

TI-Nachrichten

Ausgabe 1/09

Inhaltsverzeichnis

A. Pallack:	
▶ Sind Münzen fair?	1
G. Heitmeyer:	
▶ Algebra veranschaulichen – mit dem TI-Nspire™ Handheld in der Sekundarstufe I	5
H. Körner:	
▶ Die Vase	10
M. Sander:	
▶ Steckbriefaufgaben zu ganzrationalen Funktionen – Modellierung eines Achterbahnschienenverlaufs	16
K. Eilers, B. Lohse-Grimmer, T. Wehrse:	
▶ Der TI-84 Plus im Biologieunterricht: Atmung und Fotosynthese am Beispiel der Kresse	18
J. Enders:	
▶ Lade- und Entladevorgänge am Kondensator	20
S. Knellwolf:	
▶ Potenzen algorithmisch berechnen – Ein einführendes Beispiel in die Komplexitätstheorie	23
H. Pichler:	
▶ Die Behandlung von Kettenbrüchen mit einem GTR	25
▶ Tipps und Tricks	26



▶ **Sind Münzen fair?**

Andreas Pallack



Münzen sind keine genormten Metallscheiben: Sie weichen von der Zylinderform ab. Kann man das zu seinem Vorteil nutzen wenn es darum geht per Münze etwas zu entscheiden? Oder anders: Ist es bei einer 2 € Münze günstiger Kopf oder Zahl zu wählen? *Wie kann man herausfinden, ob eine Münze fair ist oder eben nicht?*

Ein erster Zugang: Münzenwerfen

Schülerinnen und Schüler, die noch keine vertieften Kenntnisse im Bereich der Stochastik haben, beantworten diese Frage häufig so: „Wenn die Münze fair ist, dann sollte Kopf und Zahl gleich oft fallen.“ Das kann man ausprobieren: Lassen Sie die Schülerinnen und Schüler eine Münze aussuchen (evtl. bietet man ihnen auch eine Unterlegscheibe an, die man mit Z und K beschriftet), die aus ihrer Sicht fair ist. Damit dieser Versuch nicht ausartet, sollte man sich auf eine angemessene Anzahl von Würfeln einigen, z. B. 50. In Gruppen sollen die Lernenden nun zählen, wie oft „Zahl“ insgesamt fällt.

Das Ergebnis von vier Gruppen (a, b, c, d) könnte z. B. so aussehen:

1.1		BOG AUTO REELL			
	A	B	C	D	
1	a		25		
2	b		21		
3	c		30		
4	d		28		
5					

Abb.1

Tatsächlich wurde in einem Fall „Zahl“ genauso oft wie „Kopf“ geworfen. Sind die Münzen der anderen Gruppen deswegen aber nicht fair? Überspitzt kann man die oben vorgestellte Schülersaussage auch auf den Fall $N = 2$ übertragen: Eine Münze ist fair, wenn beim zweimaligen Wurf einmal Kopf und einmal Zahl auftritt. Die Wahrscheinlichkeit dafür ist schnell berechnet: Dieser Ausfall tritt nur mit einer Wahrscheinlichkeit von 50 % ein. Alle Zahlen des o. g. Experiments sind durchaus plausibel aber es fällt mir schwer daraus abzulesen, ob die verwendeten Münzen tatsächlich fair sind. Bedeutet das, dass man überhaupt nicht entscheiden kann, ob eine Münze fair ist oder nicht?

Zeichenerklärung:

Computer Algebra System
TI-89, TI-89 Titanium, TI-92 Plus,
Voyage™ 200



Graphische Taschenrechner
TI-82 STATS, TI-83, TI-83 Plus, TI-83 Plus Silver Edition,
TI-84 Plus, TI-84 Plus Silver Edition



Messwerterfassungssystem
CBL 2™, CBR 2™



PC Software – Derive™, TI InterActive!™,
Cabri Geometry II™, TI-Navigator™ System



TI-Nspire™ Handheld, TI-Nspire™ Software, TI-Nspire™ Lehrer-Software
TI-Nspire™ CAS Handheld, TI-Nspire™ CAS Software, TI-Nspire™ CAS Lehrer-Software

Liebe Lehrerinnen und Lehrer,

in den TI-Nachrichten veröffentlichen wir auch immer wieder Beiträge zu aktuellen Pilotschulprojekten. Kennen Sie z.B. das MabiKom Projekt? MabiKom ist ein vom Land Niedersachsen und Texas Instruments unterstütztes Projekt zur Evaluation der mathematischen Kompetenzentwicklung in einem mit neuen Technologien unterstützten Mathematikunterricht. Das Augenmerk liegt dabei auf der Weiterentwicklung der diagnostischen Kompetenz der Lehrkräfte. Wie lassen sich mit den erarbeiteten Methoden des binnen differenzierten Lehrens und Lernens leistungsschwächere Schülerinnen und Schüler individuell fördern und leistungsstärkere Schülerinnen und Schüler sinnvoll fordern? In diesem Zusammenhang ist der Artikel „Algebra veranschaulichen“ von Günter Heitmeyer entstanden. Der Autor beschreibt dabei u.a. welche Möglichkeiten Ihnen die TI-Nspire™ Technologie in den Klassenstufen 7/8 bietet.

Neben Themen für den Mathematikunterricht beinhalten die TI-Nachrichten wieder praxisorientierte Aufgabenbeispiele zur Messwerterfassung, z.B. zu „Lade- und Entladevorgängen am Kondensator“.

Apropos interessante Aufgabenbeispiele: Wenn Sie über die TI-Nachrichten hinaus noch weitere Anregungen für Ihren Unterricht erhalten möchten, dann schauen Sie doch mal wieder auf der TI-Materialdatenbank im Internet vorbei oder abonnieren Sie unseren Newsletter „TI-Materialien“. Kennen Sie z.B. schon die neuen CuBaLibra (CurriculumBasedLibrary) - oder auch die MMM (MinuteMadeMath)-Aufgaben? Neben zahlreichen PDF's zum Downloaden finden Sie auf der Materialdatenbank TI-Nspire™ Dateien (tns-Files), Videosequenzen und vieles mehr: www.ti-unterrichtsmaterialien.net.

Ihr TI-Team

Der Computer würfelt mit

Mit Hilfe der TI-Nspire™ Technologie kann man Münzwürfe simulieren. Der Befehl `randInt(0,1)` gibt mit einer Wahrscheinlichkeit von 50 % die 0 und entsprechend auch mit 50 % die 1 zurück. Ergänzt man noch einen dritten Parameter, nämlich die Anzahl der Würfe, so wird eine Liste mit Nullen und Einsen erstellt, in diesem Fall eine Liste der Länge 50.

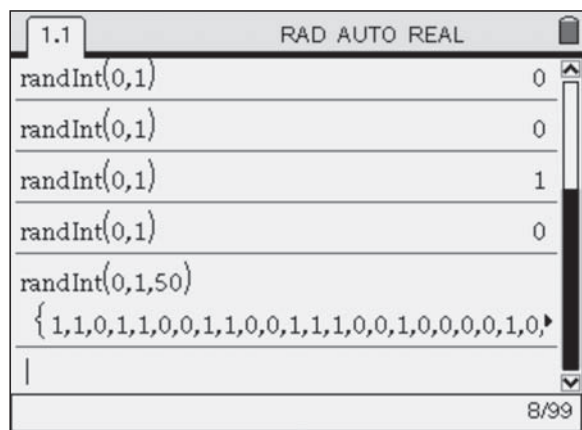


Abb.2

Diese Liste in Abb.2 kann z. B. wie folgt gelesen werden: Im ersten Fall wurde Zahl (=1) geworfen, im zweiten Zahl (=1), im Dritten Kopf (=0) Interessiert man sich nun dafür wie oft Zahl gefallen ist, so müssen lediglich die Elemente der Liste aufaddiert werden:

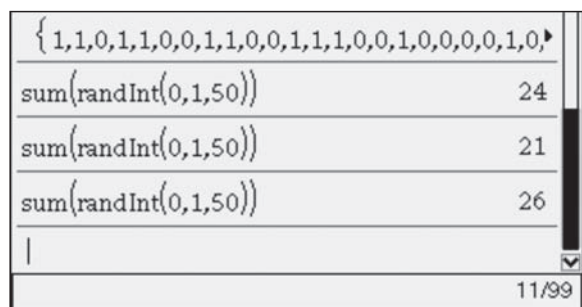


Abb.3

Damit lässt sich der Versuch – eine faire Münze 50mal zu werfen – beliebig oft wiederholen.

Eine Entscheidungsregel finden

Beim 50-maligen Werfen einer fairen Münze und dem Zählen des Auftretens von „Zahl“ kann jedes Ergebnis von 0 bis 50 auftreten. Manche Ergebnisse sind eben nur wahrscheinlicher als andere. Um überhaupt etwas aussagen zu können, benötigt man also eine Entscheidungsregel ab welcher oder bis zu welcher Anzahl von geworfenen „Zahl“ man nicht mehr von einer fairen Münze sprechen möchte. Diese Festlegung ist immer ein wenig willkürlich. Eine mögliche Entscheidungsregel wäre: Die faire Münze wird von jeder Gruppe nicht nur einmal 50-mal, sondern jeweils 40-mal 50-mal geworfen. Alle Ergebnisse die auftreten werden als „realistischer Ausgang“ dieses Experiments akzeptiert. Eine Münze ist entsprechend nicht fair, wenn die Anzahl der geworfenen „Zahl“ über oder unter denen der fairen Münze liegt.

Eine größere Versuchsreihe

Wir führen das Experiment vorab mit dem Rechner durch. Im ersten Schritt wird der Befehl `=sum(randInt(0,1,50))` in die ersten 160 Zeilen der Spalte B geschrieben. Anschließend werden die Gruppenbezeichnungen a, b, c, d ebenfalls kopiert. Die Spalten werden mit „gruppe“ bzw. „anzahl“ bezeichnet.

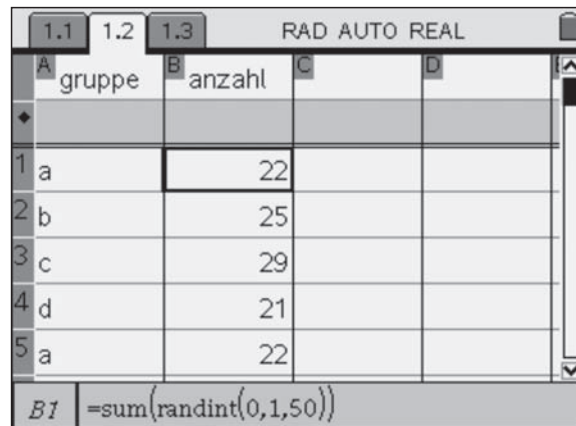


Abb.4

Diese Tabelle kann wie folgt gelesen werden: Gruppe a hat im ersten Durchgang insgesamt 22-mal „Zahl“ geworfen, im zweiten ebenfalls. Gruppe b hat im ersten Durchgang 25, ... Mit der Applikation Data & Statistics kann man sich einen Überblick über diese Daten verschaffen:

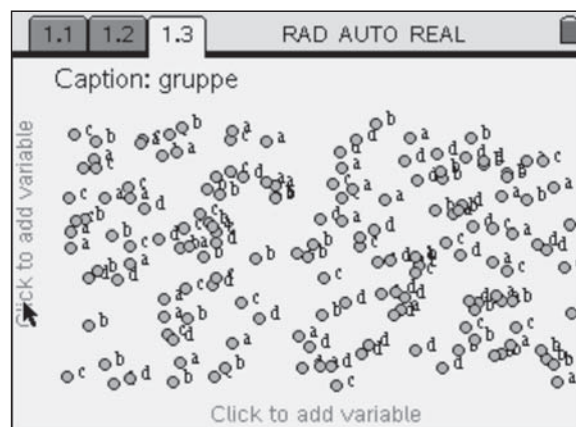


Abb.5

Zieht man diese noch ungeordneten Daten an eine der Bildschirmseiten, so kann man sich im ersten Schritt überzeugen, dass tatsächlich jede Gruppe gleichhäufig gewürfelt hat:

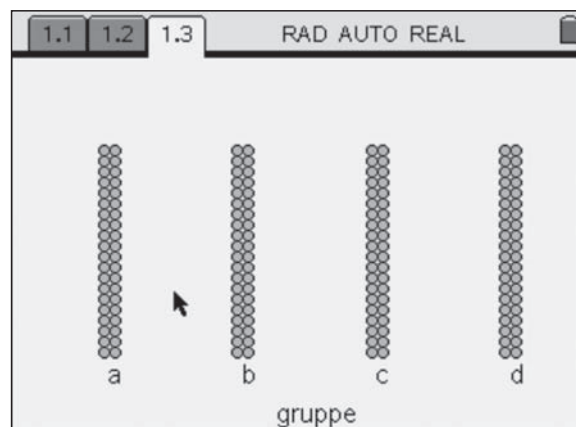


Abb.6

Interessanter sind natürlich die erzielten Ergebnisse des Experiments. Hierzu wird schlicht die Variable „anzahl“ an der Vertikalen angegeben.

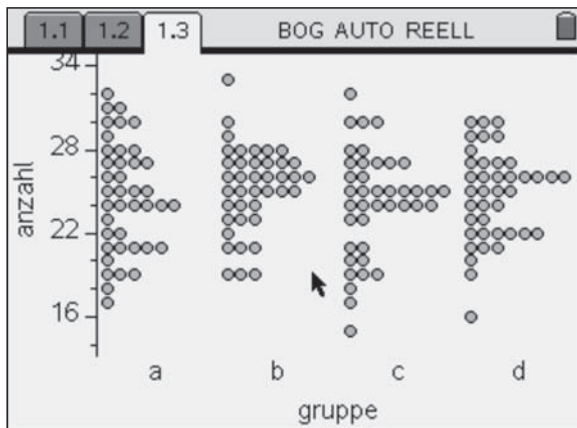


Abb.7

Jeder Punkt repräsentiert einen Versuchsausfall. Einen noch besseren Überblick liefern Boxplots:

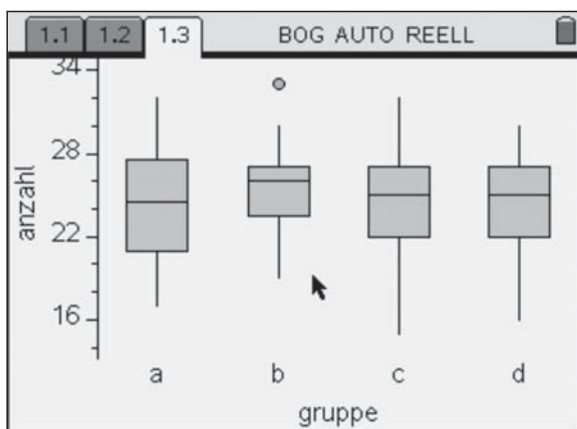


Abb.8

Oberhalb und unterhalb der Boxen (das sind die Rechtecke) liegen jeweils 25 % der Werte. Der Strich in der Box gibt den Median an. Die Graphik zeigt: Die Gruppen kämen zu unterschiedlichsten Entscheidungsregeln: Gruppe a würde das Intervall [17, 32], Gruppe b [19, 33], Gruppe c [15, 32] und Gruppe d [16, 30] akzeptieren. Die Simulation zeigt: Dieses Experiment würde auch zu keinem befriedigendem Ergebnis führen. Auf dieser Basis müsste man alle Anzahlen von 15 bis einschließlich 33 zulassen. Dieses Ergebnis entspricht aber noch nicht einmal der Symmetrie der Situation: Das Entscheidungsintervall sollte ja zum Erwartungswert 25 symmetrisch liegen. Entsprechend ist es gut, dass man das Experiment nur simuliert hat, die Durchführung des Experiments hätte wohl unnötig Zeit verschlungen.

Die Fallzahl nochmals erhöhen

Wir erhöhen die Fallzahl nochmals, um einen besseren Überblick über den Ausfall unseres Experiments (des 50-fachen Wurfs einer fairen Münze) zu bekommen und führen das Experiment nun 1 000-mal durch.

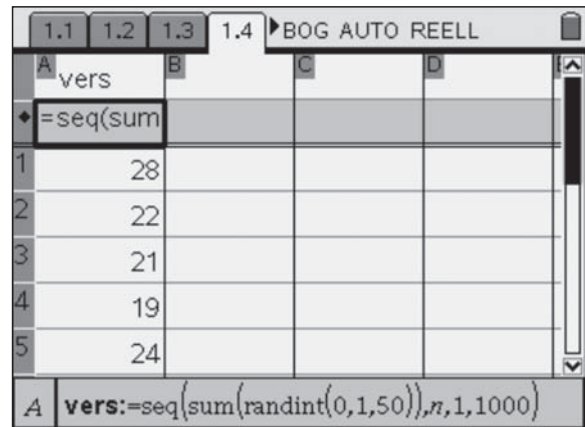


Abb.9

Die Visualisierung der Daten in Form eines Häufigkeitsdiagramms ergibt:

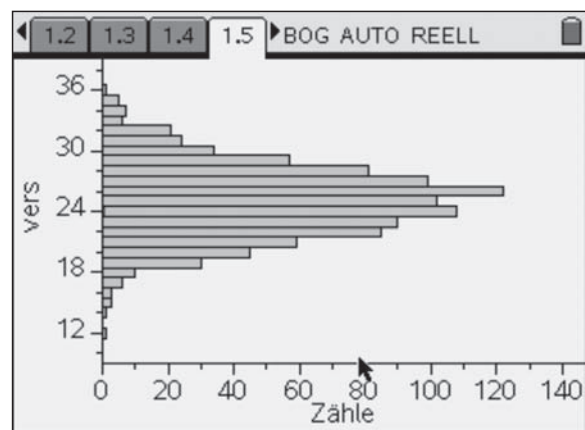


Abb.10

Die Werte streuen von 12 bis 36. Auffällig hier: 12 scheint ein Ausreißer zu sein; die Anzahl 13 taucht überhaupt nicht auf. Das legt nahe, extreme Werte auszuschließen. Eine mögliche Konvention wäre 1 % der extremsten Werte (also die 5 niedrigsten und die 5 höchsten) zu streichen. Wie viele Punkte sich in den einzelnen Säulen befinden kann man mit Hilfe des Zeigers abfragen.

