildung unterschieden werden kann. Dagegen werden 2n und n in beiden Methoden bei `f2(2n,n)` unterschieden und führen zum gleichen richtigen Ergebnis!

Der Programmierer des CAS hat offenbar erst den Parameter n für x eingesetzt und dann die Ableitung gebildet. Es überrascht mich nicht, dass bei `f2(2n,n)` beide Methoden funktionieren. Offenbar ist vom Programmierer hier zunächst keine Termvereinfachung vorgesehen, so dass „n“ und „2n“ wie unterschiedliche Parameter unterscheidbar bleiben.

Version 1 führt auch bei anderen Funktionen auf ähnliche Termfehler, nur man merkt es nicht immer wie hier, wo aus einem Hochpunkt ein Tiefpunkt wurde.

Autor:
Günter Heitmeyer, Stadthagen (D)
guenter.heitmeyer@t-online.de

Mathematischer Aufsatz: „The rule of the three – drei Wege, ein Problem zu lösen“

Vera Kleene

GTR

In der Regel gibt es in der Mathematik drei Wege, ein Problem zu lösen:

- graphisch
- tabellarisch – gezieltes Probieren
- algebraisch bzw. rechnerisch.

Man mag sich vielleicht wundern, warum es nicht einfach ein universelles Verfahren gibt. Nun, jedes Verfahren hat seine Vor- und Nachteile, nicht jeder hält jedes Verfahren für logisch oder zu seinen Absichten passend, doch dazu später noch einmal. Mit diesen drei Verfahren kann man auch jeden linearen Vorgang beschreiben und damit zusammenhängende Aufgaben berechnen, zum Beispiel die Schnittpunkte zweier Geraden berechnen.

Die drei unterschiedlichen Verfahren möchte ich anhand einer Schnittpunktberechnung zweier Geraden beschreiben und erläutern.

Aufgabenstellung:
Familie Müller wandert einen 12 km langen Rundweg. Sie starten um 14 Uhr und planen 4 Stunden ein. Eine Stunde später folgt Herr Kopflos ihnen mit 5 km/h. Wann holt Herr Kopflos die Müllers ein?

Tabellarisch – gezieltes Probieren

Um das Problem tabellarisch zu lösen, benötigt man, logischerweise, zuerst eine Tabelle.

1. Schritt:
Tabelle erstellen und Spalten und Zeilenüberschriften finden

Uhrzeit	Weg –„Müller“	Weg – „Kopflos“
15 Uhr	3 km	0 km
16 Uhr	6 km	5 km
17 Uhr	9 km	10 km
18 Uhr	12 km	15 km

2. Schritt:
Grund- und neu errechnete Werte eintragen

Da Herr Kopflos um 15 Uhr (also eine Stunde später als die Müllers) losgeht, hat er zu diesem Zeitpunkt erst 0 km zurückgelegt, während die Müllers schon eine Stunde mit ihren 3 km/h (12:4=3) wandern. Wie aus der Tabelle deutlich zu erkennen ist, hat Herr Kopflos die Müllers um 17 Uhr bereits überholt, was bedeutet, dass er ihnen bereits begegnet sein müsste (also zwischen 16 Uhr und 17 Uhr). Um die genaue Uhrzeit herauszufinden, muss man die Schrittweite verkleinern.

3. Schritt:
Wenn nötig die Schrittweite zwischen den Uhrzeiten verkleinern – Tabelle verdichten

Uhrzeit	Weg –„Müller"	Weg – „Kopflos"
16.15 Uhr	6,75 km	6,25 km
16.30 Uhr	7,50 km	7,50 km
16.45 Uhr	8,25 km	8,75 km

Die Schrittweite kann man immer wieder verkleinern, was bei komplizierten Aufgaben mit großen oder mit ungünstigen Dezimalzahlen viel Zeit und Platz brauchen könnte. Dennoch ist das Verfahren für viele Schüler das Beste, da eine Tabelle am einfachsten zu erstellen ist.

Graphisch

Um das Problem in einem Koordinatensystem zu veranschaulichen oder zu lösen, benötigt man entweder eine Geradengleichung (Darstellen auf dem TI-83 Plus), zwei Punkte oder einen Punkt und die Steigung (Handzeichnung).

1. Schritt:
Erstellung eines Koordinatensystems, Festlegung der Einheiten an x- und y- Achse

2. Schritt:
Einzeichnen der Geraden (in diesem Fall für Familie Müller und Herrn Kopflos)

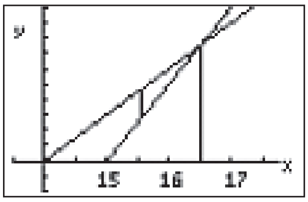


Abb. 1

Wie man in der Graphik leicht erkennen kann, treffen sich Familie Müller und Herr Kopflos um 16.30 Uhr. Zudem kann man aus der Graphik auch leicht entnehmen, wie weit die beiden Parteien zu einem beliebigen Zeitpunkt von einander entfernt sind.

Durch die optische Präsentation der Aufgabe ist die Lösung leicht nachzuvollziehen und sind die Zusammenhänge leicht zu erkennen. Bei der Erstellung der Zeichnung und beim Ablesen können sich jedoch leicht Ungenauigkeiten und Fehler einschleichen.

Algebraisch

Beim algebraischen Lösungsansatz versucht man zuerst die wichtigsten Informationen aus dem Text in Formeln umzuwandeln.

1. Schritt:
Informationen aus dem Text in Formeln umwandeln

Zeit (H. Kopflos) bis zum Einholpunkt:	x
Weg, den F. Müller zurückgelegt hat:	$x \cdot 3+3$
oder	$(x+1) \cdot 3$
Weg, den H. Kopflos zurückgelegt hat:	$x \cdot 5$

Der Term der Müllers besitzt das „+3“, da sie ja eine Stunde (also 3 km) mehr gelaufen sind. Weil die Müllers und Herr Kopflos die gleiche Strecke gelaufen sind, darf/muss man die Terme gleichstellen.

2. Schritt:
Terme gleichsetzen und Lösung der Gleichung bestimmen

$$\begin{aligned} 3 \cdot x + 3 &= 5x \\ 3 \cdot x &= 5x - 3 \\ -2 \cdot x &= -3 \\ x &= 1{,}5 \end{aligned}$$

3. Schritt:
Lösung $x = 1{,}5$ in einen der „Weg-Terme“ einsetzen:
$x = 1{,}5: 1{,}5 \cdot 5 = 7{,}5$

Zusätzlich zu der Information, dass sie sich treffen, wenn Herr Kopflos 1,5 h und Müllers 2,5 h gelaufen sind, erhält man die Information, dass sie sich bei Kilometer 7,5 begegnen.

Das algebraische Verfahren wird von den Mathematikern häufig als „Königsweg“ angesehen, weil es am exaktesten ist. Allerdings benötigt man gewisse „Vorkenntnisse“. Wenn in den Gleichungen hohe Potenzzahlen wie z.B. x5 vorkommen, wird es für Nicht-Mathematiker oder uns Schüler der unteren Klassen zu schwierig:

$$x^5 - 2 \cdot x^2 - 12 \cdot x = x^4 - 2 \cdot x^3$$

Gezieltes Probieren mit ganzen Zahlen führt auf $x = 0$ bzw. $x = 2$ als zwei Lösungselemente. Das graphische Verfahren ergibt zwei merkwürdige Kurven, die sich bei $x = 0$ und $x = 2$ schneiden. Man sieht aber auch, dass es noch einen 3. Schnittpunkt bei $x = -1{,}344389$ gibt, den man durch gezieltes Probieren nicht erhält.