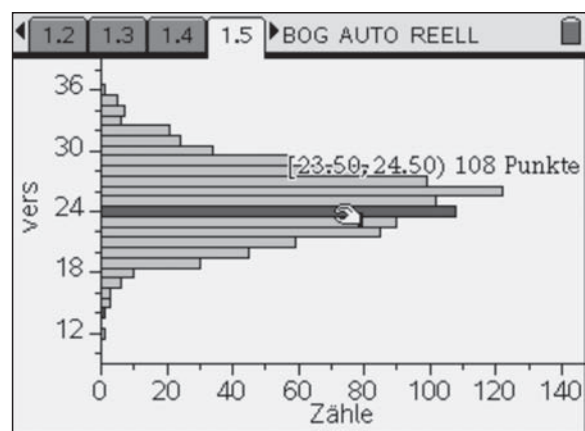


Abb.11

Hieraus ergäbe sich, dass Werte von 16 bis 35 akzeptiert würden. Auch dieses Experiment (nur zur Erinnerung: es handelt sich um den 1 000-fachen 50-fachen Wurf einer Münze, also insgesamt um die Simulation von 50 000 Würfeln) kann man wiederholen. Es ergab sich das Intervall [15, 34]. Weitere Wie-

derholungen zeigen: Dieses Ergebnis ist recht stabil, der untere Wert lag bei unserer Simulation in keinem Fall unter 15 und der obere nicht über 35.

Folgerung

Wenn man eine Münze 50-mal wirft und „Zahl“ 15 bis 35-mal fällt, so liegt es nicht nahe, dass es sich um eine nicht faire Münze handelt. Fällt „Zahl“ hingegen weniger oft oder häufiger liegt der Verdacht nahe, dass diese Münze nicht fair ist, denn nur in 1 % der Fälle tritt ein solches Ergebnis beim Wurf mit einer fairen Münze auf.

Vergleich mit der Theorie

Theoretischer Hintergrund ist die Binomialverteilung, da die Wahrscheinlichkeit für jeden Wurf gleich ist und die Würfe jeweils stochastisch unabhängig voneinander sind. Nachrechnen ergibt, dass das Ergebnis des 50-fachen Wurfes einer fairen Münze mit einer Wahrscheinlichkeit von 99 % im Intervall [16,34] liegt.

Didaktischer Kommentar

Das hier vorgestellte Vorgehen ist zwar etwas holzschnittartig, jedoch bekommen Schülerinnen und Schüler so ein Gefühl dafür was es bedeutet, bei Zufallsexperimenten Grenzen

zu ziehen und Entscheidungen zu treffen. Es wird deutlich, an welcher Stelle Entscheidungen getroffen werden mussten, die nicht vollends rational begründbar sind.

Die hier simulierte Situation (es wird nur eine begrenzte Anzahl von Einzelversuchen – hier 50 – durchgeführt) entspricht in vielerlei Hinsicht der Realität: Es kann z. B. immer nur eine begrenzte Anzahl Personen befragt werden. Trotzdem liegt es – vor allem wenn Schülerinnen und Schüler bereits das Gesetz der großen Zahlen kennengelernt haben – nahe, dass unmittelbar vorgeschlagen wird die Anzahl der Würfe drastisch zu erhöhen. An dieser Stelle bietet es sich an das Experiment zu durchdenken und bereits zu einem frühen Zeitpunkt zu überlegen, ob die Erhöhung der Anzahl der Versuche im Einzelexperiment (es wird z. B. nur einmal 1 000-mal gewürfelt) tatsächlich einen Beitrag zur Entscheidungsfindung liefert.

Das Beispiel kann sowohl zum Ende der Sekundarstufe I, aber auch in der Sekundarstufe II zum Einstieg in die beurteilende Statistik eingesetzt werden.

Autor:

Dr. Andreas Pallack, Soest (D)
andreas@pallack.de

► Algebra veranschaulichen – mit dem TI-Nspire™ Handheld in der Sekundarstufe I

Günter Heitmeyer



In einem Schulversuch des Landes Niedersachsen, beginnend im Schuljahr 08/09, geht es um folgendes Anliegen: **Mathematische binnendifferenzierende Kompetenzentwicklung** in einem mit neuen Technologien unterstützten Mathematikunterricht (MabiKom).

Für die Klassenstufen 7/8 wird dabei der TI-Nspire™ als Handheld-Rechner eingesetzt. Das methodische Konzept bei der Arbeit mit den beiden verfügbaren Rechnertypen (GTR oder CAS) ist gleich. Man muss sich nur vorstellen, dass der TI-Nspire™ CAS mit einer gegenüber dem TI-Nspire™ GTR erweiterten Software arbeitet. Probleme, die ich für den TI-Nspire™ GTR gelöst habe, liefen auch auf dem TI-Nspire™ CAS. Ich kann also ein Problem zunächst für die GTR - Version entwickeln, die Lösung unter einem problembezogenen Namen abspeichern, die elektronische Datei mittels Kabel auf den CAS - Rechner übertragen und dann die erweiterten Lösungsmöglichkeiten nutzen. Für Lehrerinnen und Lehrer bedeutet dies, dass Entwicklungen weitgehend übertragen werden können, wenn man vom GTR zum CAS aufsteigt.

Die folgenden Dinge gelten für alle TI-Nspire™ Handheld-Rechner und bestimmen die Anwendungsmöglichkeiten:

- (1) Es werden Problemlösungen abgespeichert.
- (2) Die Belegungen der Variablen gelten nur für das gerade aktive Problem.

- (3) Die Problemlösung geschieht auf sogenannten Seiten, die gemäß ihrer Anwendung ausgewählt werden: „Calculator“, „Graphs & Geometry“; „Lists & and Spreadsheets“, „Notes“, „Data & Statistics“.
- (4) Gespeichert werden Dokumente, die ggf. mehrere Problemlösungen enthalten. Die Nummerierung der Seiten nach Problemen folgt der Systematik: 1.1, 1.2, 1.3, ..., 2.1, 2.2, 2.3, ... usw.

Darstellung von Termen als Funktionen

Mit dem TI-Nspire™ ist es auch in der GTR - Version möglich, Funktionen mehrerer Veränderlicher darzustellen. Dadurch wird es z. B. möglich, Flächeninhalte und Volumina von Körpern funktional zu behandeln, es geht also um Terme in mehreren Veränderlichen, wie sie besonders auch in der 7. / 8. Klasse vorkommen.

Im gymnasialen Kerncurriculum Niedersachsens für die Klassenstufen 7/8 findet man dazu u.a.: Die Schülerinnen und Schüler

- ... stellen funktionale Zusammenhänge durch Tabellen, Grafen oder Terme dar, auch unter Verwendung des eingeführten Taschenrechners, interpretieren und nutzen solche Darstellungen.
- ... nutzen den eingeführten Taschenrechner beim Wechsel zwischen verschiedenen Darstellungsformen.

- ... untersuchen, beschreiben und begründen Auswirkungen von Parametervariationen unter Verwendung des eingeführten Taschenrechners.
- ... schätzen und berechnen Längen, Oberflächeninhalt und Volumen von Prismen mit Hilfe von Formeln.

Diesbezügliche Lerngelegenheiten lassen sich mit dem TI-Nspire™ Handheld besser umsetzen als beispielsweise mit dem TI-84 Plus, Variablen können aus mehreren Buchstaben bestehen, die verschiedenen Darstellungsmöglichkeiten sind gegeben und werden verknüpft. Variablen, die in der einen Darstellungsform geändert werden - etwa in der Tabelle - werden zum Beispiel auf die grafische Darstellung übertragen. Bei Neuaufwurf auf der „Calculator“ Seite (bei den früheren Rechnerarten war das der Home-Bildschirm) wird die geänderte Wertbelegung berücksichtigt. Eine Änderung der Wertbelegung einer Variablen auf der „Calculator“ Seite ändert sofort den Wert der gleichen Variablen in der Grafik oder Tabelle.

Dies soll am Beispiel eines Quaders (Volumen, Oberfläche) gezeigt werden.



Abb.1

Gemäß Abb. 1 werden vier Seiten angelegt: „Calculator“, eine Tabellenseite und 2 Grafikseiten für Volumina und Oberflächeninhalte.

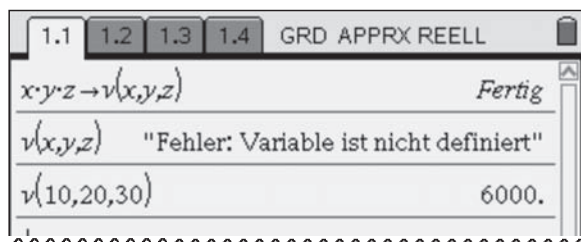


Abb.2

Abb. 2 zeigt die Definition der Volumenformel bei der GTR - Version. Im Vergleich wurde in Abb. 3 die CAS - Version verwendet, die 2. Zeile zeigt den Unterschied der Rechnertypen auf.

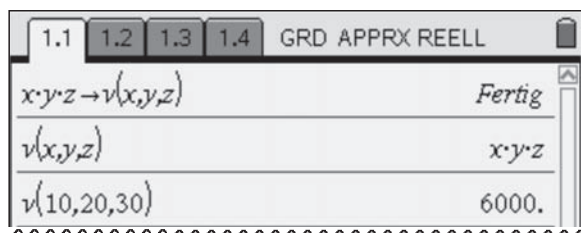


Abb.3

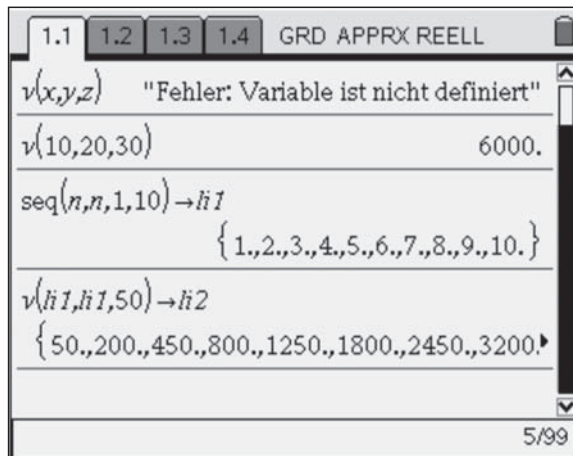


Abb.4

Die Liste „li1“ wird erzeugt und in die Spalte A der Tabelle oben eingefügt. Der erste Quader hat eine quadratische Grundfläche, die über „li1“ verändert wird, mit der Kantenlänge x und der Höhe 50 in Längeneinheiten. Die zugehörigen Volumina (Liste „li2“: li2:= v(li1, li1, 50)) werden funktional ermittelt:

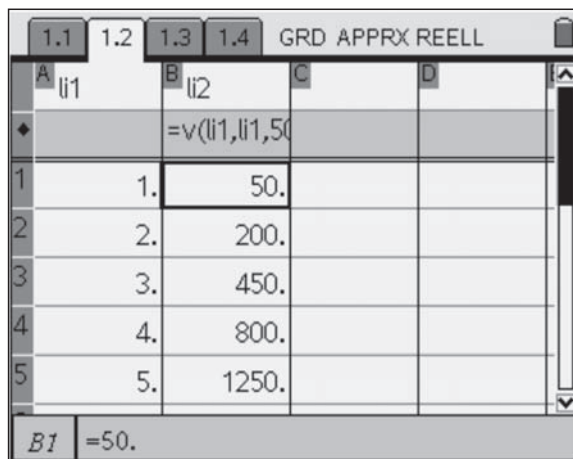


Abb.5

Die Definition könnte auch über die Calculator Seite erfolgen.

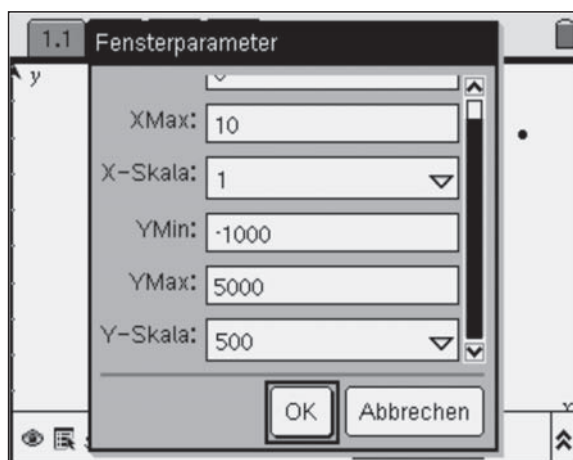


Abb.6

Wenn man auf der Grafikseite nacheinander mit Ansicht „Streu-Plot“ bzw. mit „Funktion“ arbeitet, so erhält man Zusammenhänge zwischen den Listen in den Tabellen und dem Grafen der zugehörigen Funktion:

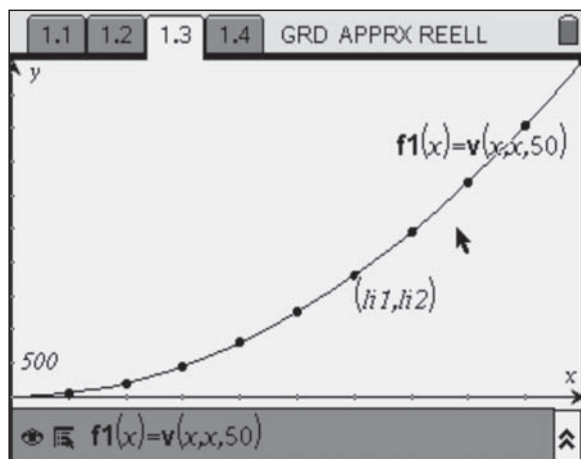


Abb.7

Durch Einsetzen und Termvereinfachung erhält man die Formel $v(x,x,50) = 50 \cdot x^2$.

Die Abbildungen 8 bis 10 illustrieren die Betrachtung der zugehörigen Quader-Oberfläche, der zugehörige Graph wird auf einer zweiten Graphikseite dargestellt.

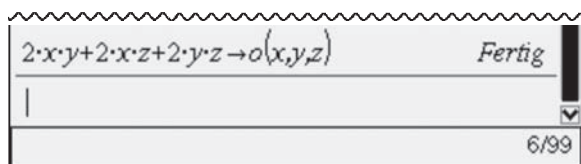


Abb.8

1.1	1.2	1.3	1.4	GRD APPRX REELL
A	li1	B	li2	C
				=v(li1,li1,50)=o(li1,li1,50)
1	1.	50.	202.	
2	2.	200.	408.	
3	3.	450.	618.	
4	4.	800.	832.	
5	5.	1250.	1050.	
C1		=202.		

Abb.9

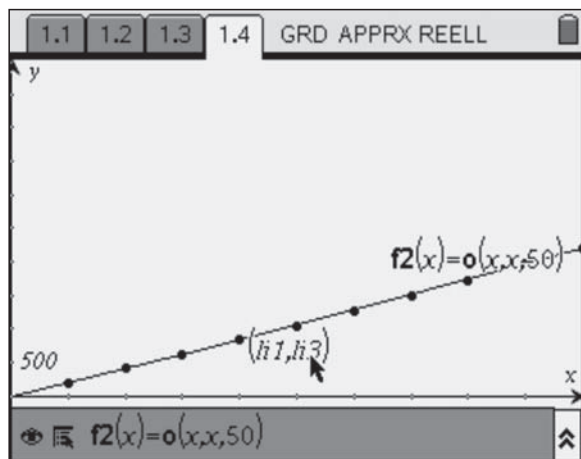


Abb.10

Durch Einsetzen und Termvereinfachung erhält man die Darstellung $o(x,x,50) = 2 \cdot x^2 + 200 \cdot x$.

Der Graph zeigt einen „fast linearen“ Verlauf, ist aber nicht linear. Dies liegt hier nur an den relativ kleinen x Werten zwischen 0 und 10 im Vergleich zur Höhe 50. Man hat also Möglichkeiten, durch Änderung der Parameter die Lösungen auf den einzelnen Darstellungsebenen zu diskutieren.

Andere Quadertypen lassen sich nun mit Einsetzen u. a. von Listen in Terme untersuchen, die Ergebnisse werden als Listen gespeichert :

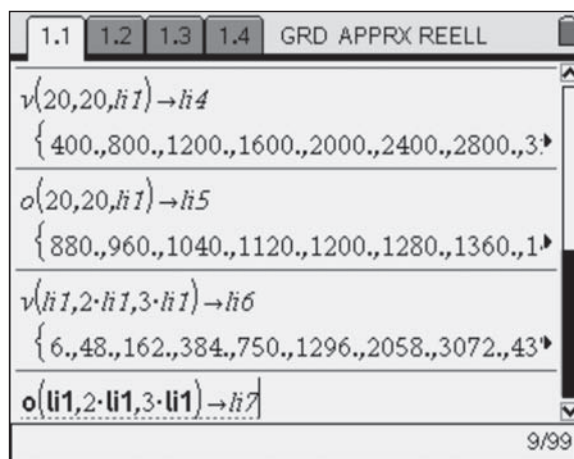


Abb.11

1.1	1.2	1.3	1.4	GRD APPRX REELL
D	li4	E	li5	F
				G
1.	400.	880.	6.	22.
2.	800.	960.	48.	88.
3.	1200.	1040.	162.	198.
4.	1600.	1120.	384.	352.
5.	2000.	1200.	750.	550.
G		li7		

Abb.12

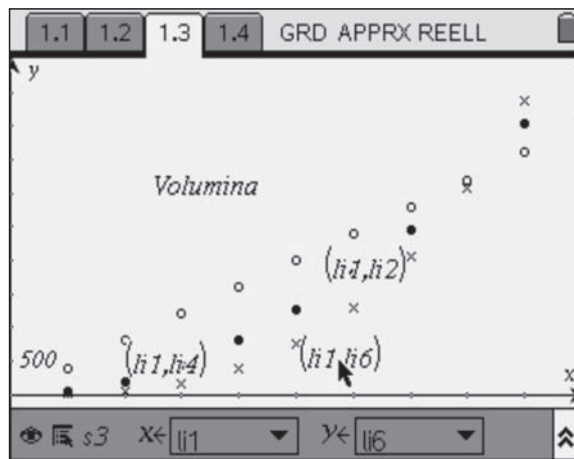


Abb.13

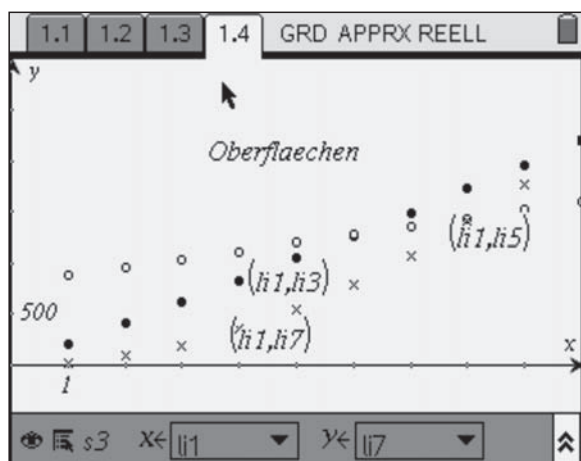


Abb. 14

Mit dem TI-Nspire™ CAS könnten die Formeln für Volumen und Oberflächeninhalt direkt bestimmt werden:

$v(x,x,50) \rightarrow v1(x):o(x,x,50) \rightarrow o1(x)$	Fertig
$v1(x)$	$50 \cdot x^2$
$o1(x)$	$2 \cdot x^2 + 200 \cdot x$
$v(20,20,x) \rightarrow v2(x):o(20,20,x) \rightarrow o2(x)$	Fertig
	14/99

Abb. 15

$v2(x)$	$400 \cdot x$
$o2(x)$	$80 \cdot x + 800$
$v(x,2 \cdot x,3 \cdot x) \rightarrow v3(x):o(x,2 \cdot x,3 \cdot x) \rightarrow o3(x)$	Fertig
$v3(x)$	$6 \cdot x^3$
$o3(x)$	$22 \cdot x^2$

Abb. 16

Bei Benutzung eines TI-Nspire™ in der GTR - Version müssen diese speziellen Formeln durch Einsetzen in die Grundformel ermittelt werden. Dies wäre aber auch für CAS Nutzer eine sinnvolle Kontrolle. Für die grafischen Darstellungen sind diese Einsetzungen aber nicht erforderlich, sondern für die Deutungen und ggf. Fehldeutungen des Zusammenhangs.

Die hier am Beispiel des Quaders abgehandelten Methoden lassen sich auf andere Flächen- und Raumprobleme übertragen. Die Untersuchungen mit dem Rechner führen auf unterschiedliche Darstellungen, erlauben tiefere Einsichten und lassen Binnendifferenzierung im Unterricht zu, denn Fragestellungen lassen sich z.B. leicht abändern und erweitern, ganz im Sinne des Kerncurrikulums. Es liegt mir daran, Alltagsprobleme des Schulunterrichtes anzusprechen und methodisch neu aufzuarbeiten, um den Bildungsstandards gerecht zu werden.

Algebra und Geometrie

Im niedersächsischen Kerncurriculum werden als Kompetenzen formuliert: Die Schülerinnen und Schüler

- ... stellen geometrische Sachverhalte algebraisch dar und umgekehrt.
- ... nutzen den eingeführten Taschenrechner und Geometriesoftware zur Darstellung und Erkundung mathematischer Zusammenhänge sowie zur Bestimmung von Ergebnissen.
- ... nutzen den eingeführten Taschenrechner beim Wechsel zwischen verschiedenen Darstellungsformen.
- ... veranschaulichen und interpretieren Terme.

Problemstellung

Zielsetzung ist ein geometrischer Nachweis der folgenden Gesetze aus der Algebra, bzw. eine Veranschaulichung der Gesetze für positive Zahlen:

- $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$
- $(x + y) \cdot (b + c) = x \cdot b + x \cdot c + y \cdot b + y \cdot c$

Der Flächeninhalt eines Rechteckes wird auf unterschiedliche Weisen berechnet. Die Formeln sind also eine Interpretation der Ergebnisse der Flächeninhaltsermittlungen. Je nach Unterrichtssituation kann die folgende Zeichnung mit den Schülerinnen und Schülern entwickelt oder fertig elektronisch überspielt werden. Mit dem TI-Nspire™ steht eine dynamische Geometrie Software zur Verfügung. Zunächst wird ein neues Problem generiert und eine Seite in der Ansicht Ebenengeometrie erzeugt:

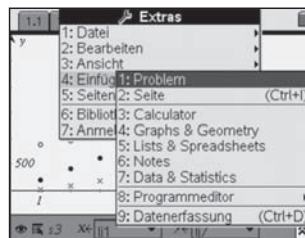


Abb. 17

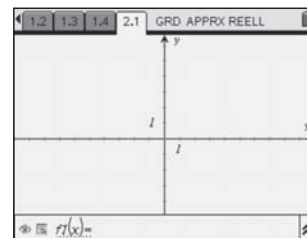


Abb. 18

Autoren willkommen! Kritik erwünscht!

Ihr Beitrag zu den TI-Nachrichten ist herzlich willkommen, besonders natürlich Beispiele aus dem Unterricht. Ihre Kritik hilft uns, Ihren Wünschen besser gerecht zu werden.

Ihr Lob spornt uns an.

Senden Sie Ihre Beiträge bitte per E-Mail an unsere TI-Nachrichten Redaktion:

ti-nachrichten@ti.com

oder per Post an

Texas Instruments, Education Technology, TI-Nachrichten,
Haggertystraße 1, 85356 Freising, Deutschland

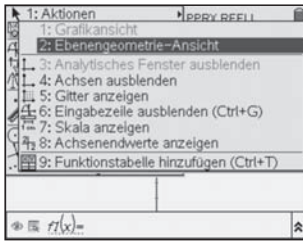


Abb. 19

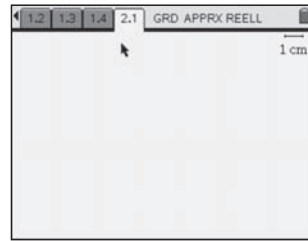


Abb. 20

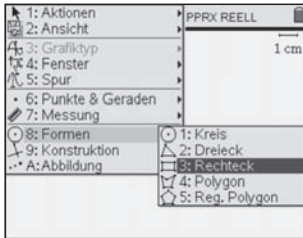


Abb. 21

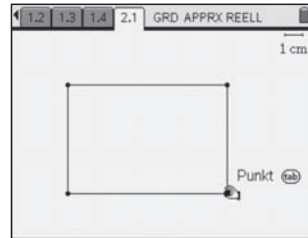


Abb. 22

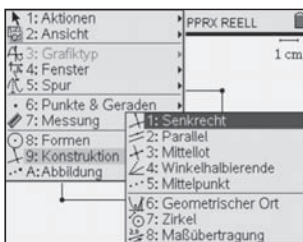


Abb. 23

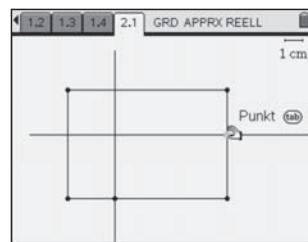


Abb. 24

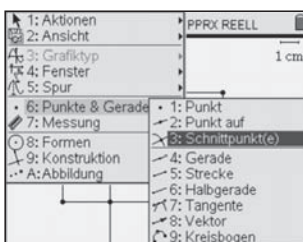


Abb. 25

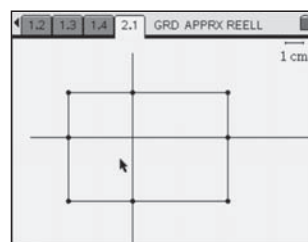


Abb. 26

In den Abbildungen 21 bis 26 wurden ein Rechteck sowie vier Teilrechtecke konstruiert. Der Flächeninhalt des äußeren Rechtecks kann nun auf verschiedene Weisen bestimmt werden, z.B. über die Inhalte der Teilrechtecke. Dazu müssen die Teilstrecken vermessen werden:

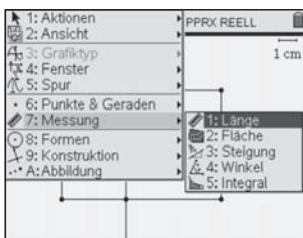


Abb. 27

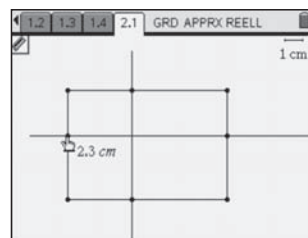


Abb. 28

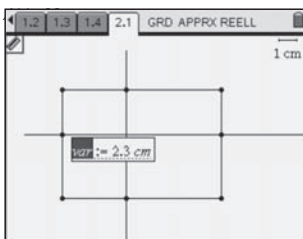


Abb. 29

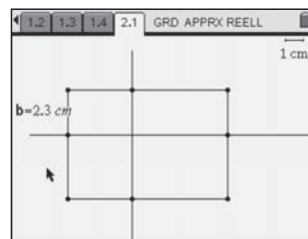


Abb. 30

Analog werden die anderen Längen bestimmt, die Längenmessung wird jeweils durch doppeltes Drücken der ENTER-Taste bestätigt, mit der VAR-Taste wird die Bezeichnung als Variable vorbereitet und dann überschrieben mit der gewählten Bezeichnung. Die Gesamttexte können an die gewünschte Stelle in der Zeichnung verschoben werden, wenn vorher mit ESC die Längenmessung beendet wird.

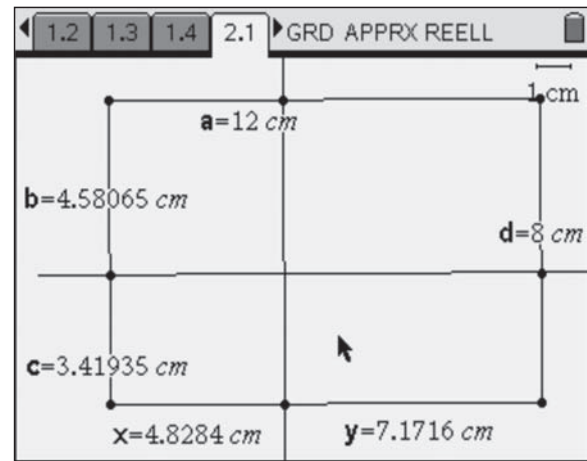


Abb. 31

Auf einer Calculator-Seite können anschließend die Flächeninhalte berechnet und verglichen werden.



Abb. 32

Im Geometrie-Fenster lassen sich die Abmessungen des Rechtecks mit Hilfe des Zeigers verändern:

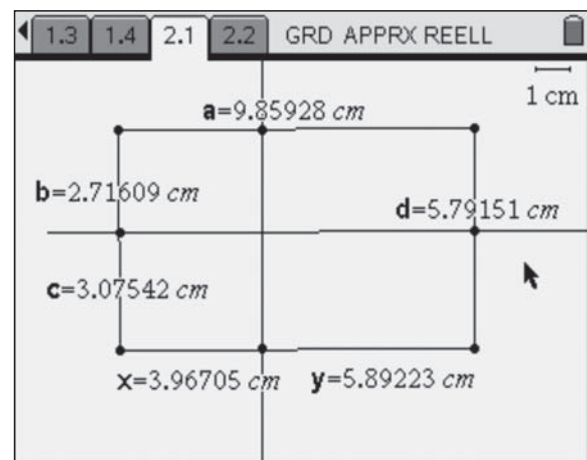


Abb. 33

GRD APPRX REELL	
$x \cdot b + x \cdot c + y \cdot b + y \cdot c$	96.
$a \cdot (b+c)$	57.1001503681
$a \cdot b + a \cdot c$	57.1001503681
$(x+y) \cdot (b+c)$	57.1001503681
$(x+y) \cdot (b+c)$	57.1001503681
$a \cdot d$	57.1001503681

Abb.34

Durch Kopieren der Formeln in die Eingabezeile erhält man die resultierenden Ergebnisse und bestätigt dadurch die Algebraesetze, die sich aus der Flächeninhaltsgleichheit ergeben für positive Zahlen.

Hinweis: Man könnte auch über den Befehl „Berechnen“ im Menü „Aktionen“ die Ergebnisse auf der Geometrieseite erzeugen, die Darstellung wird dann wegen der Fülle der Informationen etwas unübersichtlich.

Autor:

Günter Heitmeyer, Stadthagen (D)

guenter.heimmeyer@t-online.de

► Die Vase

Henning Körner

GTR Vorbemerkungen

Es wird ein Kurzbericht zu einer projektartig angelegten Unterrichtsreihe zum Modellieren innerhalb eines Analysis-Grundkurses vorgestellt. Die grundlegenden Fertigkeiten (Ableitungen, Bestimmen von Funktionen aus Nebenbedingungen) waren den Schülerinnen und Schülern aus Klasse 11 bekannt aber nicht gleichermaßen routinisiert präsent. Auf der inhaltsbezogenen Ebene diente die Einheit der Wiederholung und Einführung neuer Verfahren im Themenkreis Interpolation, auf der prozessorientierten Ebene standen Modellieren, Argumentieren, Darstellen und Präsentieren im Vordergrund. Der Rahmen war so gestaltet, dass der Kurs eine Forschungs- und Entwicklungsabteilung für Mathematisierungen darstellte und durchweg selbsttätig bezüglich der Inhalte und Organisationsformen arbeiten sollte. Der Lehrer war als Experte für mathematische Spezialprobleme ständiger Ansprechpartner und Koordinator. Die Lerngruppe war damit durchweg Motor des Geschehens, der Lehrer bündelte, fasste zusammen und sicherte den Überblick. Intensive, teilweise lang andauernde Gruppenarbeitsphasen wechselten sich mit ebenso intensiven, längeren, sach- und problembezogenen Gesprächsphasen im Plenum ab. Über diese Grobstruktur hinaus gab es keine kleinteiligere Vorbereitung des Ablaufs, denn die Ideen, Probleme und Bearbeitungen der Schüler sollten die weiteren Wege und teilweise auch methodischen Ausgestaltungen bestimmen. Den Schülern stand ein GTR zur ständigen Verfügung (TI-84 Plus).

Projektverlauf und Durchführung

Die Aufgabe

Ein Designer konstruiert in freier Skizze eine Vasenform oder er stellt ein reales Modell her. Für die computergestützte, industrielle Fertigung (CAD) soll die Form durch eine geeignete Kurve beschrieben werden



Abb. 1

Vorüberlegungen

Im Plenum wurden zunächst gemeinsam Vorüberlegungen angestellt und dokumentiert:

- Die Vase hat einen Sockel. Soll der berücksichtigt werden, was realistisch wäre, oder soll er zunächst weggelassen werden wegen des Aufwandes? Es wird entschieden, ihn zuerst einmal wegzulassen.
- Damit man als Lösung eine Funktion erhält, wird die Höhe in Richtung der x-Achse abgetragen, der Boden liegt dann auf der Y-Achse.

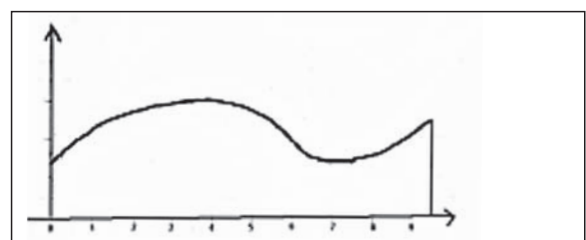


Abb. 2

Erste Ideen und Lösungen

1. Idee: Man liest einige Punkte ab und bestimmt das Interpolationspolynom. Das Bestimmen eines solchen Polynoms ist Hausaufgabe. Da über die Art der Skalierung im Vorfeld nichts erörtert wird, gibt es verschiedene, teilweise schwer vergleichbare Lösungen. Die vielleicht naheliegende Skalierung 1 Einheit $\hat{=}$ 1cm wird nicht von allen benutzt. Exemplarisch werden hier zwei Lösungen vorgestellt (Angaben in cm):

Silke:

x	0	3,5	7,5	9,5
y	1,6	3	1,4	2,4

$$f_1(x) = 0,027x^3 - 0,404x^2 + 1,483x + 1,6$$

Insa:

x	0	2,5	5	7
y	1,5	2,5	1,5	3

$$f_1(x) = 0,059x^3 - 0,605x^2 + 1,542x + 1,5$$

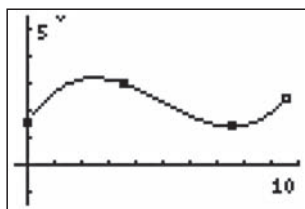


Abb. 3: Silke

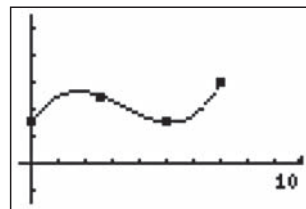


Abb. 4: Insa

Aufgrund der unterschiedlichen Skalierung lassen sich beide Lösungen schlecht vergleichen (vgl. Abb. 3 / Abb. 4); ein entsprechendes `Umrechnen` liefert:

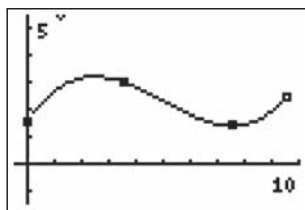


Abb. 5: Silke

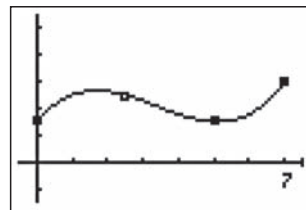


Abb. 6: Insa

Um herauszufinden, ob diese Modelle zur realen Vase passen, wird eine auf Displaygröße gestauchte Skizze der Vase hergestellt und entsprechend auf das Display gelegt. Der Vergleich zeigt, dass beide Modelle nicht passen. Die Hochpunkte sind an der falschen Stelle, die Form stimmt nicht. Außerdem wird festgestellt, dass die Funktionsgraphen nicht genau durch die Punkte verlaufen, was aber als Rundungsproblem des GTR (Grafik ungenauer als Numerik) erkannt wird. Es ist schon jetzt klar, dass es keine exakte Lösung des Problems geben kann, weil an vielen Stellen Ungenauigkeiten nicht zu vermeiden sind. Dies gilt unabhängig davon, wie genau die Messgeräte sind. So wird z.B. gerundet bei

- dem Übergang von der Vase zur Skizze,
- beim Ablesen der Punkte (vgl. Silke (0|1,6) und Insa (0|1,5)),
- beim Berechnen der Koeffizienten (GTR).