Frage: Die beiden anderen Schnittpunkte liegen auf der x-Achse (!), kann man sie deshalb gezielt Erraten?

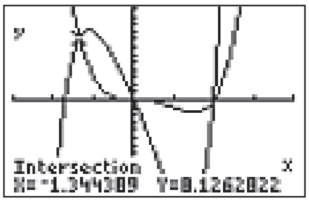


Abb. 2

Algebraisch kann ich das nicht lösen, aber vielleicht lerne ich das ja später?!

Insgesamt hat also jedes Verfahren seine Vor- und Nachteile: Die exaktesten Ergebnisse bietet das recht komplizierte algebraische Verfahren. Für Schüler unterer Jahrgangstufen sind Terme mit hohen Potenzen aber nicht besonders gut zu handhaben.

Zum Darstellen und Verstehen ist das graphische Verfahren am besten. Die abgelesenen Ergebnisse können aber Ungenauigkeiten enthalten.

Das übersichtliche, gut strukturierte und leicht zu erstellende tabellarische Verfahren wird auch bei Fahrplänen verwendet. Es kann jedoch bei großen oder komplizierten Zahlen sehr lange dauern. Das graphische Verfahren kann sehr gut mit dem GTR TI-83 durchgeführt, das tabellarische durch den Computer (z.B. Excel) unterstützt werden.

Letzten Endes muss man bei jeder Aufgabe neu entscheiden, welches Verfahren jeweils am besten geeignet ist. Solange es mir möglich und verständlich ist, bevorzuge ich den algebraischen Ansatz. Als zweite Wahl würde ich das graphische Verfahren benutzen (besonders, wenn die Terme schon gegeben sind!). Mir erscheint das tabellarische Verfahren zu unübersichtlich, es wird aber von vielen Mitschülern gerne benutzt.

Autorin:
Vera Kleene, Stadthagen (D)
Schülerin am Wilhelm-Busch-Gymnasium Stadthagen

Anmerkung des bereuenden Fachlehrers:
Das Wilhelm-Busch-Gymnasium Stadthagen ist ein Ganztagsgymnasium, das an zwei Tagen verbindlich Nachmittagsunterricht durchführt. Eines der pädagogischen Prinzipien der Schule ist, dass Hausaufgaben überwiegend als Wochenplan erteilt werden. Im Rahmen des Mathematikunterrichts der Klasse 8 wurde zum Thema „Gleichungen" ein mathematischer Aufsatz als Wochenaufgabe verlangt, der sich mit unterschiedlichen Ansätzen und Aspekten von „Problemlösen" beschäftigt. Alle Schülerinnen und Schüler arbeiten im Unterricht ab Klasse 7 mit dem Graphikrechner TI-83 Plus bzw. TI-84 Plus. Der vorliegende Aufsatz wurde von einer Schülerin der Klasse 8e angefertigt.

Heiko Knechtel, Bückeburg (D)
Wilhelm-Busch-Gymnasium Stadthagen
Hknechtel@aol.de

TIGCC – Ein Open Source C-Compiler für TI-89 Titanium und Voyage™ 200

Guido Schöb

PC Die Vielseitigkeit der Taschenrechner TI-89 Titanium und Voyage™ 200 kann durch eigene Programme[1] weiter ausgebaut werden. Mit TI-Basic steht eine Programmiersprache zur Verfügung, die schon sehr vieles erlaubt, aber von einem Interpreter abhängt. Texas Instruments stellt einen C-Compiler zur Verfügung, der schnelle ASM-Programme generieren kann. Diese Programme können aber erst auf den physischen Taschenrechner geladen werden, nachdem sie einen mühsamen Zertifizierungsprozess durchlaufen haben.

Mit TIGCC – *TI-GNU-C*-Compiler – steht allen ein Instrument zur Verfügung, ohne Administrationsaufwand auf dem PC schnelle Programme zu entwickeln und auf dem physischen Taschenrechner ablaufen zu lassen. Die dafür notwendige Infrastruktur besteht – neben PC und TI-Rechner – aus drei Hauptkomponenten:

- TIGCC – Entwicklungsumgebung mit Editor und Compiler
- VTI – TI-Simulator (Virtual Texas Istruments)
- TI-Connect o.ä. – Datentransfer zum physischen Taschenrechner

Hier ein sehr schneller und lückenhafter Tour d'horizon.

1. Vorbereitung der Entwicklungsumgebung

1.1 TIGCC

Das Herz der Entwicklungsumgebung – der Editor/Compiler – lässt sich unter http://www.ticalc.org aus dem Internet herunterladen, unterstützt werden die Betriebssysteme Windows, MacOS und Linux. TIGCC ist komfortabel zu installieren, startet sehr schnell, hat einen C-syntaxsensitiven Editor und eine ausführliche Online-Hilfe mit Tutorials. Die Voreinstellungen sind bereits so gegeben, dass sofort mit dem Programmieren begonnen werden kann. Nachteil: Es ist kein Debugger vorhanden.

1.2 VTI

Mit dem VTI[2] steht ein Rechner-Simulator zur Verfügung, der es erlaubt, die kompilierten Programme sofort auf dem PC zu testen. Er spielt nahtlos mit dem TIGCC zusammen, indem kompilierter Code auf Knopfdruck direkt zum VTI übertragen und dort abgespielt werden kann. VTI lässt sich ebenfalls von *www.ticalc.org* herunterladen. Unterstütztes Betriebssystem: Windows (für MacOS gibt es Alternativen, für Linux hingegen noch nicht). VTI ist einfach zu installieren, hingegen nicht immer ganz einfach zu konfigurieren. VTI braucht einen TI-Rechner-ROM-Dump. Dieser ist aus Linzenzgründen nicht im VTI eingebaut. VTI stellt aber bei der Konfiguration eine ROM-Dump-Möglichkeit via Verbindung zum TI-Taschenrechner zur Verfügung. Diese Methode klappt nicht immer. In diesem Fall müssen Auswege gesucht werden. Einer davon führt wieder über *www.ticalc.org*, wo spezielle Datentransferprogramme vorhanden sind, die es erlauben, einen ROM-Dump vom TI-Rechner auf dem PC zu speichern.
Im VTI ist ein einfacher Assembler-Debugger verfügbar.

1.3 TI-Connect

Es gibt viele Möglichkeiten, ein lauffähiges Programm vom PC auf den TI-Taschenrechner zu transferieren. TI-Connect ist komfortabel und im Lieferumfang des Taschenrechners enthalten.

2. Einfache Programmbeispiele

2.1 Ein- und Ausgabe mit Dialogboxen

Nach dem Starten des TIGCC wird ein neues Projekt generiert (bzw. das zuletzt bearbeitete geöffnet). Hier soll nur die Quadratwurzel aus einer eingegebenen Zahl berechnet und angezeigt werden. Daher nennen wir das Projekt „wurzel" (Abb. 1). Es soll nur aus einer einzigen Quelldatei „wurzel.c" bestehen:

Abb. 1

Nach diesen administrativen Aufgaben kann mit dem Quellcode begonnen werden. Über viele weitere Optionen stehen Verfeinerungen und Anpassungen des Kompilations- und Linkvorgangs zur Verfügung. Die Grundeinstellungen decken aber die häufigsten Bedürfnisse ab.