Wie kann das Modell verbessert werden? Schnell ist klar, dass mehr Information verarbeitet werden muss und dies

heißt hier in allgemeiner Übereinstimmung: Mehr Punkte ablesen. Dahinter steht die stillschweigend gemachte, nicht hinterfragte, sehr einleuchtende Annahme: *Je mehr Punkte man abliest, desto besser passt die gefundene Funktion.*

Schon hier wird erfasst, dass bei hoher Anzahl von Punkten die Gefahr von Eingabefehlern und Unübersichtlichkeit rapide wächst (30 Punkte: 930 Eingaben; allgemein: n Punkte: n·(n+1) Eingaben). Also muss wohl probiert und abgewogen werden.

Silkes Hinweis, dass sie ja nicht irgendwelche Punkte abgelesen hat, sondern versucht hat, die besonderen, charakteristischen zu benutzen, führt zu einer Alternative: Es sollen weitere charakteristische Elemente der Kurve benutzt werden, also: Statt „viel Gleiches“ lieber „punktuell tiefere Eigenschaften“. Es soll also nicht nur die Lage der Punkte beachtet werden, sondern auch das Änderungsverhalten der Kurve. Damit ergeben sich zwei Arbeitsprogramme und es werden entsprechend zwei Gruppen gebildet, die jeweils an einem Programm arbeiten:

Gruppe A: Es werden mehr Punkte ausgelesen und entsprechende Interpolationspolynome bestimmt (n Punkte: Polynom vom Grad n-1).

Gruppe B: Es werden charakteristische Punkte ausgelesen und dann nach Anzahl der notwendigen Bedingungen entsprechende Polynome in Ansatz gebracht.

Beide Gruppen teilen sich jeweils selbständig in zwei Untergruppen auf, um effektiver arbeiten zu können und beschließen, sich gegenseitig zu beraten und zu informieren. Um eine gute Vergleichbarkeit zu erreichen, wird die Skalierung von Silke von allen übernommen.

In den Teilgruppen aus A werden folgende Messwerte abgelesen:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	9,5
1,6	2,3	2,65	2,9	2,95	2,75	1,95	1,4	1,55	2,1	2,4

A	B	C	D	E	F	G
0	1	2	3	3,5	4	5
1,6	2,3	2,7	2,9	3	2,9	2,7

H	I	J	K	L	M	N
5,5	6	7	7,5	8	9	9,5
2,3	1,8	1,4	1,4	1,6	2,2	2,4

Die Gruppe B1 arbeitet mit verschiedenen Ansätzen, sie benutzt Silkes Punkte und zusätzlich ausgewählte Extrem- und Wendepunkte. Die Gruppe B2 kommt zu keinen präsentier- und dokumentierbaren Ergebnissen.

Die Auswertung findet im Plenum statt, die Gruppen berichten gegenseitig, formulieren Fragen und erläutern Probleme, die bei der Bearbeitung entstanden sind.

Gruppe A: Es gibt einige Überraschungen und Irritationen: (1.) Die reduzierte Matrix hat nicht das erwartete Aussehen.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1,45.. & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -7,179.. & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,001.. & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,018.. & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,131.. & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -0,604.. & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1,737.. & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2,982.. & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2,734.. & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die letzten beiden Zeilen liefern jeweils $1 = 0$, was bedeuten würde, dass es gar keine solche Funktion gibt. Dies widerspricht der bisher gemachten Erfahrung, dass zu n Punkten immer ein Polynom $(n-1)$ -ten Grades existiert. Eine Nachfrage an den Experten (Lehrer) bestätigt diese theoretische Erkenntnis.

Was nun? Das Problem muss bei der Bearbeitung mit dem GTR liegen. In Folge der teilweise sehr großen Zahlen in dem LGS wird es wohl zu Rundungen kommen, die dann zu der falschen reduzierten Matrix führen. Eine Überprüfung mit leistungsfähigerer Technik bestätigt dies. Da der Lerngruppe kein CAS zur Verfügung steht, wird beim Experten entsprechend nachgefragt. Mit einem CAS (Voyage™200) erhält man tatsächlich die erwartete Gestalt der reduzierten Matrix und als Lösungsfunktion:

$$\begin{aligned} f(x) = & -0,0000092037771692171 \cdot x^{10} \\ & +0,00046060405524026 \cdot x^9 \\ & +0,0098661650946068 \cdot x^8 \\ & +0,11808763189605 \cdot x^7 \\ & -0,86514573002445 \cdot x^6 \\ & +3,997456003767 \cdot x^5 \\ & -11,567993945896 \cdot x^4 \\ & +20,055228204679 \cdot x^3 \\ & -18,806318164896 \cdot x^2 \\ & +7,778100765292 \cdot x + 1,6 \end{aligned}$$

(2.) Beim Skizzieren dieser Funktion ergeben sich wieder Besonderheiten, die wiederum Folge von Rundungsfehlern sind, oder auch nicht?! In Abhängigkeit der Anzahl an Dezimalstellen erhält man sehr unterschiedliche Kurvenverläufe:

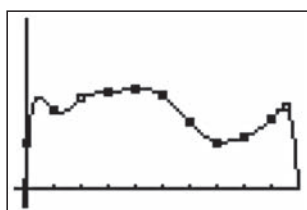


Abb. 7: alle Stellen

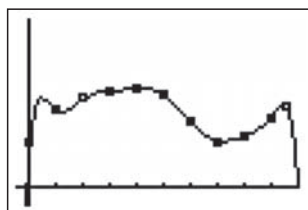


Abb. 8: 12 Stellen

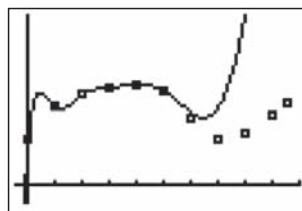


Abb. 9: 8 Stellen

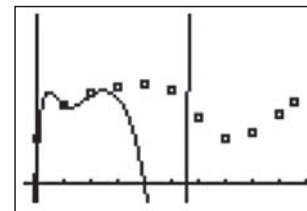


Abb. 10: 4 Stellen

Je höher die Exponenten, desto stärker wirken sich auch minimale Rundungsfehler aus ($2^{10}=1024$; $1,99^{10}=973,93\dots$)! Aber unabhängig davon gibt es einen störenden, unerwarteten 'Buckel' zwischen den ersten beiden Punkten! Dieser scheint unabhängig von der Eingabegenauigkeit zu sein und muss seine Ursache also im mathematischen Hintergrund haben. Die anfängliche, stillschweigend gemachte, von keinem hinterfragte Annahme „Je mehr Punkte, desto besser approximiert das Interpolationspolynom die gewünschte Kurve“ hat sich als falsch entpuppt!

Haben wir hier nur Pech gehabt, ist das hier also ein Sonderfall, oder tritt dieses Phänomen regelmäßig auf? Können wir die Art und Weise des Auftretens antizipieren und dann vielleicht auch vermeiden? Zur selbständigen Überprüfung wird als Hausaufgabe die sukzessive Bestimmung der Interpolationspolynome zu A(0|0), B(1|1), C(2|3), D(3|4), E(5|5) und F(8|6) aufgegeben. Hier erleben die Schüler dann, wie bei Hinzunahme von E Schwankungen entstehen, die bei F noch größer werden. Die Besprechung führt dann zu der neuen Einsicht: *Je mehr Punkte interpoliert werden, desto größer können die Schwankungen werden, sie sind allerdings nicht in Größe und Art antizipierbar.*

Gruppe B: Zuerst werden der Hochpunkt (3,5|3) und der Tiefpunkt (7,5|1,4) benutzt, was auch Silkes Absicht entspricht: Aufgrund der zwei zusätzlichen Bedingungen ($f'(3,5) = 0$ und $f'(7,5) = 0$) ergibt sich eine Funktion fünften Grades:

$$f(x) = 0,001x^5 + 0,032x^4 - 0,293x^3 + 0,962x^2 - 0,570x + 1,6$$

Diese Funktion passt noch schlechter; der zusätzliche Wendepunkt stört erheblich (vgl. Abb. 11).

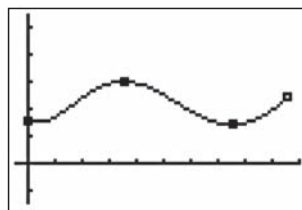


Abb. 11

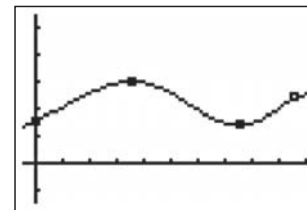


Abb. 12

Der Wendepunkt soll in (0|1,6) liegen, also zusätzliche Bedingung: $f''(0)=0$. Die Lösungsfunktion

$$f(x) = -0,00015x^6 + 0,004x^5 + 0,027x^4 + 0,052x^3 + 0,450x^2 + 1,6$$

passt besser (vgl. Abb. 12), ist aber noch nicht überzeugend. Es wird ein zweiter Wendepunkt bei (5,9|...) angenommen, was dann zu folgender Lösungsfunktion führt:

$$f(x) = -0,000037x^7 + 0,001x^6 + 0,0094x^5 + 0,041x^4 - 0,092x^3 + 0,713x + 1,6$$

Immer noch nicht perfekt. Jetzt könnte man noch die Steigung in $(0|1,6)$ definieren ...

Zwischenergebnis 1

Gruppe A: Interpolationspolynome stellen ein schlechtes Verfahren zur Approximation einer Kurve dar, weil es sowohl schnell zu technischen Problemen (Rundungen, Matrizenrechnung) als auch zu mathematischen Problemen (Schwankungen) kommt. Während hier die Technik noch kein konstitutives Problem darstellt, wenn CAS zur Verfügung steht, bleibt das mathematische Problem unausweichlich bestehen, also: Mehr Mathematik und bessere Technik!

Gruppe B: Die Berücksichtigung charakteristischer Punkte liefert zwar halbwegs akzeptable Ergebnisse, allerdings weiß man vorher nichts über die Güte des Ergebnisses, man muss immer wieder probieren und korrigieren, erhält zwischenzeitlich sogar schlechtere Ergebnisse.

Eine Systematik muss her!

Nach der Präsentation und Diskussion der einzelnen Gruppenergebnisse wurde einsichtig, dass beide Vorgehensweisen nicht optimal sind. Beim Vergleichen bezüglich der Vor- und Nachteile wurde aber für alle deutlich, dass man voneinander lernen kann, das Ganze ist mehr als die Summe der Teile, Gruppenarbeit allein reicht nicht, es muss auch Phasen des gemeinsamen Informierens, Vergleichens und Reflektierens geben. Es war also lohnend gewesen, sich arbeitsteilig intensiv mit den einzelnen, unterschiedlichen Strategien zu beschäftigen, nun konnte man versuchen, die Erfahrungen der jeweils anderen Gruppe im weiteren Vorgehen zu berücksichtigen: Gruppe A von Gruppe B: Beachte besondere Punkte, benutze sie bei der Konstruktion einer Lösungsfunktion. Gruppe B von Gruppe A: Nimm nicht zu viele Bedingungen, es gilt nicht immer „Viel hilft viel“, es können Rundungsprobleme auftreten.

Weitergehende Ideen und Lösungen

Die bisher gefundenen Strategien lassen noch kein mechanisiertes Verfahren zu. Einige suchen nach einer Lösungsformel, einige zweifeln daran, dass es so etwas in diesem Fall überhaupt gibt. Zwar sind notwendig zu berücksichtigende Aspekte erarbeitet, es fehlen aber hinreichende für ein zielgerichtetes Verfahren. Man ist sich einig: Neue Ideen braucht das Land!

Die Suche nach einer einzigen Funktion, die alle Punkte verbindet und die Form der Vase hinreichend annähert, entpuppte sich als schwierig und schien in eine Sackgasse zu führen. Wenn so etwas passiert, muss man den Mut haben und versuchen, noch einmal ganz anders an die Sache heranzugehen, indem man z. B. wieder an den Anfang zurückgeht. In diesem Fall heißt dies, die abgelesenen Messpunkte noch einmal zum Ausgangspunkt für einen qualitativ anderen Ansatz zu nehmen. Schon in der Anfangsphase wurde während der Vorüberlegungen die zunächst naheliegende Möglichkeit genannt, die Messpunkte durch geradlinige Stücke zu verbinden. Diese

Idee war aber sofort verworfen worden, weil in diesem Modell nicht gewünschte Knickstellen unvermeidbar sind. Aber vielleicht ist die Grundidee ja fruchtbar, nämlich die Annäherung durch stückweise miteinander verbundene Funktionen, also nicht eine Funktion für alle Punkte, sondern mehrere für einige („divide et impera“).

Es wird der Vorschlag gemacht, die Punkte durch Parabelbögen knickfrei zu verbinden. Es war bekannt, dass man zur eindeutigen Bestimmung einer Parabel (als quadratische Funktion) drei Punkte oder drei Bedingungen benötigt. Im Plenum wurde eine Strategie zur konkreten Berechnung von Parabelbögen erarbeitet:

- (i) Zwei benachbarte Punkte; Steigungen im linken Punkt stimmen mit vorheriger Parabel überein („knickfreie Verbindung“);
- (ii) Beginn mit Parabel durch die Punkte A, B und C.

Es werden die 11 Punkte der Gruppe A1 benutzt (vgl. Abb. 13).

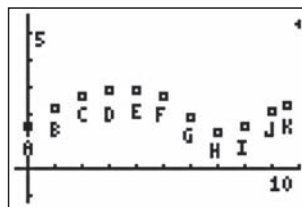


Abb. 13

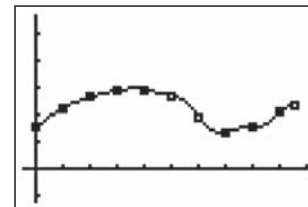


Abb. 14

Zunächst wird der sinnvoll erscheinende Vorschlag gemacht, die Parabeln arbeitsteilig zu bestimmen und dann die Einzelergebnisse zum Gesamtergebnis zusammenzufügen. Nach kurzer Zeit bemerken die einzelnen Gruppen aber schnell, dass sie wegen (i) alle auf Informationen einer anderen Gruppe angewiesen sind, die Steigung im linken Punkt liefert die links liegende Parabel, und für deren Gleichung benötigt man wiederum die Steigung der links davon liegenden Parabel. Es muss also nach (ii) zunächst die Parabel durch A, B und C ermittelt werden, ehe dann sukzessive die übrigen berechnet werden können. Im Unterricht werden die ersten drei Parabeln bestimmt, die Berechnung der übrigen ist Hausaufgabe. Das Ergebnis:

Steigungsbedingung	Funktionsgleichung
	$f_{ABC}(x) = -0,175x^2 + 0,875x + 1,6$
$f'_{CD}(2) = 0,175$	$f_{CD}(x) = 0,175x^2 - 0,125x + 2,65$
$f'_{DE}(3) = 0,325$	$f_{DE}(x) = -0,275x^2 + 1,975x - 0,55$
$f'_{EF}(4) = -0,225$	$f_{EF}(x) = 0,025x^2 - 0,425x + 4,25$
$f'_{FG}(5) = -0,175$	$f_{FG}(x) = -0,625x^2 + 6,075x - 12$
$f'_{GH}(6) = -1,425$	$f_{GH}(x) = 0,875x^2 - 11,925x + 42$
$f'_{HI}(7) = 0,325$	$f_{HI}(x) = -0,175x^2 + 2,775x - 9,45$
$f'_{IJ}(8) = -0,025$	$f_{IJ}(x) = 0,575x^2 - 9,225x + 38,55$
$f'_{JK}(9) = 1,125$	$f_{JK}(x) = -1,05x^2 + 20,025x - 93,075$

Die sukzessive Interpolation durch Parabelstücke verhindert große Schwankungen; Rundungsfehler spielen auch keine entscheidende Rolle mehr. Insofern sind die Probleme, die bisher auftraten, angemessen gelöst, aber: Die Funktion zwi-

schen H und I (f_{HI}) hat Rechtskrümmung, wo Linkskrümmung erwartet ist. Dieses Phänomen tritt auch schon zwischen f_{ABC} und f_{CD} auf (Vorzeichenwechsel beim Koeffizienten a), ist dort aber nicht augenscheinlich.

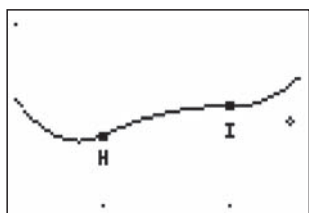


Abb. 15

Es gilt sogar, zumindest in diesem Beispiel: Die Parabeln wechseln immer ihr Krümmungsverhalten. Wenn dies allgemein gilt, darf man dann nur Wendepunkte ablesen? Nein, auch dieser Ansatz liefert nicht das gewünschte Ergebnis.

Zwischenergebnis 2 und ein Korrekturversuch

Die Verbindung der Punkte durch Parabelstücke ist ein systematisches Verfahren, das wegen der Polynome von maximalem Grad 2 zu keinen nennenswerten Problemen im Zusammenhang mit Rundungen führt. Auch kommt es zu keinen großen, unkalkulierbaren Schwankungen. Trotzdem kann es partiell zu qualitativ falscher Form kommen, das Krümmungsverhalten stimmt nicht, also: *Bessere Mathematik muss her!*

Es gibt zwei Ansätze und Ideen:

- (1) Marietheres: Zwischen H und I weitere Punkte ablesen und wieder Parabeln bestimmen, bis es optisch passt.
- (2) Jan-Hendrik: auch das Krümmungsverhalten berücksichtigen, also f'' .