Durch Klicken auf „Run Program (F9)“ wird der Code kompiliert und bei Fehlerfreiheit automatisch auf den VTI transferiert, wo er sofort abläuft, vgl. Beispiel-Quellcode[3]. Hier wird nun das Programm getestet:

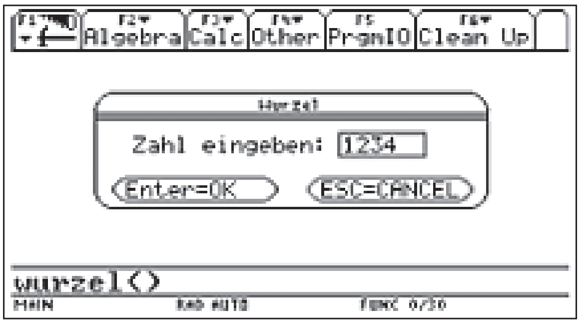


Abb. 2

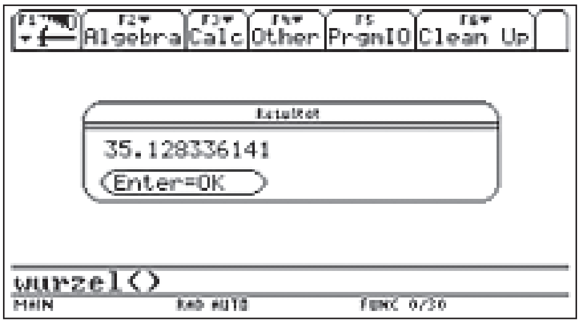


Abb. 3

Ab sofort ist es auch in „VAR-Link“ als ASM-Programm unter dem Namen „wurzel“ aufgeführt:

Abb. 4

Als letzter Schritt bleibt der Transfer auf den physischen TI-Taschenrechner. Der Aufruf vom TI aus geschieht mit „wurzel()“.

2.2 Rückgabe eines Wertes an das TI-OS

Hier soll die Berechnung eines Vektorproduktes vorbereitet und an das TI-OS weitergegeben werden. Dort kann es dann normal weiterverarbeitet werden. Via Programmstack des TI-OS kann von einer Anwendung aus ein Rückgabewert – in diesem Beispiel als String – an das TI-OS überbracht werden, dieser steht somit für weitere Berechnungen dort zur Verfügung, vgl. Beispiel-Quellcode 2. Aufruf mit „rueck1():

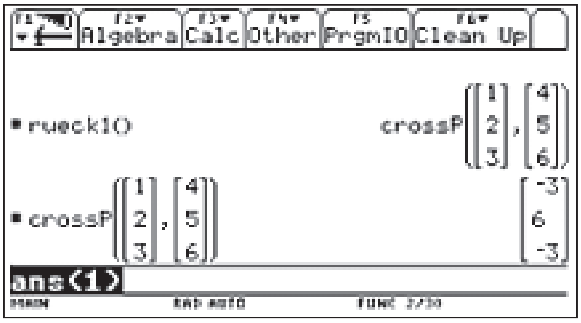


Abb. 5

Dieser Ausdruck kann jetzt auf dem Taschenrechner weiter verwendet werden. Soll der zurückgegebene Wert aber sofort vom TIOS ausgewertet werden, dann ist im Quellcode nach dem letzten Setzen auf den Stack einfach der Befehl

```
push_simplify(top_estack);
```

anzufügen. Aufruf des leicht ausgebauten Programms mit „rueck2()“:

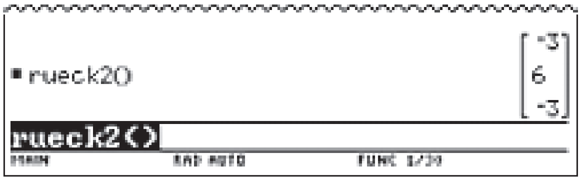


Abb. 6

2.3 Zeichnen auf dem Bildschirm via Algorithmus

Hier wird nochmals das Mandelbrot-Beispiel aus den TI-Nachrichten 2/05 von Heinz Pichler aufgegriffen, da es sich eignet, um Geschwindigkeitsunterschiede abzuschätzen. Dazu wurde der TI-Basic Code (ursprünglich für TI-83/-84 Plus geschrieben) unter Berücksichtigung der unterschiedlichen Bildschirmauflösung auf den TI-89 angepasst. Dabei entsteht dieses Bild:

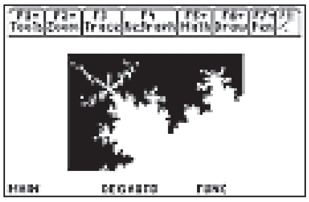


Abb. 7

Der entsprechende Code in C ist der Beispiel-Quellcode 3 (ohne weitere Optimierungen).

Auf dem TI-89 Titanium braucht das TI-Basic-Programm rund dreieinhalb Stunden für die obige Grafik und das C-Programm immer noch eine knappe halbe Stunde.

Anmerkung der Redaktion:

1 Texas Instruments haftet nicht für eventuelle Schäden bei Benutzung von Programmen, die nicht von Texas Instrumenst enwickelt wurden.

2 Beim TI-84 Plus empfiehlt sich statt VTI die Nutzung der TI-Software SmartView™ aufgrund besserer didaktischer und methodischer Möglichkeiten.

3 Zu diesem Artikel sind in der Materialdatenbank auf den TI-Webseiten kommentierte Quelltexte hinterlegt, auf die im Artikel Bezug genommen wird. Die Quelltexte können zusammen mit den Artikeln kostenfrei heruntergeladen werden.

Nebenbei: Der VTI braucht für das C-Programm noch ein paar wenige Minuten, wenn die Ablaufgeschwindigkeit nicht auf den physischen Taschenrechner eingeschränkt wird (abhängig vom Prozessortakt). Das ist sicher eine überzeugende Plattform, um Taschenrechnerprogramme zu testen (auch für TI-Basic).

2.4 Interaktives Zeichnen auf dem Bildschirm

Interaktive Grafik ist ganz wesentlich auf Geschwindigkeit angewiesen. In TIGCC stehen viele Möglichkeiten zur Verfügung, was sicher auch ein Grund für die grosse Zahl von Spielen ist, die via Internet auf den TI geladen werden können. Hier ein Beispiel für ein ganz einfaches Zeichnungsprogramm, vgl. Beispiel-Quellcode 4. Mit den Cursor-Tasten kann ein Polygonzug gezeichnet werden.