Während Marietheres also lokal reparieren möchte, will Jan-Hendrik mit grundsätzlich anderem Ansatz weiterarbeiten.

Marietheres bekommt den Auftrag, ihren Reparaturvorschlag durchzuführen und zu berichten. Mit $L(7,5 | 1,4)$ erhält sie:

$$f_{HL}(x) = -0,65x^2 + 9,425x - 32,725 \text{ und}$$

$$f_{LI}(x) = 1,25x^2 - 19,075x + 74,15.$$

Das Ergebnis ist frustrierend (vgl. Abb. 16). Wieder ist das Krümmungsverhalten falsch und außerdem ist in I ein Knick entstanden; es muss also auch f_{IJ} ersetzt werden; man erhält:

$$f_{IJ}(x) = -0,375x^2 + 6,925x - 29,85$$

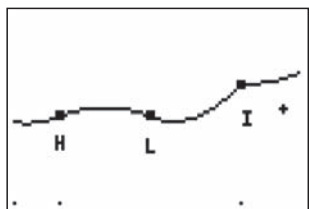


Abb. 16

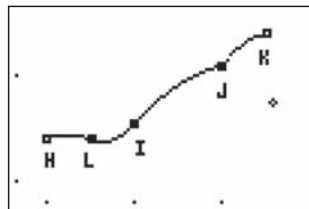


Abb. 17

Auf diesem Weg lässt sich das Problem nicht grundsätzlich lösen; der Krümmungswechsel bleibt, auch wenn er durch zunehmende Verfeinerung schließlich kaum noch zu sehen sein wird. Wenn man aber die Punkte so dicht legt, dass der Krümmungswechsel optisch unbedeutend ist, liefert eventuell auch eine lineare Verbindung schon angemessene Ergebnisse.

Bemerkung: Im Nachhinein wird klar, dass Wendepunkte bei einer Verbindung mit Parabelstücken nur in den Stützpunkten entstehen können, da ja Parabeln keine Wendepunkte haben, also zwischen den Stützpunkten keine Wendepunkte auftreten dürfen. So hätte man schon hier die eingeschränkte Eignung der Parabelverbindung erahnen können, aber: *„Klugheit gibt es nur im nachhinein.“*

Neue Idee und Lösung

Damit ruhen jetzt alle Hoffnungen in Jan-Hendriks Vorschlag, das Krümmungsverhalten zu berücksichtigen. Aber wie genau soll dies geschehen? Es muss sicher die zweite Ableitung ins Spiel kommen. Man wird also fordern, dass an den Übergangstellen, also in den Stützpunkten, auch die zweiten Ableitungen übereinstimmen. Natürlich geht das jetzt nicht mehr mit Parabeln, weil man immer zwei Punkte, Knickfreiheit und Krümmungsverhalten berücksichtigen muss, also 4 Bedingungen von Punkt zu Punkt. Wir setzen also Polynome dritten Grades an. Wenn man 11 Punkte hat, werden damit 10 Funktionen benötigt und damit 40 Bedingungen und Gleichungen, also letztendlich 1640 Eintragungen; es reichen vielleicht erst einmal fünf Punkte mit vier Funktionen, also 16 Bedingungen. Was ist notwendig:

- (1) Jede Funktion verläuft durch 2 Punkte (AB, BC, CD, DE) (8 Bedingungen)
- (2) Knickfreiheit in B, C und D (3 Bedingungen)
- (3) Krümmungsverhalten in B, C und D (3 Bedingungen)

Es fehlen also noch zwei Bedingungen. Liegt das an der Anzahl der Stützpunkte? Nein, denn durch jeden neuen Stützpunkt kommen ja vier Bedingungen dazu. Dass zwei Bedingungen noch fehlen leuchtet ein, denn die Punkte A und E sind nur einmal berücksichtigt worden. Man kann also das Verhalten an den Rändern noch beliebig festlegen. Es wird einfach von linearer Fortsetzung an den Enden ausgegangen, was zur Folge hat, dass die zweite Ableitung in den Endpunkten Null ist. Welche fünf Punkte sollen nun gewählt werden? A und K müssen auf jeden Fall dabei sein, der Rest ist eigentlich beliebig, also werden vier Gruppen gebildet, die jeweils fünf Punkte auswählen und das Verfahren dann durchführen. Danach wird die beste Lösung ausgewählt, soweit mindestens eine geeignete dabei ist. Spätestens, wenn man die Bedingungen aufstellt und versucht, die erste Funktion zu ermitteln, fällt auf, dass dies nicht mehr auf die gleiche Weise geht wie bei den Parabeln, also sukzessive hintereinander, zuerst f_{AB} , dann f_{BC} (usw.). In einer Bedingung steckt immer schon eine weitere Funktion, für deren Bestimmung wiederum eine weitere Funktion benötigt wird. Erst alle Bedingungen zusammen ermöglichen die Berechnung aller Funktionen, man muss also eine große Matrix bilden. Dies könnte man umgehen, wenn man die ersten vier Punkte für das erste Polynom benutzt (in Analogie zum Vorgehen bei den Parabeln), aber dann handelt man sich ja u. U. wieder das Problem der Interpolationspolynome ein!

Es werden 5 Gruppen gebildet, die 5 verschiedene Messpunkte wählen und mit diesen eine Funktion mit dem erarbeiteten

Verfahren bestimmen. Es wird beschlossen, am Ende die am besten passende Funktion als Lösung des Problems zu nehmen. Exemplarisch wird das Verfahren hier für die Punkte A, D, F, H und K dargestellt.

$$\begin{aligned} \text{Ansatz: } f_{AD}(x) &= a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \\ f_{DF}(x) &= d_3x^3 + d_2x^2 + d_1x + d_0 \\ f_{FH}(x) &= f_3x^3 + f_2x^2 + f_1x + f_0 \\ f_{HK}(x) &= h_3x^3 + h_2x^2 + h_1x + h_0 \end{aligned}$$

Wegen der Fülle an Variablen und Zahlen ist eine systematische Kennzeichnung der Variablen wichtig. Wegen der Einheitlichkeit der Matrixeingabe müssen die Gleichungen der Form $f_{AD}'(3) = f_{DF}'(3)$ in $f_{AD}'(3) - f_{DF}'(3) = 0$ umgeformt werden.

Die vollständige Matrix wird hier aus Platzgründen nicht wiedergegeben (vgl. Anmerkung am Ende des Artikels). Wertet man diese Matrix aus (Diagonalform), so erhält man folgende vier Funktionen:

$$\begin{aligned} f_{AD}(x) &= -0,0100x^3 + 0,5240x + 1,6 \\ f_{DF}(x) &= -0,0364x^3 + 0,2369x^2 - 0,1867x + 2,3107 \\ f_{FH}(x) &= -0,1227x^3 - 2,1493x^2 + 11,7445x - 17,5747 \\ f_{HK}(x) &= -0,0569x^3 + 1,6227x^2 - 14,6595x + 44,0348 \end{aligned}$$

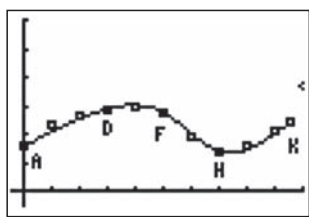


Abb. 18

Berücksichtigt man, dass nur fünf Punkte benutzt werden, so überzeugt die Lösung. Es zeigt sich beim Vergleich der Gruppenergebnisse, dass auch bei anderer Wahl der Punkte gute Ergebnisse erzielt werden. Viel mehr Punkte kann der GTR allerdings nicht bearbeiten (Speicherproblem), so dass man hier wieder an technische Grenzen stößt, ein leistungsstärkeres Gerät (CAS) schafft aber auch die Berechnung für 10 Punkte. Eine Lösung für alle Punkte außer K kann über die Materialdatenbank abgerufen werden.

Endergebnis

Mit Polynomen dritten Grades, die in den Stützpunkten knickfrei und mit demselben Krümmungsverhalten verbunden werden, lassen sich frei skizzierte Kurven gut approximieren. Dieses Verfahren heißt Spline-Interpolation.

Bemerkung: „Spline“ bedeutet „Kurvenlineal“ bzw. auch „Biegelinie“. Wenn man eine biegsame Latte um Haltenasen (hier: Stützpunkte) legt, entsteht eine Kurve, die in dem Sinne optimal ist, dass sie möglichst wenig gebogen ist, also wenig gekrümmt ist.

Sind wir jetzt fertig? Ja, wir haben eine geeignete, stabile Funktion gefunden. Nein, weil da ja noch der Sockel ist ... Außerdem: Wenn der Designer sich plötzlich etwas anderes überlegt, z.B. etwas mehr Dickbauchigkeit der Vase, dann muss man wieder von vorne anfangen, weil ja alle Funktionen inhaltlich miteinander verbunden sind. Dies wäre dann doch wieder ein Anlass für *mehr Mathematik!*

Nachlese

Der methodische Schwerpunkt der Unterrichtssequenz lag auf der Selbststeuerung der Lerngruppe und der möglichst weitgehenden Selbsttätigkeit beim Erarbeiten der (Teil-) Lösungen. Das gemeinsame Ziel („Vasenformel“) trug den Einsatz und die Produktivität über 4 Wochen hinweg. So hatte sich in der Arbeitsphase zur Ermittlung der Splines durch Zufall eine Gruppe mit durchweg leistungsschwächeren Schülerinnen und Schülern gebildet, die aber den Ehrgeiz entwickelte, wirklich vollständig allein die Zielfunktion zu berechnen, was schließlich auch gelang. Hier mussten, wie an anderen Stellen auch, binnendifferenzierende Maßnahmen ergriffen werden, indem den schneller fertig werdenden Gruppen Zusatzaufgaben, meist in Form von Reflexionen über das Erarbeitete, gestellt wurden. Die offene Planung mit der konstitutiven Berücksichtigung von Schülerideen und -beiträgen hat sich insgesamt als produktiv erwiesen, auch wenn der dadurch entstandene Zeitbedarf (natürlich?) größer war, als er in einem stärker lehrergesteuerten Unterricht gewesen wäre. Unabhängig davon äußerten einige Schülerinnen und Schüler in einem abschließenden Rückblick auch ihren Unmut über den größeren Zeitbedarf bei eigenständiger Erarbeitung, sie wünschten lieber eine Instruktion über das Verfahren mit anschließender Übung, ein Vorgehen, das sicher ihrer bisherigen mathematischen Sozialisation entsprach und bei dem sie hinreichend erfolgreich waren. Eigentätigkeit erhöht also nicht per se Schülermotivation!

So wichtig, und mit Blick auf die Gesamtgruppe auch produktiv, die intensiven Phasen mit eigenständiger Gruppenarbeit waren, so notwendig waren auch die bilanzierenden Unterrichtsgespräche und Diskussionen, in denen dann, mehr lehrergesteuert, die Fäden zusammengehalten wurden und weitere Perspektiven und Anregungen, aber auch wiederholende Zusammenfassungen, gegeben wurden.

Insgesamt zeigte der Rückblick aber deutlich, dass der Sinn mathematischer Modellierungen durchweg erfahren, weil erlebt, wurde. Eine Schülerin, die der Autor einige Jahre später traf, erinnerte sich noch deutlich an dieses Projekt. Der zeitliche Umfang des Projektes (ca. 4 Wochen) lässt sich auf dem Hintergrund unterrichtlicher und schulischer Rahmenbedingungen (Abitur, Stoffumfang) nur dann rechtfertigen, wenn auch Übungsphasen integriert sind oder anders: Chancen für eine größere Verbreitung solcher Projekte zur Modellbildung kann es nur geben, wenn Erarbeitungen und Übungen so verzahnt werden, dass der zeitliche Bedarf nicht außergewöhnlich über dem der Standardverfahren liegt. So fand hier durchweg immanentes Üben statt, wenn z.B. mehrere Parabeln interpoliert wurden oder verschiedene Ansätze durchgearbeitet wurden. Die Berechnung von Splines zu anderen ausgewählten Punkten war eine Übung, die dokumentierten Lösungen der anderen Gruppen bildeten immer zusätzliches Übungsmaterial. In Wiederaufnahme der Übung, bei der die Schwankungen der Interpolationspolynome bei Erhöhung der Stützstellenzahl erfahren werden sollte, wurde als Übung die Bestimmung des Splines zu den fünf Punkten aufgegeben. Üben fand damit in sinnstiftendem Kontext statt. Dass für eine Routinisierung dieser Übungsumfang nicht ausreichte, zeigte das Klausurergebnis, wo der Aufgabenteil zu Splines in nur knapp ausrei-

chender Weise bearbeitet wurde. Einschränkend muss aber gesagt werden, dass es sich um einen Grundkurs handelte, in dem nur 2 Prüfungsfachschüler saßen und der Inhalt, wenn überhaupt, dann meist auf Leistungskurse beschränkt bleibt. Das Projekt ist aber geprägt von der didaktischen Position, dass Einsicht in Bedeutung und Sinn mathematischer Konzepte und Verfahren eindeutig Vorrang gegenüber der routinisierten Beherrschung von Kalkülen hat, Kalküle, die eben dann aber oft auch als sinnlos erfahren werden.

Natürlich kann eine Klausur nicht das komplexe Unterrichtsgeschehen, wie es Modellbildungsprozesse prägen, abbilden, das Format einer zeitlich eng begrenzten, von Fehlervermeidung geprägten Prüfungssituation lässt dies nicht zu. Verzichtet man deswegen aber umgekehrt auf die Thematisierung solcher Aspekte in Klausuren, erscheinen Schülerinnen und Schülern solche Projekte dann leicht als bestenfalls zusätzliche Bonbons, sie sind dann vielleicht schön, aber unwichtig. Die Klausuraufgabe¹ stellt daher zwei Aspekte von Modellbil-

dung in den Mittelpunkt, die Interpretation und den Vergleich verschiedener Modelle sowie in eingeschränkter Weise auch die Validierung. Konsequenterweise sind syntaktische Anforderungen auf ein wohl immer notwendig bleibendes Minimum reduziert. Stattdessen werden konkrete Ansätze gefordert und häufig Lösungen vorgegeben, die dann ausgewertet und interpretiert werden müssen. Ohne mindestens einen GTR geht hier dann aber gar nichts, ein CAS wäre noch besser.

(1) Anmerkung:

Eine umfangreichere Fassung des Berichts kann von der Materialdatenbank heruntergeladen werden. Dort sind auch die Protokolle der Schülerinnen und Schüler in Originaldarstellung angefügt, ebenso die Klausuraufgabe.

Autor:

Henning Körner, Oldenburg (D)

Studienseminar f.d. Lehramt an Gymnasien Oldenburg

hen.koerner@t-online.de

► Steckbriefaufgaben zu ganzrationalen Funktionen - Modellierung eines Achterbahnschienenverlaufs

Miriam Sander



Langsam klackert die Achterbahn die Steigung hinauf. Am höchsten Punkt angekommen, scheint sie für einen Augenblick still zu stehen, bevor sie mit zunehmendem Tempo in die Tiefe und über weitere Gleiswölbungen saust...

Ein klassisches Fahrgeschäft, das den meisten Schülerinnen und Schülern als Freizeitvergnügen bekannt ist, bietet eine Alternative zu dem, was in vielen Schulbüchern anhand der Modellierung von Straßenübergängen behandelt wird: Trassierungsprobleme.

Bei der Konstruktion von Achterbahnverläufen werden seit einiger Zeit Spline-Funktionen verwendet. An den Schienenübergängen müssen dabei die erste und zweite Ableitung übereinstimmen. Für den Unterricht kann diese Problemstellung auf die Modellierung der Schnittstelle zweier Achterbahnschienenstücke reduziert werden. So fließt eine zeitgemäße Anwendung aus der Ingenieurwissenschaft in den Unterricht ein.

Ein möglicher Unterrichtsverlauf:

Spannungsgeladene Assoziationen zu Achterbahnen sollen die Motivation der Schülerinnen und Schüler wecken, sich mit der Übergangsstelle zweier Funktionen auseinanderzusetzen. Zum Einstieg bietet sich ein Filmausschnitt einer Achterbahnfahrt an [<http://www.youtube.com/watch?v=kUIdGc06S3U>] (Zugriff am 22.12.2008).

Das hier vorgeschlagene Video, das auf einem Computerspiel basiert, verdeutlicht durch die Perspektive eines Passagiers die Bedingungen für den weiteren Entwurfsprozess der Bahn: Die Fahrt eines Achterbahnwagens endet auf einem Plateau vor dem unvollendeten Streckenabschnitt. Die Frage nach

dem weiteren Bahnverlauf steht im Raum. Nun bietet es sich an, den Schülerinnen und Schülern Zeit zu geben, sich auf die Problemstellung einzulassen und Assoziationen zu Achterbahnfahrten zu formulieren. Viele der Schülerinnen und Schüler sind vermutlich mit Achterbahnen gefahren, so dass sie eigene Erfahrungen zu der Planung des Streckenverlaufs äußern können. Anschließend wird über das Auflegen einer Folie, die eine Konstruktionszeichnung der bis hier geplanten Strecke zeigt, die Frage nach dem Verlauf zugespitzt.

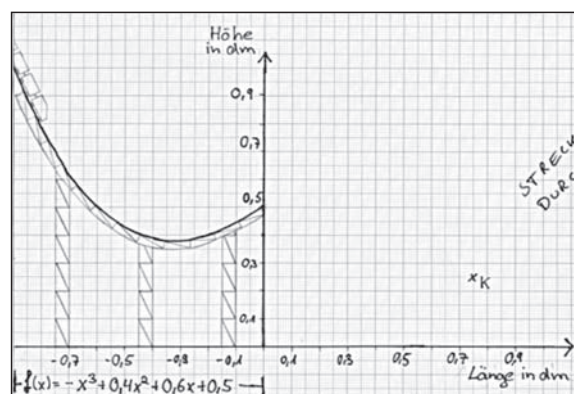


Abb. 1: Konstruktionszeichnung, Maßstab 0,1 dm $\hat{=}$ 1 m

Die Schülerinnen und Schüler entwickeln auf dieser Grundlage nun selbständig die Aufgabenstellung der Stunde. Sie könnte etwa so lauten: „Finde den Term einer Funktion, deren Graph die Achterbahnstrecke möglichst glatt fortführt und durch den Punkt K verläuft!“ (vgl. Abb. 1)

Um das Vorstellungsvermögen weiter zu fördern, sollen die Lernenden im Folgenden einen möglichen Verlauf nach rein optischen Gesichtspunkten einzeichnen und diese Ideen mit

Hilfe von Folien in der Klasse vorstellen und diskutieren. Hier können Gesichtspunkte, wie etwa ein möglichst starkes Gefälle erreichen zu wollen und trotzdem einen nicht zu spitzen Winkel im höchsten Punkt zu erhalten, diskutiert werden.

Auf Grundlage der vorangegangenen Diskussion und der Konstruktionszeichnung stellen die Schülerinnen und Schüler mathematische Bedingungen an den Übergang in der Schnittstelle auf. Bei entsprechenden Vorkenntnissen sollten sie die Notwendigkeit der Übereinstimmung der Funktionswerte im Schnittpunkt nennen können. Auch die Bedingung des Verlaufs durch den Punkt K sollte durch die Schülerinnen und Schüler mathematisch formuliert werden. Die Übereinstimmung der Steigung im Schnittpunkt könnte im Unterrichtsgespräch über eine außermathematische Formulierung zu einer mathematischen Bedingung entwickelt werden. So könnten folgende Bedingungen an der Tafel gesammelt werden:

Eigenschaft des Funktionsgraphen	notwendige Funktionsbedingung
$P(0 0,5)$ liegt auf dem Graphen.	$f(0)=0,5$
$Q(0,75 0,25)$ liegt auf dem Graphen.	$f(0,75)=0,25$
der Graph hat an der Stelle 0 die Steigung 0,6.	$f'(0)=0,6$

Bei einer exemplarisch durchgeführten Stunde war der Grad der notwendigen ganzrationalen Funktion nicht für alle Schülerinnen und Schüler ersichtlich, so dass die Möglichkeiten einer Funktion vom Grad 2 und vom Grad 3 festgehalten wurden.

Darstellung der Lösungsideen

Die Schülerinnen und Schüler erarbeiten in Gruppenarbeit eine Funktionsgleichung für einen möglichen Achterbahnverlauf. Hierzu stellten sie in der Beispielstunde auf Grundlage der gefundenen Bedingungen folgende Gleichungen auf:

$$0^2 \cdot a + 0 \cdot b + 1 \cdot c = 0,5$$

$$0,75^2 \cdot a + 0,75 \cdot b + c = 0,25$$

$$2 \cdot 0 \cdot a + b = 0,6$$

Diese formten sie in ein Gleichungssystem um, das sie mit Hilfe des Taschenrechners (TI-84 Plus) lösten.

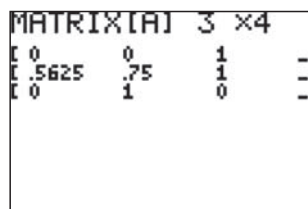


Abb. 2: Gleichungssystem als Matrix

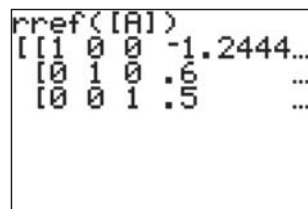


Abb.3: reduzierte Zeilen-Stufen-Form

Diese Lösung der Matrix führte zu folgender Funktionsgleichung für den weiteren Verlauf der Achterbahnschienen:

$$f(x) = -1,244x^2 + 0,6x + 0,5$$

Eine Schülergruppe hatte schnell ein Ergebnis erarbeitet, das die an der Tafel festgehaltenen Bedingungen berücksichtigte. Um den Lernenden einen Ausblick auf eine mögliche Verbesserung ihres Modells aufzuzeigen, sollten sie ein vorberei-

tetes Murmelbahnmodell untersuchen. Dieses (aus Dämmschaumplatte, Pappe und Folie konstruiert) entsprach etwa ihrem möglichen Verlauf der Bahn. Am Modell sollten die Schülerinnen und Schüler erkennen, dass die Murmel an der Schnittstelle aus der Bahn springt. Damit kann die notwendige Konstanz in der zweiten Ableitung verdeutlicht werden. Durch diese Bedingung wird die Krümmungsruckfreiheit, die das stärkere Schwebefühl bei der Achterbahnfahrt verursacht, erreicht. Dieser Aspekt bietet einen Ausblick auf die Behandlung von Krümmung und Splines.

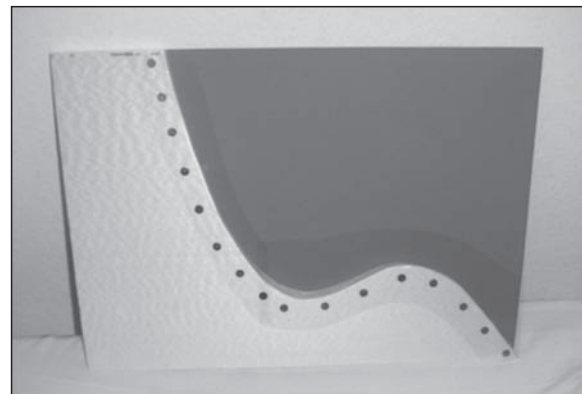


Abb. 4

Vorstellung der Ergebnisse

Am Ende der Unterrichtsstunde stellen die Schülerinnen und Schüler ihre Ergebnisse vor. Der errechnete Verlauf kann mit dem TI-84 Plus über abschnittsweise definierte Funktionen dargestellt werden.

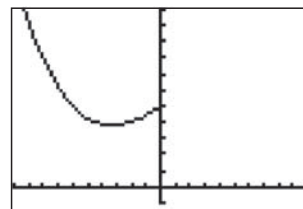


Abb. 5: Graph der schon vorhandenen Achterbahnstrecke

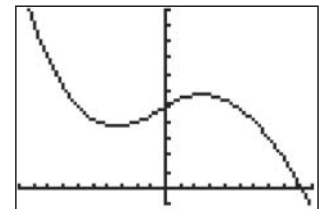


Abb. 6: Weiterer Verlauf der Achterbahn

Abschließend vergleichen die Schülerinnen und Schüler die Ergebnisse mit ihren ersten Überlegungen, indem sie die zu Stundenbeginn gezeichneten Folien zu einem möglichen weiteren Verlauf auf ein Overhead-Display auflegen. So können errechneter Graph und gezeichneter Verlauf gleichzeitig an die Wand projiziert werden. Dieser Vergleich zeigte in der durchgeführten Stunde, dass die Schülerinnen und Schüler anfangs per Augenmaß ein recht gutes Gespür für einen möglichen Achterbahnverlauf entwickelt hatten. Andere Folien zeigten jedoch, dass sich die Schülerinnen und Schüler einen steileren Verlauf gewünscht hätten.

Nach dieser mathematischen Auseinandersetzung werden die Schülerinnen und Schüler das Vergnügen der nächsten Achterbahnfahrt sicher aus einer ganz neuen Perspektive erleben.

Autorin:

Miriam Sander

Matthias-Claudius-Gymnasium Gehrden (D)

miriamsander@web.de

► Der TI-84 Plus im Biologieunterricht: Atmung und Fotosynthese am Beispiel der Kresse

Katrin Eilers, Bendine Lohse-Grimmer, Tanja Wehrse



Vorbemerkung

Die Einführung der grafikfähigen Taschenrechner (GTR) in den Mathematikunterricht ermöglicht durch die Kombination mit dem Datenerfassungssystem CBL 2™ und den verschiedenen Sensoren auch für den Biologie-Unterricht neue Herangehensweisen.

Aufgrund der einfachen Handhabung der Sensoren können Experimente anschaulich und schnell durchgeführt werden. Die Messwerte werden mit dem Datenerfassungsgerät (CBL 2™) erfasst und lassen sich sofort grafisch mit den vom GTR gewohnten Methoden darstellen. Die Visualisierung ermöglicht die Entdeckung biologischer Phänomene.

Der Umgang mit Messdaten schult die Fähigkeit, Fehlerquellen zu erörtern und die eingesetzte Methode kritisch zu betrachten.

Zur Einbettung im Unterricht

Beide Experimente eignen sich im Bereich der Sek. I zur Erarbeitung von Fotosynthese und Atmung und können wiederholende als Phänomen zum Einstieg in das Thema in der Sek. II eingesetzt werden. Aufgrund der einfachen Handhabbarkeit lassen sich die Experimente als Schülerversuche durchführen. Sollten nicht ausreichend Sensoren zur Verfügung stehen, ist auch der Einsatz im Rahmen eines Stationenlernens möglich.

Atmung von Pflanzen am Beispiel der Kresse

Bezogen auf die inhaltsbezogene Kompetenz „Ernährung von Pflanzen“ bietet dieser Versuch erstmals die Möglichkeit, das Phänomen, dass auch Pflanzen atmen, experimentell und quantitativ zu erarbeiten.

Geräte und weitere Materialien

- CO₂-Sensor, O₂-Sensor
- 2 Erlenmeyerkolben (V = 250 ml)
- Alufolie
- Kresse (ganze Pflanzen)

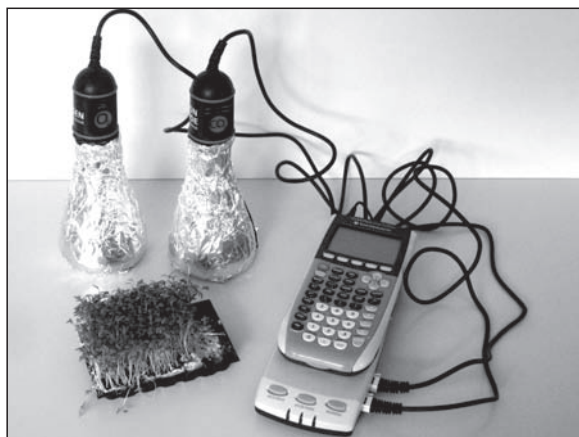


Abb. 1

Versuchsdurchführung

Je 9 cm² Nährboden, die dicht mit Kresse bewachsen sind, werden in die beiden Erlenmeyerkolben gegeben. Es ist darauf zu achten, dass der Nährboden während des Versuchs relativ trocken ist. Beide Erlenmeyerkolben werden mit Alufolie vollständig abgedunkelt und werden mit dem CO₂- bzw. O₂-Sensor verschlossen.

Aufgrund der Trägheit der Sensoren sollte vor Beginn der Messwerterfassung zwei Minuten gewartet werden (siehe Auswertung). Die Messwerterfassung erfolgt im Abstand von je einer Minute, es werden 10 Messwerte erfasst.

Einstellungen in DATAMATE

```
CH 1: CO2 GAS(PPM)
CH 2: O2 GAS(PCT)
MODE: TIME GRAPH - 600
TIME INTERVAL: 60 sec
```

Hinweis: Die Eingabe sollte nicht fortlaufend erfolgen, d.h. es werden 10 singuläre Messungen vorgenommen, da sonst aufgrund der Sensibilität des Sensors vom eigentlichen Phänomen ablenkende Ausschläge zu verzeichnen sind.

L1	L2	W3	3
0	659.82	20.399	
60	696.48	20.399	
120	708.7	20.399	
180	720.92	20.399	
240	745.36	20.399	
300	806.45	20.399	
360	843.11	20.399	

L3 = (20.3994, 20....

Abb. 2

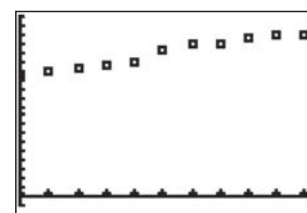


Abb. 3

Auswertung

Bereits im Verlauf dieses kurzen Versuchszeitraums von 10 Minuten ist ein deutlicher Anstieg der CO₂-Konzentration von ca. 660ppm auf ca. 900ppm und damit der Atmungsprozess der Pflanze an sich festzustellen. Dieser erfolgt unabhängig von der Tageszeit (nicht nur nachts, wie von Schüler und Schülerinnen oft vermutet). Aufgrund der Trägheit des Sensors kann die Atmungsaktivität der Pflanze nicht unmittelbar nach der Verdunklung nachgewiesen werden.

Das gleichzeitige Abfließen von Atmung und Photosynthese kann mit diesem Versuch leider immer noch nicht nachgewiesen werden. Um die häufige Schülervorstellung, dass Pflanzen entweder nur Atmung oder nur Fotosynthese betreiben, nicht unnötig zu verstärken, sollte mit der Messwerterfassung nach der Verdunkelung nicht länger als 2 Minuten gewartet werden.

Eine Abnahme der O₂-Konzentration, hier in Prozent (pct) gemessen, kann aufgrund des geringen Konzentrationsunterschieds zu Beginn und am Ende des Versuchs nur in seltenen Fällen nachgewiesen werden (Abb. 2 und 3).

Fotosynthese von Pflanzen am Beispiel der Kresse

Bezogen auf die inhaltsbezogene Kompetenz „Ernährung von Pflanzen“ bietet dieser Versuch erstmals die Möglichkeit, das Phänomen der Fotosynthese quantitativ und ohne „nachzuhelfen“ zu erfassen.

Geräte und weitere Materialien

- CO₂-Sensor, O₂-Sensor
- 3 Erlenmeyerkolben (V = 250 ml)
- Pflanzenlampen (ggf. herkömmliche Leuchten)
- Kresse (ganze Pflanzen)



Abb. 4

Versuchsdurchführung

Je 9 cm² Nährboden, die dicht mit Kresse bewachsen sind, werden in die beiden Erlenmeyerkolben gegeben. Es ist darauf zu achten, dass der Nährboden während des Versuchs relativ trocken ist. Beide Erlenmeyerkolben werden mit dem CO₂- bzw. O₂-Sensor verschlossen und beleuchtet. Dabei sollte der Abstand von Kolben und Leuchte ausreichend groß sein, um eine messbare Wärmezunahme im Kolben zu verhindern.

Aufgrund der Trägheit der Sensoren sollte vor Beginn der Messwerterfassung zwei Minuten gewartet werden. Die Messwerterfassung erfolgt im Abstand von je einer Minute, es werden 10 Messwerte erfasst. Im Anschluss wird ein Kontrollversuch durchgeführt. Dazu wird dieselbe Messung der CO₂-Konzentration unter Beleuchtung in einem neuen Erlenmeyerkolben nochmals durchgeführt, in dem eine hohe Luftfeuchtigkeit herrscht.

Einstellungen in DATAMATE

```
CH 1: CO2 GAS (PPM)
CH 2: O2 GAS (PCT)
MODE: TIME GRAPH - 600
TIME INTERVAL: 60 sec
```

Hinweis: Die Eingabe sollte nicht fortlaufend erfolgen, d.h. es werden 10 singuläre Messungen vorgenommen, da sonst aufgrund der Sensibilität des Sensors vom eigentlichen Phänomen ablenkende Ausschläge zu verzeichnen sind.

L1	L2	L3	1
0	562.07	21.33	
60	549.85	21.33	
120	545.85	21.33	
180	542.06	21.33	
240	537.63	21.33	
300	525.42	21.33	
360	513.2	21.33	

L1 = {0, 60, 120, 18...

Abb. 5

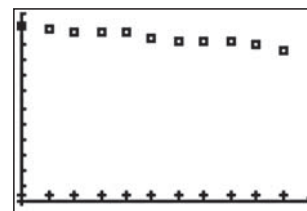


Abb. 6

Auswertung

Bereits im Verlauf dieses kurzen Versuchszeitraums von 10 Minuten ist ein deutlicher Abfall der CO₂-Konzentration und damit der Prozess der Photosynthese an sich festzustellen. Die Beleuchtung der Pflanzen erhöht die Photosyntheserate gegenüber einer nicht beleuchteten Pflanze. Im zweiten Fall wäre eine extrem lange Messwerterfassung für eine quantitative Untersuchung notwendig.

Ein Anstieg der O₂-Konzentration kann aufgrund des geringen Konzentrationsunterschieds zu Beginn und am Ende des Versuchs nur in seltenen Fällen nachgewiesen werden. Der Kontrollversuch zeigt, dass die Abnahme der CO₂-Konzentration nicht von der Luftfeuchtigkeit abhängt.

Anmerkung

Dieser Artikel entstand im Rahmen der in Niedersachsen gegründeten Projektgruppe BiuTi (**B**iologie **u**nd **T**echnologie). Die Projektgruppe entwickelt Konzepte für den Biologie-Unterricht, mit denen der TI-84 Plus als Taschenrechner bzw. zusammen mit dem CBL 2™ und Sensoren als Messwerterfassungssystem eingesetzt werden kann. Die Konzepte richten sich ganz bewusst an Biologie-Lehrkräfte, die nicht auch das Fach Mathematik unterrichten.