Aufruf mit „turtle():

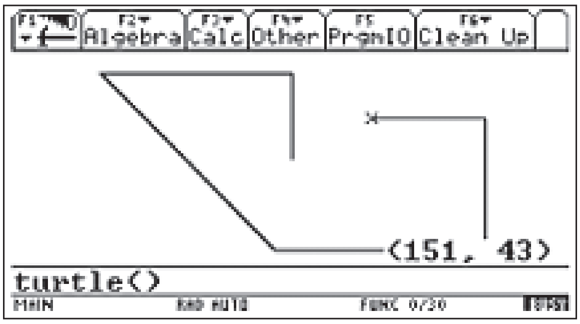


Abb. 8

3. Projekte für Schüler und Schülerinnen

Da die Erarbeitung der Grundlagen (Programmiersprache C, Einarbeit in die Entwicklungsumgebung) und der wohlbekannte Entwicklungsaufwand für ein lauffähiges Programm relativ viel Zeit beanspruchen, sind nur längerfristige Projekte sinnvoll – dafür bei Erfolg entsprechend wohltuend. So gibt es zwei grundsätzliche Möglichkeiten:

- Die Lehrkraft entwickelt etwas für die Schüler und Schülerinnen, die darauf aufbauend – meistens ohne zu Programmieren – Gebiete der Mathematik oder anderer Wissenschaften erforschen (z.B. Fraktale, Simulationen aller Art etc.)
- Die Schüler und Schülerinnen entwickeln über einen längeren Zeitraum eine eigene Anwendung (z.B. eine menugeführte Formelsammlung / Lösungen zu Standardaufgaben oder ein Spiel im Rahmen einer Semester- oder Maturaarbeit).

Quellen/Referenzen:

Die Anlaufstelle schlechthin ist die bereits erwähnte Webpage http://www.ticalc.org mit unzähligen Hilfsmitteln (fertige Programme, Quellcodes, Tutorials, FAQs, Utilities…)
Homepage des Autors: http://www.tiscalinet.ch/g.schoeb, hier findet sich auch eine Beta-Version eines Vektorrechnungsprogramms, das mit TIGCC entwickelt wurde.

Autor:
Guido Schöb, St. Gallen (CH)
Kantonsschule am Burggraben, St. Gallen
guido.schoeb@ksbg.ch

Der Voyage™ 200 als ökonomisches Hilfsmittel im täglichen Unterricht

Hans Schuler

Vorbemerkungen

Der Verfasser war jahrelang Rektor eines grösseren Gymnasiums mit angegliederter Wirtschaftsmittelschule. Bei seinen vielen Unterrichtsbesuchen stellte er mit Bedauern fest, dass der Voyage™ 200 im Leistungsbereich Wirtschaft + Recht nicht oder nur mangelhaft eingesetzt wurde. Um diese unerfreuliche Situation zu beenden, erhielt jeder der 15 Wirtschaftslehrer gratis einen Voyage™ 200 sowie eine Anwenderhilfe (Skript). Die Fachschaft Mathematik stand dem Verfasser mit Rat und Tat zur Seite, ganz im Sinne des fächerübergreifenden Unterrichts. Die folgenden Übungen sind diesem Skript entnommen. Weitere Aufgaben mit Lösungen finden sich im Lehrbuch H. Schuler/P. Weilenmann, F.I.T. – Accounting [1].

Aufgabe 1

In regelmässigen Abständen kaufen wir bei der Import GmbH verschiedene Fitness-Geräte für unser Engrosgeschäft (Bruttokreditankaufspreis, BKA) ein. Der Lieferant hat mit uns für die laufende Periode folgende Bedingungen vereinbart: 25% Wiederverkäuferrabatt und 2% Skonto. Die Bezugskosten (BK) fallen zu unseren Lasten. Sie sind je Lieferung unterschiedlich. Aus der Leistungsrechnung haben wir für diese Periode folgende Zuschläge ermittelt: 48% Gemeinkostenzuschlag, 20% Gewinnzuschlag. Unseren Käufern räumen wir folgende Kaufbedingungen ein: 15% Rabatt, 2% Skonto.

Inzwischen hat der Verkaufsleiter von Kunde A, B, C und D Anfragen erhalten mit der Bitte, so schnell als möglich eine Offerte zu unterbreiten. Sie werden vom Verkaufsleiter gebeten, die Offertpreise zu ermitteln. Dank ihrem Voyage™ 200 bereitet ihnen das keine Mühe. Nach kurzer Zeit teilen Sie dem Verkaufsleiter die verschiedenen Offertpreise mit. Folgende Informationen mussten Sie berücksichtigen:

1. Kunde A: Kaufmenge 20 Stück, BKA je Stück CHF 560.–, BK CHF 150.–.
2. Kunde B: Kaufmenge 30 Stück, BKA je Stück CHF 720.–, BK CHF 100.–.
3. Kunde C: Kaufmenge 25 Stück, BKA je Stück CHF 900.–, BK CHF 145.–
4. Kunde D: Kaufmenge 40 Stück, BKA je Stück CHF 230.–, BK CHF 80.–

1. Schritt:
Bezeichnet x die Kaufmenge, y den Bruttokreditankaufpreis und z die Bezugskosten, so lässt sich der zugehörige Offertpreis auffassen als Funktion in x, y und z, vgl. Abb. 1.

2. Schritt:
Den Offertpreis für den Kunden A bestimmt am nun als Funktionswert f(560, 20, 150), den Offertpreis für den Kunden B als f(720, 30, 100) usw., vgl. Abb. 1.

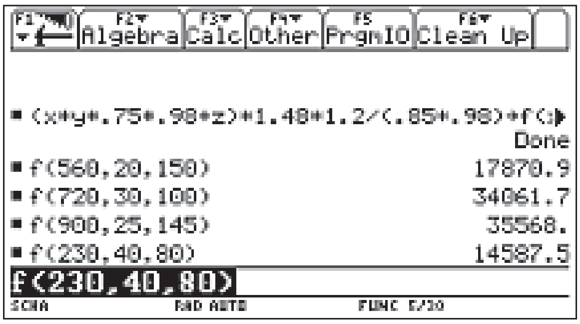


Abb. 1

Aufgabe 2

Ein ausländischer Staat bietet eine 5%-Anleihe in Euro an (Laufzeit 12 Jahre), und zwar im Auktionsverfahren (Tenderanleihe). Jeder Zeichner kann den Emissionspreis, den er höchstens zu zahlen bereit ist, auf dem Zeichnungsschein angeben. Der Emissionspreis wird für alle Zeichner anschliessend einheitlich auf der Höhe der letzten noch berücksichtigten Offerte festgelegt. Die Zuteilung erfolgt in abnehmender Reihenfolge der angebotenen Preise. Welchen Emissionspreis bietet ein Investor, wenn er eine Rendite von 5,5% anstrebt?

Bei der Lösung kann die Flash-Applikation FINANCE eingesetzt werden:

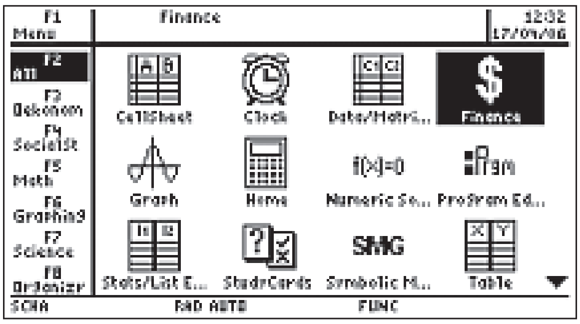


Abb. 2a

Wir verwenden die TVM-Funktionen (Zeitwert eines Geldbetrages, Time-Value-of-Money) zum Analysieren von finanzmathematischen Fragestellungen zu Annuitäten, Anleihen, Hypotheken, Leasing-Verträgen und Ersparnissen. In Abb. 2b werden die TVM-Variablen N, I%, PV, PMT, FV angezeigt. Wenn die Werte für vier Variablen eingegeben sind, ermittelt der TVM-Solver den Wert für die fünfte Variable.

N	Anzahl Ratenzahlungen
I%	Jahreszinssatz
PV	Barwert
PMT	Rate
FV	Endwert
PpY	Anzahl Ratenzahlungen pro Jahr
CpY	Anzahl der Verzinsperio den pro Jahr
END	Festlegung der Fälligkeiten (nachschüssig)

Lösung: Wir stellen den Cursor auf PV und drücken die Taste F2 `Compute`. Das Resultat von -95,6907 wird angezeigt. Das Minuszeichen steht für die Kaufkosten (Ausgaben).

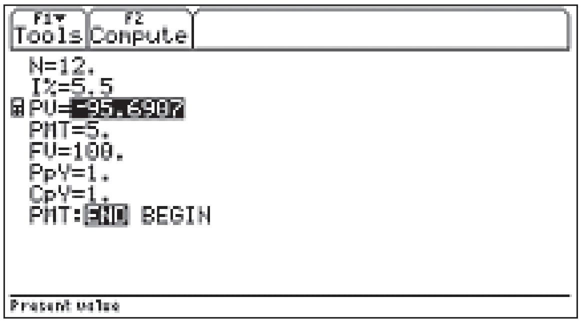


Abb. 2b

Der Investor ist folglich bereit, für diese staatliche Tenderanleihe 95,69 (%) zu bezahlen. Wenn der Emittent ihm unter dieser Bedingung während 12 Jahren p.a. 5 (%) zahlt und am Ende 100 (%) zurückgibt, erzielt er eine Rendite (Internal Rate, I%) von 5,5 %.

Aufgabe 3

Im Allgemeinen stellt sich ein Marktpreis ein, der niedriger ist als der Preis, den eine Anzahl von Nachfragern zu zahlen gewillt waren. Diese Nachfrager haben, da sie nur den Marktpreis zu zahlen haben, Geld gespart. Den auf diese Weise von allen Nachfragern gesparten Gesamtbetrag bezeichnet man als Konsumentenrente. Bezeichnet f(x) den Preis pro Mengeneinheit bei nachgefragter Menge x und g(x) den Preis pro Mengeneinheit bei angebotener Menge x, so ist die Konsumentenrente (CS) definiert als

$$CS = \int_0^{x^*} \left[f(x) - p^* \right] dx$$

Dabei ist P(x*| p*) der Schnittpunkt der Kurven zu f und g und heißt Marktgleichgewicht.

Nehmen wir an, dass die Nachfragefunktion gegeben ist durch f(x) = 50 – 0.1x und die Angebotsfunktion durch g(x) = 0.2x + 20. Wie hoch ist die Konsumentenrente?

Lösung:
1. Schritt:
Wir suchen zuerst das Marktgleichgewicht, also x* und p*.

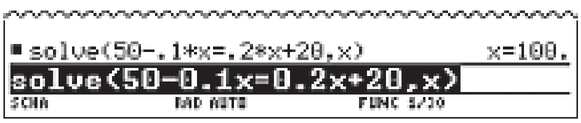


Abb. 3a

Die Gleichgewichtsmenge x* ist 100 und der Gleichgewichtspreis p* folglich 40 (durch Einsetzen).

2. Schritt:
Wir suchen mit Hilfe der Formel die Konsumentenrente (CS). Mit dem Voyage™ 200 ist folgendes Integral zu berechnen:

$$CS = \int_0^{100} \left[50 - 0.1\,x - 40 \right] dx$$

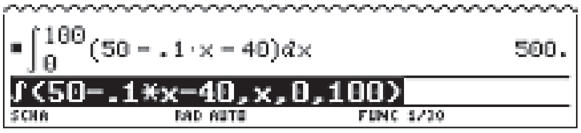


Abb. 3b

Die Konsumentenrente ist 500, wie aus Abb. 3b ersichtlich ist.

Aufgabe 4

Wir wollen die Aufgabe 3 zur Konsumentenrente auch grafisch lösen.

1. Schritt:
Im [Y=] Editor sind die Funktionsterme wie in Abb. 4a einzugeben (man kann mit [F4] y1, y2, y3 ausschalten, sodass nur noch y4 gezeichnet wird). Über das `Zoom`-Menü ([F2]) [A] `[ZoomFit]` erhält man Abb. 4b.

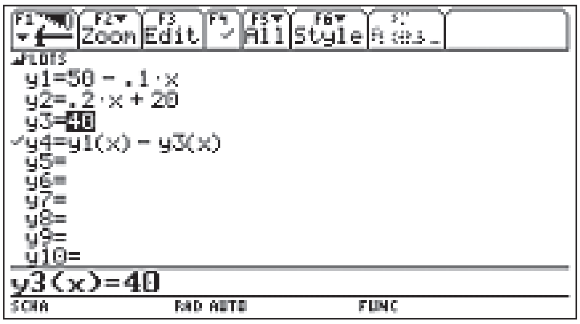


Abb. 4a

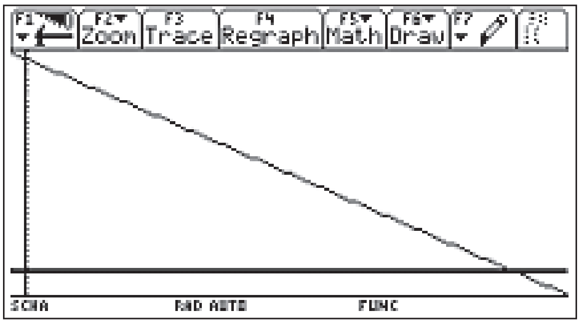


Abb. 4b

2. Schritt:
Wir berechnen die Konsumentenrente über die graphisch-numerische Integration im `Math`-Menü ([F5])[7]; Lower Limit = 0, Upper Limit = 100. Die Grafik zeigt eine Konsumentenrente von 500.

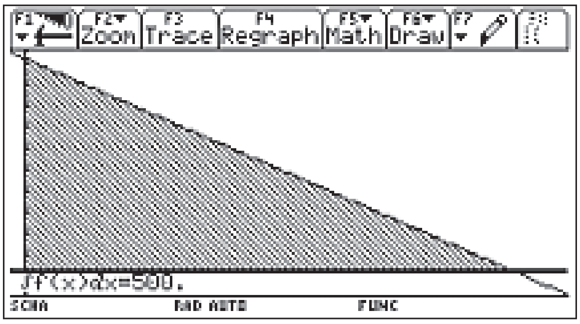


Abb. 4c

Hinweis:
Sollte es mit der Grafik Schwierigkeiten geben, muss das Window manuell eingestellt werden. Ich habe folgende Werte benutzt: `xmin = -5; xmax = 110; xscl = 10; ymin = -1; ymax = 11; yscl =1.`

Literatur/Quellen:
[1] H. Schuler / P. Weilenmann: *F.I.T. – Accounting*, Band 1 – 3, Verlag SKV

Autor:
Hans Schuler, Hünenberg (CH)
h.schuler@dplanet.ch

„It's all greek to me!" Verschlüsselung mit dem RSA-Verfahren

Markus Paul

Es war eine kleine Sensation, als am 8. Nov. 2005 einem Team von deutschen Informatikern nach dreimonatiger Arbeit mit 80 Computern mit 2,2-GHz-CPU gelang, die Zahl RSA-640 mit 193 Dezimalstellen zu faktorisieren:

3107418240490043721350750035888567930037346022842727545720161948823206440518081504556346829671723286782437916272838033415471073108501919548529007337724822783525742386454014691736602477652346609

Die beiden Faktoren sind:
1634733'6458092538'4844313388'3865090859'8417836700'3309231218'1110852389'3331001045'0815121211'8167511579 und 1900871'2816648221'1312685157'3935413975'4718967899'6851549366'6638539088'0271038021'0449895719'1261465571.