Autoren:

Katrin Eilers
Gymnasium Großburgwedel (D)
keilers@vr-web.de

Bendine Lohse-Grimmer
Wilhelm-Busch-Gymnasium, Stadthagen (D)
BendineLohse@t-online.de

Tanja Wehrse
Gymnasium Goetheschule Hannover (D)
wehrse@gmx.net

► Lade- und Entladevorgänge am Kondensator

Jürgen Enders



Vorbemerkung

Innerhalb von T³ Deutschland arbeitet derzeit im Bereich Naturwissenschaften die Physik-Gruppe an einer Sammlung von physikalischen Experimenten mit Taschencomputern. Es handelt sich hierbei um eine erweiterbare Sammlung der wichtigsten Experimente, die im Physikunterricht der Sekundarstufe II unter Verwendung von grafikfähigen Taschenrechnern oder CAS - Rechnern (vor allem TI-Nspire™ CAS und Voyage™ 200) mit Datenerfassungssystem (z.B. CBL 2™) durchführbar sind. Das Material soll Lehrerinnen und Lehrer beim Einsatz von Taschencomputern im Physikunterricht unterstützen. Die mit der Verwendung dieser sogenannten Handheld-Technologie verbundenen Chancen sind z.B.: Schüler- statt Demonstrationsexperimente, differenziertes Arbeiten in Gruppen mit ergebnisoffenen Fragestellungen, kontextorientierte und alltagsbezogene Fragestellungen, Überwindung mathematischer Schwierigkeiten zugunsten der Behandlung physikalischer Inhalte. Jeder einzelne Beitrag enthält deshalb neben der Beschreibung des Experimentes auch Hinweise zum sinnvollen Einsatz, Tipps und Tricks, Schülerarbeitsblätter und Lehrerlösungen. An die einzelnen Beiträge schließt sich ein Glossar an, in dem die wichtigsten Bedienungshinweise nachgeschlagen werden können. Zudem sind u.a. editierbare Schülerarbeitsblätter und Beispielmessreihen als Zusatzmaterial geplant. Ein erstes Beispiel soll hier kurz vorgestellt werden.

Versuchsbeispiel

Die Untersuchung von Lade- und Entladevorgängen am Kondensator ist Standard in der Oberstufe. Dazu wird der Kondensator über einen Widerstand auf- und wieder entladen und der zeitliche Verlauf von Spannung und Stromstärke untersucht. Der vereinfachte theoretische Ansatz liefert dazu die bekannten Gleichungen für $U(t)$ und $I(t)$. In der Schülerübung soll beispielhaft die Entladestromstärke $I(t)$ als Spannung $U(t) = R \cdot I(t)$ über dem Widerstand R aufgenommen und untersucht werden.

Geräte

- Stromversorgungsgerät, Batterie
- Kondensatoren, z.B. 22 μF , 47 μF
- Widerstände, z.B. 10 $\text{k}\Omega$, 22 $\text{k}\Omega$, 33 $\text{k}\Omega$
- Metallkugel auf Stecker (Elektrostatik)
- Verbindungsleiter
- Taschencomputer (hier: TI-Nspire™)
- Spannungssensor (hier mit Vernier EasyLink®)

Versuchsdurchführung

Der Kondensator wird aufgeladen und über den Widerstand entladen. Dies geschieht hier, indem der Stecker des langen grünen (dunklen) Kabels zunächst kurz an die Kugel gehalten wird. Der Steckerstift des kurzen gelben (hellen) Kabels ruht dabei auf der ENTER-Taste und wird dort festgehalten. Jetzt drückt man mit dem Steckerstift des langen Kabels schnell und fest auf den Steckerstift des kurzen Kabels, so dass die ENTER-Taste ausgelöst wird (vgl. Abb. 2). Die Taste muss bis zum Ende der

Messung gedrückt bleiben, damit durch den Kontakt der beiden Steckerstifte der Kondensator entladen wird!

Zeitbedarf: 45 Minuten

Einstellungen

- Spannung: ca. 1,5 V - 9 V
- Messmodus: Zeitgraph, Messzeit: z.B. 2 s
- Abstand zweier Messungen: z.B. 0,05 s

Versuchsaufbau



Abb. 1: Versuch mit TI-Nspire™ Handheld



Abb. 2: Starten des Entladevorgangs

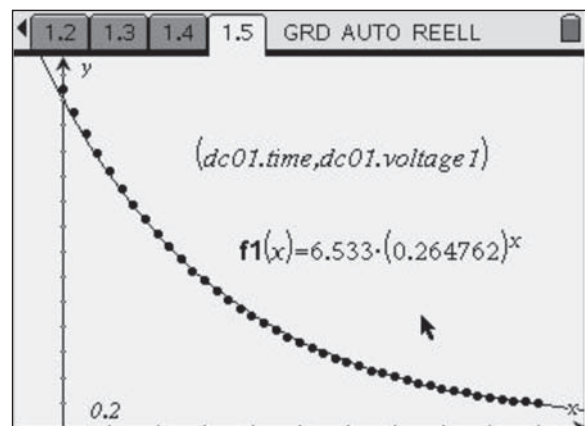


Abb. 3: Beispielgraph

Hinweise

Das Vernier EasyLink® ist z.Z. das einzige Messinterface, das mit dem TI-Nspire™ zusammen arbeitet und den Anschluss

verschiedener Sensoren ermöglicht. Da bei diesem Gerät Triggern nicht möglich ist, habe ich nach einem anderen Weg gesucht, Versuch und Messung möglichst zeitgleich zu starten. Das in der Versuchsdurchführung beschriebene Verfahren funktioniert gut.

Alternativ kann man auch das CBL™ mit dem Voyage™ 200 oder dem TI-84 Plus verwenden (vgl. Abb. 4 bis 6). Das Laden/Entladen über die Steckerstifte kann man dann durch einen Umschalter ersetzen, da man das CBL™ triggern kann. Die übrigen Einstellungen können beibehalten werden. In jedem Fall darf man nicht erwarten, dass der erste Messwert der maximalen Ladespannung entspricht, denn bei Beginn der Messung ist der Kondensator schon etwas entladen, da u.a. die Messung mit einer gewissen Verzögerung nach der ersten Berührung der Kontakte beginnt. Deshalb darf auch die Zeitkonstante nicht zu klein gewählt werden; bewährt hat sich ein Wert von etwa $0,5 \text{ s}^{-1}$ oder größer.



Abb. 4: alternativer Aufbau mit dem Voyage™ 200

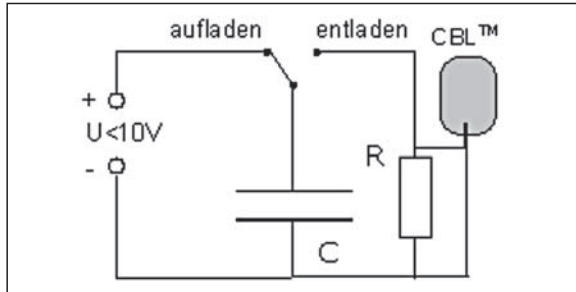


Abb. 5: Schaltplan

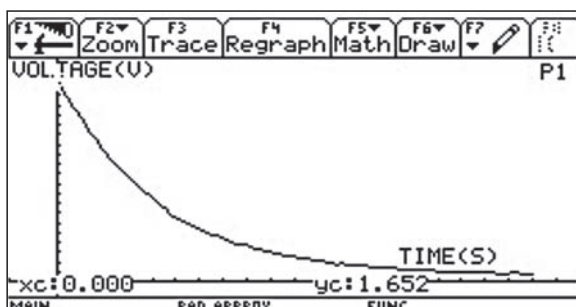


Abb. 6: Beispielgraph

Tipps und Tricks

- Der Kontakt der beiden Steckerstifte sollte zügig und fest erfolgen und während der Versuchsdauer nicht unterbrochen werden. Das gilt auch, wenn als Umschalter eine Morsetaste verwendet wird.
- Es eignen sich alle Gleichstromquellen, die eine Spannung kleiner als 10 V liefern.
- Die Triggerschwelle ist etwas niedriger als die maximale Ladespannung einzustellen.

Auswertung

Es erfordert etwas Übung, bis man gute Ergebnisse erzielt, aber dann lassen sich die Daten gut durch eine abklingende Exponentialfunktion modellieren.

Die Herleitung ergibt für die Spannung am Widerstand

$$U(t) = U_0 \cdot e^{-\frac{1}{RC}t}$$

Die exponentielle Regressionsgleichung ist

$$f_1(x) = a \cdot b^x;$$

Der Vergleich ergibt $U_0 = a$ und

$$b = e^{-\frac{1}{RC}} \text{ und damit } R \cdot C = -(\ln b)^{-1}.$$

Bei der Abbildung oben war der Entladewiderstand $R = 33 \text{ k}\Omega$, und man erhält mit der Kapazität $C = 23 \text{ }\mu\text{F}$ eine gute Übereinstimmung mit dem aufgedruckten Wert von $22 \text{ }\mu\text{F}$.

Bedienungshinweise

TI-Nspire™ / TI-Nspire™ CAS Handheld

1. Verbindet man das Vernier EasyLink® mit dem GTR oder CAS, so wird automatisch das Datenerfassungs-Modul gestartet.
2. Der Spannungssensor wird automatisch erkannt.
3. Über Menu-Experiment-Erfassung einrichten-Zeitgraph lassen sich die Versuchsparameter einstellen.
4. Wechselt der Rechner in den „Schlafmodus“, so erkennt er nach dem „Aufwecken“ das Interface nicht mehr. Man muss das Interface abziehen und den Rechner nochmals neu starten, bevor man es wieder mit dem Rechner verbinden kann. Dann wird es jedoch wieder erkannt. Die Einstellungen bleiben dabei erhalten.
5. Will man nach der 1. Messung eine erneute Messung durchführen, so meldet sich der GTR mit einem Fenster Ungespeicherte Daten. Wählt man Verwerfen und bestätigt durch Enter, so wird unmittelbar danach die neue Messung gestartet. Die Bestätigung durch die Enter-Taste kann man zwar wie den Start eines neuen Versuches ansehen, aber sicherer ist es, bei einem neuen Versuch über Menu-Daten-Alte Daten löschen zu gehen. Dann kann man den Versuch ganz normal starten.
6. Die Daten werden standardmäßig in den Listen dc01.time und dc01.voltage1 gespeichert. Diese Listen sollte man in Lists & Spreadsheet an 2 Spalten übergeben. Mit jeder neuen Messung werden dann diese Spalten aktualisiert.
7. Über Menu-Statistik-Statistische Berechnung... kann man eine exponentielle Regression durchführen und die Regressionsgleichung als Funktion abspeichern lassen. Auch sie wird dann bei jeder neuen Messung neu berechnet.
8. Im Fenster Graphs & Geometry werden die aufgenommenen Daten angezeigt, wenn man sie über Menu-Grafiktyp-Streuplot einem Plot zugeordnet und das Fenster über Menu-Fenster-Statistik-Zoom angepasst hat. Verwendet man dieses Fenster als Hintergrund bei den Messungen, so kann man gleich kontrollieren, ob die Messung gelungen ist.

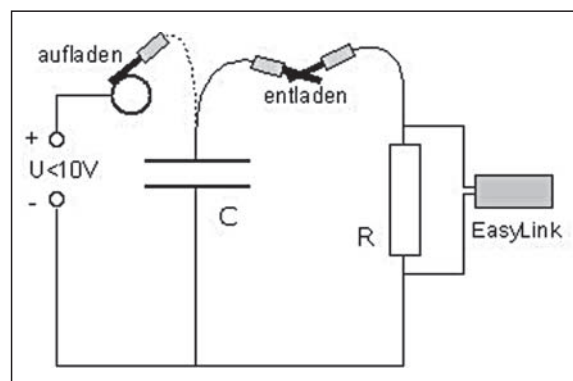
► Lade- und Entladevorgänge am Kondensator

Schülerarbeitsblatt

Geräte

- Stromversorgungsgerät, Batterie
- Kondensatoren, z.B. 22 μF , 47 μF
- Widerstände, z.B. 10 $\text{k}\Omega$, 22 $\text{k}\Omega$, 33 $\text{k}\Omega$
- Metallkugel auf Stecker (Elektrostatik)
- Verbindungsleiter
- Taschencomputer (hier: TI-Nspire™ GTR)
- Spannungssensor (hier mit Vernier EasyLink®)

Versuchsaufbau



Schaltplan

Einstellungen

- Spannung: ca. 1,5 V - 9 V
- Messmodus: Zeitgraph
- Messzeit: z.B. 2 s
- Abstand zweier Messungen: z.B. 0,05 s



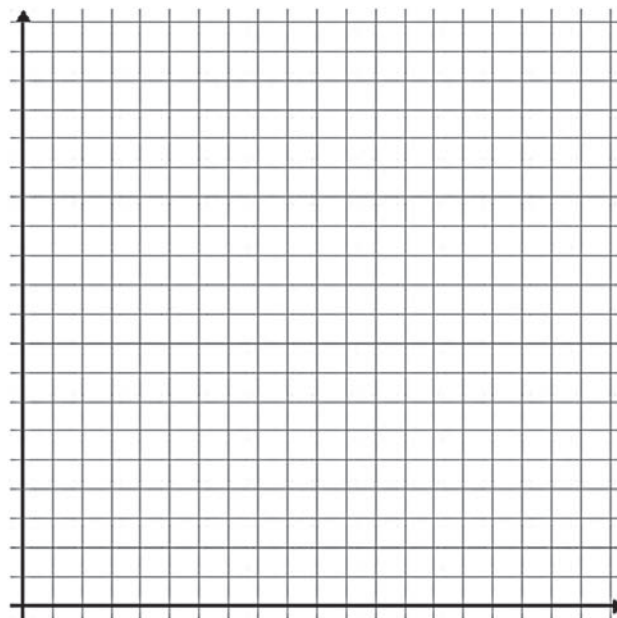
Starten des Entladevorgangs

Versuchsdurchführung

1. Bauen Sie zunächst die Schaltung mit einem Kondensator und einem Widerstand aus der Liste auf. Die Metallkugel wird in den Pluspol der Stromquelle gesteckt. Der Kondensator wird aufgeladen, wenn man mit dem einem Stecker die Metallkugel berührt (gestrichelte Verbindung).
2. Legen Sie den mit dem Minuspol verbundenen Steckerstift auf die Enter-Taste und halten Sie ihn dort fest. Jetzt drücken Sie mit dem zweiten Steckerstift so fest auf den anderen, dass die Enter-Taste betätigt wird, wodurch die Messung ausgelöst wird. Halten Sie die beiden Steckerstifte in dieser Position, bis die Messung beendet ist.

Auswertung

1. Stellen Sie die Messwerte auf dem Taschenrechner dar. Beurteilen Sie, ob Ihre Messung gelungen ist, und wiederholen Sie sie gegebenenfalls.
2. Führen Sie eine exponentielle Regression durch und bestimmen Sie die Zeitkonstante $\tau = R \cdot C$ gemäß der Gleichung $R \cdot C = -(\ln b)^{-1}$.
3. Stellen Sie die Regressionsgleichung auf dem Taschenrechner grafisch dar.
4. Wiederholen Sie den Versuch für andere Kombinationen von R und C.
5. Ändern Sie den Versuch so ab, dass der Spannungsverlauf am Kondensator während des Aufladens gemessen wird. Führen Sie die Messung durch und erläutern Sie den Graphen.
6. Tragen Sie die Graphen für einen Lade- und Entladevorgang in das Gitternetz ein (Rechtsachse ist die Zeit).



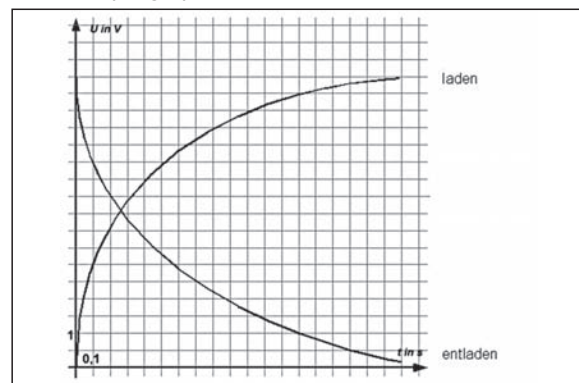
Lösungshinweise zum Schülerarbeitsblatt

Eine Messung ist gelungen, wenn die Messwerte alle auf einer Kurve zu liegen scheinen.

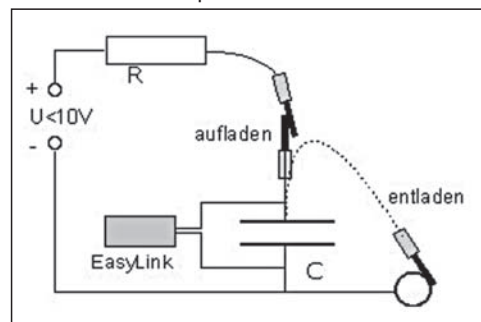
zu 4. Tabelle:

C	R	10 k Ω	22 k Ω	33 k Ω
22 μ F		0,22 s ⁻¹	0,484 s ⁻¹	0,726 s ⁻¹
47 μ F		0,47 s ⁻¹	1,034 s ⁻¹	1,551 s ⁻¹

zu 6. Beispielgraph:



zu 5. neuer Schaltplan:



Für die Spannung am Kondensator gilt: $U_c = U - U_R$
Aus der exponentiellen Abnahme von U_R ergibt sich der beobachtete Verlauf von U_c .

Autor:

Jürgen Enders, Hameln (D)
Humboldt-Gymnasium Bad Pyrmont
aj.enders@t-online.de

► Potenzen algorithmisch berechnen – Ein einführendes Beispiel in die Komplexitätstheorie

Simon Knellwolf



Diese Unterrichtseinheit entstand im Rahmen des CAS-Basiskurses für Junglehrkräfte im April 2008 in Zürich unter der Leitung von René Hugelshofer.

Stufe: Angewandte Mathematik in der Sekundarstufe II

Dauer: eine Doppelstunde

Voraussetzungen: Potenzgesetze, elementare Programmierkenntnisse (Kontrollstrukturen, Funktionen)

Unter der Komplexität eines Algorithmus versteht man meist den Verbrauch an Speicherplatz oder Rechenzeit, den er zur Lösung eines bestimmten Problems benötigt. In dieser Unterrichtseinheit geht es nur um letztere. Wir implementieren einen einfachen - aber langsamen - Algorithmus zur Berechnung der n-ten Potenz einer natürlichen Zahl und versuchen ihn zu verbessern.

Ein Handheld eignet sich hervorragend für den praktischen Teil dieser Unterrichtseinheit, da sein Prozessor im Vergleich zu Prozessoren von PCs etwas langsamer arbeitet. Dadurch wird jede Effizienzsteigerung des Algorithmus bereits beim einfach verständlichen Problem der Potenzberechnung erfahrbar. Diese Unterrichtseinheit will einen intuitiven, experimentellen Zugang zur Effizienz von Algorithmen schaffen.