Für diese Faktorisierung hatte die Firma RSA Security (www.rsasecurity.com) ein Preisgeld von $ 20 000 ausgesetzt, denn auf der Schwierigkeit, große Zahlen in ihre Primfaktoren zu zerlegen, beruht die Sicherheit des RSA-Verfahrens. Ob Bankautomat, Handy, Kreditkartenüberweisung im Internet, Verschlüsselung von E-Mails, überall wird mit RSA verschlüsselt.

Wie funktioniert diese Schlüsseltechnologie? Kann RSA mit technologischer Unterstützung im Unterricht behandelt werden?

RSA ist ein asymmetrisches Kryptosystem, mit dem Nachrichten mit einem öffentlichen Schlüssel (public key) verschlüsselt und mit einem privaten Schlüssel (private key) entschlüsselt werden. Man kann die asymmetrische Verschlüsselung mit einem Briefkasten vergleichen: Jeder kann einen Brief einwerfen, aber nur der Eigentümer des Briefkastens kann den Brief lesen. Das Verfahren beruht auf zahlentheoretischen Sätzen und funktioniert folgendermaßen:

Schlüsselerzeugung:

1. Wähle zufällig zwei große Primzahlen p und q und berechne den Modul $n = p \cdot q$ und $phi = (p-1) \cdot (q-1)$.
2. Wähle eine Verschlüsselungszahl e (encryption) mit $1 < e < n$ und ggT(e, phi) = 1 (e teilerfremd zu phi)
3. Berechne eine Entschlüsselungszahl d (decryption) so, dass $e \cdot d \equiv 1 \bmod phi$, d.h. $e \cdot d-1$ teilt phi. (Probieren oder euklidischer Algorithmus)
4. Gib das Paar (n,e) als öffentlichen Schlüssel (public key) bekannt, halte das Paar (n,d) als privaten Schlüssel (private key) geheim.

Verschlüsseln: Chiffriere einen Klartext m (message) zum Geheimtext c (cipher text) durch $c = m^e \bmod n$.

Entschlüsseln: Dechiffriere den Geheimtext zum Klartext durch $m = c^d \bmod n$.

Wir demonstrieren dieses Verfahren an einem Beispiel mit Primzahlen, die etwas kleiner sind als in der Praxis:

Frau G.Heim möchte ein virtuelles Postfach einrichten, auf das nur sie Zugriff hat. Sie erzeugt einen öffentlichen und einen privaten Schlüssel in vier Schritten:

1. Schritt:
Sie wählt zufällig zwei Primzahlen, p = 3 und q = 5 (in der Praxis haben diese Primzahlen jeweils mindestens 200 Stellen). Das Produkt ergibt den Modul $n = p \cdot q = 15$. Weiters berechnet sie die Zahl $phi = (p-1) \cdot (q-1) = 8$

2. Schritt:
Frau G.Heim sucht eine weitere Zahl e (encryption, Verschlüsselung) mit $1 < e < n$ und ggT(e,phi) = 1, d.h. e und phi müssen relativ prim sein. Die kleinste Zahl, die diese Bedingung erfüllt, ist e = 3

3. Schritt:
Frau G.Heim berechnet eine Zahl d (decryption, Entschlüsselung) mit der Eigenschaft:

$e \cdot d \equiv 1 \bmod phi$, also $3 \cdot d \equiv 1 \bmod 8$;

d = 11 erfüllt diese Eigenschaft. d kann mit dem euklidischen Algorithmus berechnet oder durch Probieren ermittelt werden:

$3 \cdot d - 1 = s \cdot 8$ bzw $(3 \cdot d - 1)/8$ ist ganzzahlig

Die kleinsten Zahlen, die ein ganzzahliges Ergebnis liefern, sind 3 und 11. Da d nicht gleich e sein sollte, wählt Frau G.Heim d = 11. Beachten Sie: d kann nur dann ermittelt werden, wenn man die Faktoren p und q von n kennt.

4. Schritt:
Frau G.Heim gibt den öffentlichen Schlüssel (public key) (n, e) = (15, 3) bekannt; den privaten Schlüssel (private key) (n, d) = (15, 11) hält sie geheim.

Verschlüsselung:
Herr J.Dermann will nun eine Nachricht m (message) verschlüsselt an Frau G.Heim schicken.

Die Nachricht „`hilfe`" verschlüsselt er in Zahlenblöcken der Länge 2, die Zahlen geben die Stellung des entsprechenden Buchstabens im Alphabet an. Die Zahlenblöcke müssen kleiner als n sein:

08 09 12 06 05.

Er besorgt sich den öffentlichen Schlüssel und ermittelt den Geheimtext c (cipher text) mit $c \equiv m^e \bmod n$

$8^3 = 512 \equiv 2 \bmod 15$
$9^3 = 729 \equiv 9 \bmod 15$
$12^3 = 1728 \equiv 3 \bmod 15$
$6^3 = 216 \equiv 6 \bmod 15$
$5^3 = 125 \equiv 5 \bmod 15$

Der Geheimtext c (cipher text) lautet: 02 09 03 06 05.

Entschlüsselung:
Nur Frau G.Heim kann diesen Cipher-Text mit dem privaten Schlüssel d = 11 entschlüsseln mit der diskreten Exponentialfunktion: $m \equiv c^d \bmod n$

$2^{11} = 2048 \equiv 8 \bmod 15$
$9^{11} = 31381059609 \equiv 9 \bmod 15$
$3^{11} = 177147 \equiv 12 \bmod 15$
$6^{11} = 362797056 \equiv 6 \bmod 15$
$5^{11} = 48828125 \equiv 5 \bmod 15$

Der Klartext lautet: 08 09 12 06 05

Bei diesen Berechnungen treten zwei numerische Probleme auf:

- Selbst bei kleinen Modul-Zahlen erhalten wir bei der diskreten Exponentialfunktion sehr große Zahlen, die sich nur durch ein CAS oder durch rekursive Restbildung bewältigen lassen.

- Zur Verschlüsselungszahl e muss mit dem erweiterten euklidischen Algorithmus das modulare Inverse, die Entschlüsselungszahl d berechnet werden, sodass gilt:

  $e \cdot d \equiv 1 \bmod phi$,

RSA mit Voyage™ 200

Für die Berechnung der Reste steht die Funktion `mod`(Zahl,Modul) zur Verfügung, die sehr leistungsfähig ist.

Die Funktion `privkey(phi,e)` berechnet aus phi und dem öffentlichen Schlüssel e mit dem erweiterten euklidischen Algorithmus den privaten Schlüssel d: (Eingabe über [APPS][7] `(Programm Editor)`[3]`(New...); Type: 2 Function; Variable: privkey)`

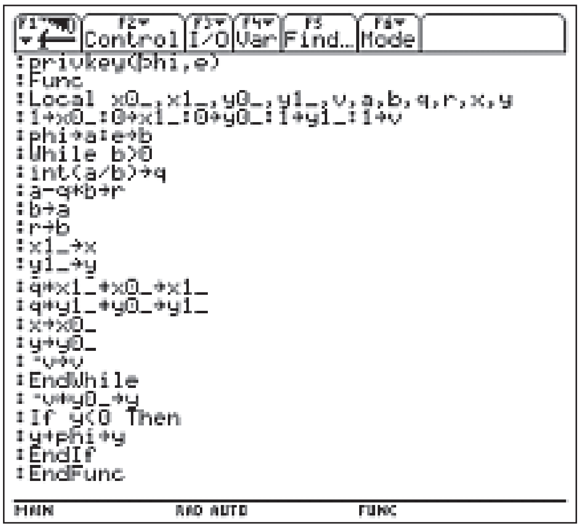


Abb. 1

Mit diesen beiden Funktionen kann verschlüsselt und entschlüsselt werden:

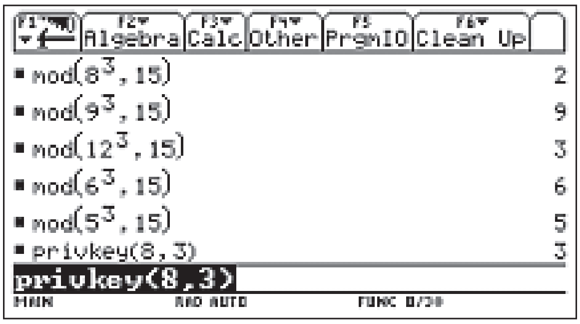


Abb. 2

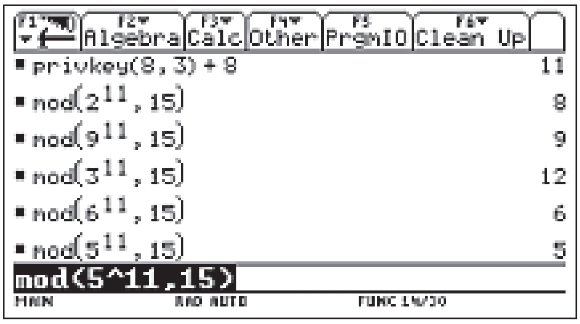


Abb. 3

Die drei Wissenschaftler, nach denen das RSA-Verfahren benannt ist, Ron Rivest, Adi Shamir und Leonard Adleman, wählten in ihrem bahnbrechenden Aufsatz „A Method for Obtaining Digital Signatures and Public-Key Cryptosystems" (1978) als Klartext das Zitat, das Shakespeare dem Julius Cäsar in den Mund legte:

`its all greek to me`

Diesen Text kodierten sie nach der Stellung im Alphabet in eine Klartextzahl, für Zwischenräume setzten Sie jeweils Nullen. In Viererblöcken geschrieben lautet die Nachricht:

0920'1900'0112'1200'0718'0505'1100'2015'0013'0500

Für die RSA-Verschlüsselung wählten Sie die Primzahlen p = 47 und q = 59, als öffentliche Verschlüsselungszahl wählten sie e = 17.

Wie lautet die RSA-Verschlüsselung?

Wir führen die RSA-Verschlüsselung zuerst mit dem Voyage™ 200 durch. Als Modul erhalten wir n = p · q = 2773. Mit der Funktion `mod()` kann verschlüsselt werden:

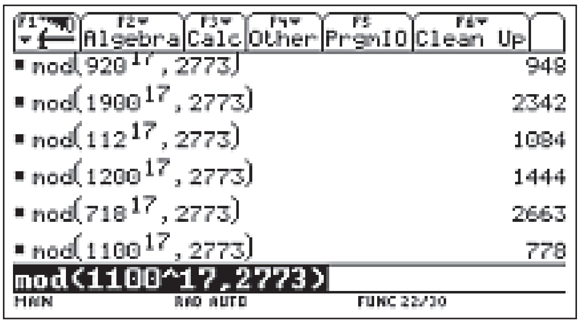


Abb. 4

Nun berechnen wir für phi = (p-1) · (q-1) = 2668 und e = 17 mit `privkey()` den privaten Schlüssel d = 157 und entschlüsseln die Nachricht:

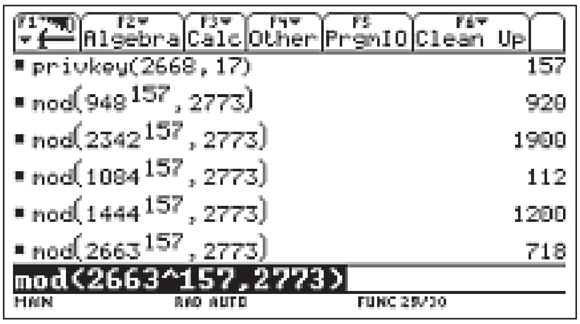


Abb. 5

Beachten Sie: Die Zahl 2663^{157} hat 538 dezimale Stellen (!), eine tolle Leistung, dass der Voyage™ 200 den Rest dieser Zahl richtig berechnet.

Übrigens, der derzeit (Juni 2006) kleinste nicht faktorisierte Modul ist RSA-704 mit 212 Dezimalstellen:

74037563479561712828046796097429573142593188889231289084936232638972765034028266276891996419625117843995894330502127585370118968098286733173273108930900552505116877063299072396380786710086096962537934650563796359

RSA security zahlt für die Faktorisierung $30 000. Viel Spaß bei der Faktorisierung!

Wer Genaueres über die zahlentheoretischen Hintergründe wissen will, kann das in ausgezeichneten Büchern nachlesen:

Literatur:

[1] Buchmann, J.: *Einführung in die Kryptographie;* Springer 2004.

[2] Ertl, W.: *Angewandte Kryptographie;* Hanser Verlag 2003.

[3] Schneider et al.: *Mathematik III HAK;* Trauner-Verlag, Linz 2006 – ein Lehrbuch mit Übungsaufgaben zum RSA-Verfahren

Hinweis der Redaktion:

Der Autor hat einen ausführlicheren Artikel abgefasst, in dem über den Voyage™ 200 hinaus auch die RSA-Verschlüsselung mit dem TI-83/-84 Plus und mit dem Programm TI InterActive!™ beschrieben wird. Diese Version des Artikels mit den entsprechenden Screenshots und dem Quelltext (Programme für den TI-83/-84 Plus) ist im Internet bei TI oder auch T^3 in der Materialdatenbank zu finden.

Autor:

Dr. Markus Paul, Innsbruck (A)

markus.paul@utanet.at

Artikel in der Materialdatenbank

Im Internet unter education.ti.com/deutschland, education.ti.com/oesterreich, education.ti.com/schweiz haben Sie unter der Rubrik „Materialdatenbank" Zugriff auf eine umfangreiche Materialdatenbank, die Artikel, umfangreiche Handreichungen und eine Vielzahl von Verweisen auf gedruckte Veröffentlichungen zum Thema modernen Technologien im Unterricht enthält. Auch die Artikel aus den TI Nachrichten stehen dort als *.pdf-Files zum Download bereit.

Die Suche in der Datenbank wird durch eine Suchmaske erleichtert, durch die u.a. eine Suche nach spezieller Technologie (z.B. CAS, GTR, CBL™) oder z.B. nach bestimmten Autoren über eine Volltextsuche möglich ist. Zu den Materialien sind i.d.R. Detail-Informationen in Form von Kurzzusammenfassungen hinterlegt.

Neu in der Materialdatenbank sind unter anderem die beiden folgenden Artikel:

Der Voyage™ 200 als Funkuhr – Dekodierung des Zeitzeichensignals mit einem DCF 77-Empfänger

Autor: M. Bischof, Achen (D)

Bischof.m@gmx.de

Zur Ermittlung der gesetzlichen Zeit der Bundesrepublik Deutschland dienen Atomuhren, die von der Physikalisch–Technischen Bundesanstalt (PTB) in Braunschweig betrieben werden. Die Verbreitung der Zeit erfolgt mit Hilfe des Zeitzeichensenders DCF 77, der in Mainflingen bei Frankfurt am Main steht.

Zur Aufbereitung des Signals wird im Artikel eine handelsübliche Empfängerplatine unter Verwendung eines Pegelwandlers benutzt. Der Autor erklärt in dem Artikel, wie man dieses Signal mit dem Voyage™ 200 und dem CBL 2™ (oder LabPro) graphisch darstellen und untersuchen kann. Des Weiteren wird das TI–Basic–Programm dcf77.v2p erläutert, mit dessen Hilfe die komplette Zeitinformation empfangen und dekodiert werden kann, um schließlich die aktuelle Zeit und das aktuelle Datum anzuzeigen.

Kryptologie am Voyage™ 200

Autor: M. Schneider, Linz (A)

michi.schneider@eduhi.at

Sinn der Verschlüsselung ist es, einen Text (Klartext) so zu verändern, dass nur ein autorisierter Empfänger in der Lage ist, den Klartext zu rekonstruieren.

Grundsätzlich unterscheidet man zwischen symmetrischen und asymmetrischen Verfahren zur Verschlüsselung. Bei symmetrischen Verfahren wird jedes Zeichen oder jede Zeichenkette eines Textes mit Hilfe eines Schlüssels nach einer bestimmten Vorschrift umgewandelt. Der Empfänger benötigt zum Entschlüsseln den gleichen Schlüssel, wie er bei der Verschlüsselung verwendet wurde.

Bei asymmetrischen Verfahren erzeugt der Empfänger zwei Schlüssel, von denen er einen veröffentlicht (Puplic-Key) und den anderen geheim hält (Private-Key). Der Sender der Nachricht verschlüsselt nun den Text mit Hilfe des Puplic-Keys und nur der Besitzer des Private-Keys kann die Nachricht entschlüsseln.

Der Autor erläutert im Artikel verschiedene Verschlüsselungsverfahren unter Verwendung eines Voyage™ 200, u. a. das RSA -Verfahren. Die verwendeten Programme und die jeweiligen Quelltexte sind ebenfalls in der Materialdatenbank abgelegt.

Innovative Technologie

Dank der Flash-Technologie unserer aktuellen Graphikrechner TI-84 Plus, TI-84 Plus Silver Edition, TI-89 Titanium und Voyage™ 200 können Sie die bestehenden Fähigkeiten der Rechner durch Herunterladen zusätzlicher Applikationen erweitern und Ihren persönlichen Wünschen anpassen. Damit halten Sie sich alle Optionen für die Zukunft offen.

Kostenlose Ausleihe

Sie möchten einen TI-Graphikrechener oder ein Computer-Algebra-System testen?
– Kein Problem! Wir leihen Ihnen Einzelexemplare oder Klassensätze bis zu vier Wochen – kostenlos und unverbindlich!

Unterrichtsmaterialien

Zum Einsatz unserer Graphikrechner haben wir Unterrichtsmaterialien entwickelt, die Sie bei der Vermittlung der Lehrinhalte unterstützen. Über 100 Titel erhältlich!
Eine umfangreiche Materialiendatenbank mit Artikeln zum downloaden finden Sie außerdem auf den Internetseiten von TI.

Lehrerfortbildungen

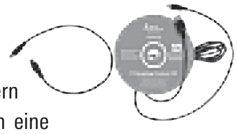
Graphikrechner und Taschencomputer sind für viele Kollegen neu und unbekannt. Wir helfen Ihnen mit Fortbildungen an Ihrer Schule oder auch online!
Wenden Sie sich direkt an T3. Mehr Informationen zu T3 finden Sie im Internet:
T3 Deutschland: www.t3deutschland.de
T3 Österreich: www.t3oesterreich.at
T3 Schweiz: www.t3schweiz.ch

T³ EUROPE

CBL 2 ™/CBR 2 ™

Portable, universell einsetzbares Messwerterfassungssysteme für den naturwissenschaftlichen Unterricht. Über 40 zusätzliche Sensoren erhältlich.

Verbindungskabel zum PC



Die Verbindungskabel zu den TI-Graphikrechnern und Computer-Alegbra-Systemen ermöglichen eine schnelle und stabile Verbindung zum PC.

ViewScreen ™

Projizieren Sie das Display der Lehrerversion Ihres TI-Graphikrechners mit ViewScreen und Overheadprojektor!

TI-Presenter ™

Zur Projektion des Displays der Lehrerversion Ihres TI-Graphikrechners mittels Beamer oder Fernseher.

TI-Presentation Link ™

Mit dem neuen TI-Presentation Link™ kann jeder TI-84 Plus, TI-84 Plus Silver Edition und TI-89 Titanium (jeweils Schüler- und Lehrermodell) mit dem Overheaddisplay View Screen™ oder dem TI-Presenter™ verbunden werden.

Allgemeine Informationen

Nehmen Sie mit unserem Customer Service Center Kontakt auf, wenn Sie technische Auskünfte benötigen oder Fragen zum Gebrauch unserer Rechner oder bezüglich einer Lehrerfortbildung haben. Auch zum Ausleihen der Rechner ist das CSC die erste Adresse:

Wir sind für Sie da: Mo – Fr, 9.00 – 17.00 Uhr

TI-CSC c/o SITEL
Woluwelaan 158
1831 Diegem, Belgien

Tel D: +49 (61 96) 97 50 15	Fax D: +49 (61 96) 97 50 44
Tel AT: +43 (1) 5 02 91 00 07	Fax AT: +43 (1)5 02 91 00 34
Tel CH: +41 (44) 2 73 06 88	Fax CH: +41 (22) 7 10 00 36

Allgemeine Informationen:
ti-cares@ti.com

Kostenlose Ausleihe von Graphikrechnern und Taschencomputern:
ti-loan@ti.com

Kostenloses Abonnement der TI-Nachrichten:
ti-nachrichten@ti.com

Garantie
Auf alle Schulrechner bietet Texas Instruments 3 Jahre Austauschgarantie. Sollte doch einmal etwas defekt sein, rufen Sie bitte zunächst unser Customer Service Center an.
Meist kann das Problem bereits am Telefon behoben werden.

education.ti.com/deutschland · education.ti.com/oesterreich · education.ti.com/schweiz
ti-cares@ti.com

TEXAS INSTRUMENTS

CL2006MNL2/DACH XX/SL/1E5/GK