Das Aufgabenblatt bildet den Kern der Unterrichtseinheit. Es gewährleistet einen hohen Anteil an Eigenaktivität der Lernenden. Die Lehrperson soll – falls nötig – geeignete Hilfestellungen für das Programmieren von eigenen Funktionen im TI-Nspire™ CAS Handheld anbieten.

Aufgabenblatt:**Potenzen algorithmisch berechnen****Aufgabe 1: Algorithmus zur Potenzberechnung**

In dieser Aufgabe sollst du einen ersten Algorithmus zur Berechnung der n-ten Potenz einer natürlichen Zahl a programmieren.

- Berechne ohne Taschenrechner die Potenzen 5^3 , 3^4 und 2^7 .
- Wieviele Multiplikationen benötigst du zur Berechnung der obigen Potenzen? Wie viele benötigst du für a^n ?
- Beschreibe dein Vorgehen zur Berechnung von a^n in Worten.
- Programmiere das beschriebene Vorgehen mit Hilfe einer For-Schleife als Funktion `potenzschnecke(a, n)`.
- Führe `potenzschnecke(2, 2100)` aus und vergleiche dessen Rechenzeit mit jener der Tastenfolge 2^{2100} .

Aufgabe 2: Algorithmus verbessern

Offensichtlich berechnet das TI-Nspire™ CAS Handheld a^n auf eine andere (schnellere) Art als wir das in `potenzschnecke(a, n)` machen. In dieser Aufgabe sollst du `potenzschnecke(a, n)` zu `potenzigel(a, n)` verbessern, welche auch Potenzen mit bestimmten grossen Exponenten ähnlich schnell berechnet wie die Tastenfolge a^n .

- Mit Hilfe der Potenzgesetze lässt sich 3^9 in nur drei Multiplikationsschritten berechnen. Erkläre.
- Wieviele Multiplikationen benötigst du für 3^{16} , 3^{64} und 3^{1024} ?
- Wie könntest du vorgehen, um 3^{17} mit weniger als 16 Multiplikationen zu berechnen?
- Beschreibe dein verbessertes Vorgehen zur Berechnung von a^n in Worten.

- e) Programmiere das beschriebene Vorgehen als Funktion `potenzigel(a,n)`.
- f) Führe `potenzigel(2,2100)` aus und vergleiche mit `potenzschnecke(2,2100)` und der Tastenfolge 2^{2100} .

Aufgabe 3: Algorithmus nochmals verbessern

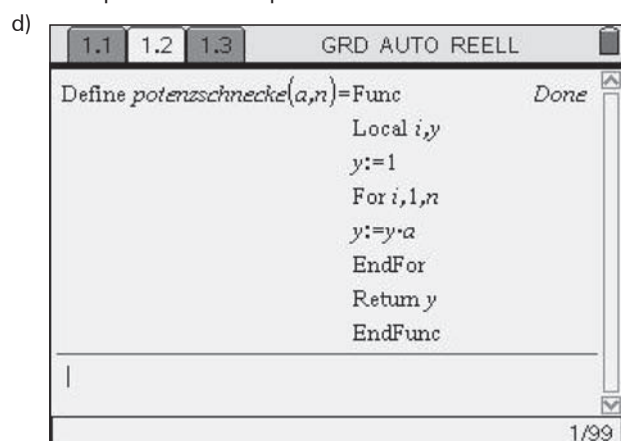
Die Funktion `potenzigel` berechnet 2^{2100} deutlich schneller als die Funktion `potenzschnecke`. Sie entspricht aber noch immer nicht der Methode, nach welcher der TI-Nspire Potenzen berechnet. Dies wird deutlich, wenn du die Rechenzeiten für `potenzigel(2,2000)` und für die Tastenfolge 2^{2000} vergleichst.

- a) Vergleiche `potenzigel(2,2100)` mit `potenzigel(2,2000)`. Erkläre.
- b) Welche Ideen hast du für `potenzchase(a,n)`? Formuliere sie in Worten und versuche sie zu implementieren.

Lösungen und Hinweise zum Aufgabenblatt

Aufgabe 1

- a) $5^3 = 125$, $3^4 = 81$, $2^7 = 128$. Die meisten Lernenden werden die Potenzen berechnen, indem sie den Exponenten schrittweise um 1 erhöhen. Falls jemand bereits die Idee $3^2 \cdot 3^2 = 3^4$ hat, soll er Aufgabe 1 trotzdem mit Hilfe von Einerschritten beim Exponenten lösen, damit er `potenzschnecke` und `potenzigel` vergleichen kann.
- b) Für a^n werden $n - 1$ Multiplikationen benötigt.
- c) Falls $n > 1$ multipliziere man a mit a , falls $n > 2$ multipliziere man das Produkt nochmals mit a , falls $n > 3$ multipliziere man das neue Produkt nochmals mit a , usw. Nach $n-1$ Multiplikationen entspricht das Produkt der Potenz a^n .



- e) Die Funktion `potenzschnecke` benötigt offensichtlich viel mehr Rechenzeit als die implementierte Funktion des TI-Nspire. Wir haben folglich noch nicht den bestmöglichen Algorithmus zur Lösung unseres Problems gefunden.

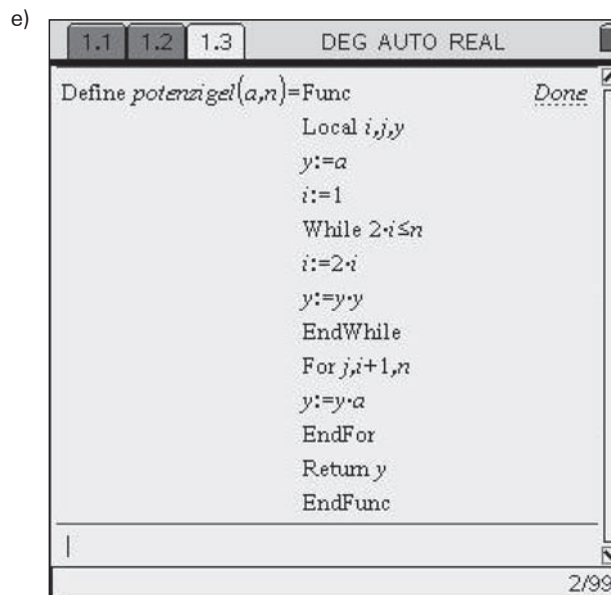
Hinweis:

Das TI-Nspire™ CAS Handheld kann Zahlen bis 10^{999} handhaben. Theoretisch erlaubt dies Zweierpotenzen mit Exponenten $n < 3321$.

Aufgabe 2

- a) Man berechnet $((3^2)^2)^2$.
- b) Man benötigt 4, 6 respektive 10 Multiplikationen.

- c) Man könnte $((3^2)^2)^2 \cdot 3$ berechnen. Das sind 5 Multiplikationen.
- d) Anstatt den Exponenten in Einerschritten zu erhöhen, verdoppeln wir ihn schrittweise wie in den obigen Beispielen bis wir den gewünschten Exponenten überschreiten würden. Nur die fehlenden Erhöhungen machen wir in Einerschritten.



- f) Bei den Laufzeiten von `potenzigel(2,2100)` und der Tastenfolge 2^{2100} ist kein Unterschied feststellbar. Es besteht wohl trotzdem ein kleiner Unterschied. Unser Algorithmus benötigt 63 Multiplikationen (11 bis 2^{2048} , anschliessend noch 52), der Taschenrechner verwendet wahrscheinlich den Algorithmus Square and Multiply (siehe Wikipedia) und benötigt damit sicher weniger als $2[\lceil \log_2(2100) \rceil + 1] = 24$ Multiplikationen.

Aufgabe 3

- a) Die Funktion `potenzigel` berechnet 2^{2100} deutlich schneller als 2^{2000} . Das wird klar, wenn wir die Anzahl Multiplikationen in beiden Fällen ausrechnen: für 2^{2100} benötigt `potenzigel` 63 Multiplikationen, für 2^{2000} aber deren 986 (10 bis 2^{1024} , anschliessend noch 976).
- b) Es liegt auf der Hand, die Zwischenresultate zu speichern und wiederzuverwenden. So könnte beispielsweise 2^{10} als $((2^2)^2)^2 \cdot 2^2$ berechnet werden. Dieser Ansatz hat einen steigenden Speicherbedarf zum Nachteil. Der Ausgang dieser Aufgabe ist sehr offen. Interessierte Lernende sollen auf Square and Multiply verwiesen werden.

Literatur

- [1] Für den Laien verständliche, ausführlichere Hinweise zur Komplexitätstheorie: Armin Barth, Algorithmik für Einsteiger, Vieweg, 2003, Braunschweig.
- [2] Einführung zum Programmieren mit TI-Nspire™ CAS: Josef Böhm, Programmieren mit dem TI-Nspire™ CAS, bk teachware, 2008, Linz.

Autor:

Simon Knellwolf, Brugg AG (CH)
Kantonales Gymnasium Menzingen
simon.knellwolf@sunrise.ch

Die Behandlung von Kettenbrüchen mit einem GTR

Heinz Pichler



1. Der Wert eines homogenen Kettenbruchs

Für einen Kettenbruch der Art

$$K + \frac{1}{K + \frac{1}{K + \frac{1}{\dots}}}$$

lässt sich der zahlenmäßige Wert mit dem Taschenrechner auf vielfältige Weise eruieren.

Rekursion: Steigt man Schritt für Schritt im Bruch von unten nach oben, folgt die Rekursion dem Prinzip:

$$N_j = K + \frac{1}{N_{j-1}}$$

Überantwortet man dieses für den Koeffizienten $K = 1$ dem Rechner, indem man im MODE $\langle \text{Seq} \rangle$ die Einstellungen gemäß Abb.1a,b vornimmt, erhält man mit TRACE einen Wertegraph (Abb.1c).

```
Plot1 Plot2 Plot3
nMin=0
\u(n)B1+1/\u(n-1)
u(nMin)B(1)
\u(n)=
\u(nMin)=
\uw(n)=
```

Abb. 1a

```
WINDOW
nMin=0
nMax=35
PlotStart=1
PlotStep=1
Xmin=0
Xmax=35
\Xscl=0
```

Abb. 1b

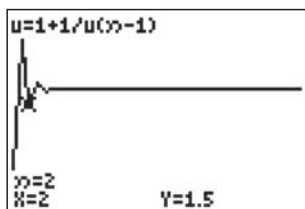


Abb. 1c

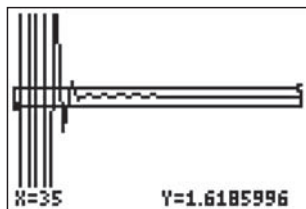


Abb. 1d

Der Index n zählt - von unten nach oben gelesen - die Anzahl der erfassten Bruchstriche. Man sieht am Verlauf der Ordinatengröße Y , die den Wert des n -stufigen Kettenbruchs verrät, die alternierende Annäherung an den Wert des unendlichen Kettenbruchs! Umrahmt man nach ZOOM $\langle 1 \rangle$ den „Auslauf“ des Graphen mit einem schmalen Streifen (Abb.1d) und vergrößert mit ENTER mehrmals dessen Inhalt, so zeigt sich, wie drastisch die Werte mit zunehmender Schachtelung konvergieren!

2. Dezimalzahlen umwandeln

Jede reelle Zahl R lässt sich als inhomogener Kettenbruch

$$R = G_0 + \frac{1}{G_1 + \frac{1}{G_2 + \dots}}$$

darstellen, in dem die Größe G_0 den Ganzzahlteil der Zahl und die Größen G_1, G_2, G_3, \dots den Ganzzahlteil des jeweils verbleibenden, reziproken Restes darstellen.

Auf dem Rechner hat man die Zahl in Vor- und Nachkommateil zu zerlegen. Nachdem ersterer zur Anzeige gebracht wird

(Abb.2), wird von letzterem der Kehrwert gebildet, wodurch erneut eine zerlegungsfähige Dezimalzahl entsteht. Die Routine wird mit wiederholendem ENTER so lange ausgeführt, bis eine ungewöhnlich große Ganzzahl oder gar die Fehlermeldung ERR:DIVIDE BY 0 auftaucht. Sie ist Zeichen dafür, dass der zugrundeliegende Nachkommateil verschwindend klein war und die Kettenbruchbildung daher beendet ist!

```
-27.40532+R: iPar
t(R)
1/fPart(R)+R: iPa
rt(R)
-27
-2
-2
-7
```

Abb. 2a

```
-8
-2
-2
-1
-1
-5
-1
-189968
```

Abb. 2b

Die rückführende Rechnung zur Dezimalzahl erfordert die ständige Anpassung der Rekursion.

```
-1
-5+Ans^-1
-1
-6
-1+Ans^-1
-1.166666667
-1.857142857
```

Abb. 3a

```
-2+Ans^-1
-2.538461538
-2.393939394
-8+Ans^-1
-8.417721519
-7+Ans^-1
-7.118796992
```

Abb. 3b

```
-2+Ans^-1
-2.140473173
-2.467186421
-27+Ans^-1
-27.40532
```

Abb. 3c

3. Das Programm ANSFRAC.8xp

Das Programm ANSFRAC.8xp führt für den aktuell im Ans-Speicher stehenden Skalarwert eine Bruchbildung durch. So wird die Kreiszahl beispielsweise auf die Anweisung π :prgmANSFRAC hin in der Form der Abb.4 präsentiert.

```
Ans= 1146408
-----
364913
= 3 51669
-----
364913
```

Abb. 9a

HERT	FRAC	-----	2
3.1416	364913		
-----	-----		
FRAC(1) = 1146408			

Abb. 9b

Hinweis: In der TI-Materialdatenbank finden Sie eine umfangreichere Fassung dieses Artikels: Mit Erläuterung zur vereinfachten Rekursion, Hintergründen des Programms sowie weiteren Möglichkeiten zur Analyse von Kettenbrüchen mit dem GTR.

Autor:

Heinz Pichler, Spittal (AT)
pichler_h@lycos.at

► Tipps und Tricks

Hinweise zur Rubrik

Sicher haben Sie sich auch schon einmal über ein bestimmtes Ergebnis des Rechners oder sein „Verhalten“ in einer bestimmten Situation gewundert? In dieser Rubrik sollen Hintergründe und „Kniffs“ weitergegeben werden, ohne dass Sie umständlich in den Handbüchern danach suchen müssen.

Senden Sie uns doch Ihren Kurzbeitrag, gerne auch in Form einer Fragestellung, für diese Rubrik an ti-nachrichten@ti.com

Der nachfolgende Beitrag stammt von Hans-Ulrich Lampe, Stadthagen, UlrichLampe@t-online.de.

x_{res} lässt sich nicht einstellen

Den Voyage™200 frisch ausgepackt oder „endlich“ das Update auf das aktuelle Betriebssystem installiert? Im [WINDOW]-Fenster fällt auf, dass x_{res} gebrochen dargestellt wird als Zeichen der Deaktivierung.

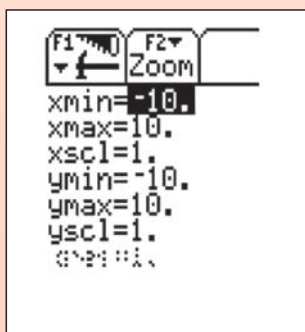


Abb. 1

Im [Y=]-, [WINDOW]- oder [GRAPH]-Fenster wird über [F1], 9:Format (oder [F1], 9) das GRAPH FORMATS-Menü geöffnet und die neue Einstellung „Discontinuity Detection“ auf OFF gestellt.

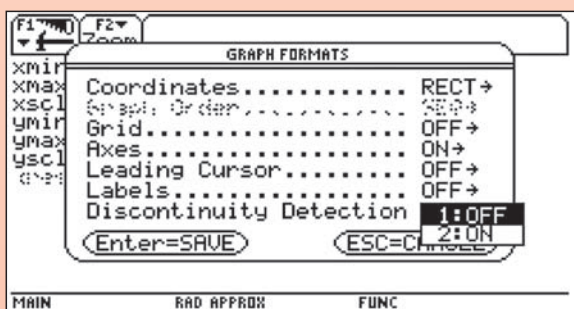


Abb. 2

Nun ist x_{res} wieder wie gewohnt veränderbar. Dazu muss man wissen, dass x_{res} die Pixelauflösung bei der Darstellung von Funktionsgraphen steuert. Die Standardein-

stellung ist 2 und das bedeutet, dass entlang der x-Achse jedes zweite Pixel berechnet und dargestellt wird. Die Auflösung lässt sich ganzzahlig im Intervall von 1 bis 10 verändern. Niedrige Werte erhöhen die Genauigkeit der Darstellung, verlangsamen aber auch die Zeichengeschwindigkeit. Dieses ist häufig bei der Untersuchung von Funktionenschar-

Was verbirgt sich hinter dieser neuen Einstellung?

Wörtlich übersetzt bedeutet es „Unstetigkeitsermittlung“, tatsächlich aber eher eine Definitionslücken-Ermittlung. Aktiviert man diese Einstellung, so hat man eine neue Qualität bei der graphischen Darstellung von z.B. gebrochen-rationalen Funktionen gewonnen, da die irreführenden Verbindungslinien an Polstellen nicht mehr gezeichnet werden:

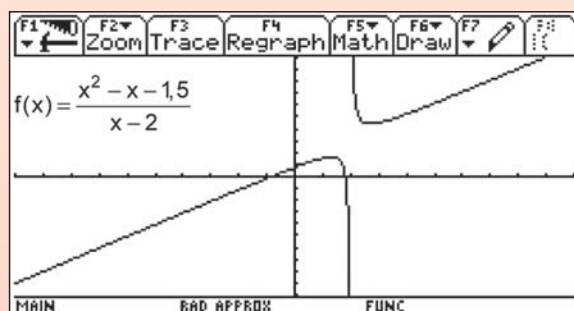


Abb. 3

Eine hebbare Definitionslücke wird leider nicht in Form einer Lücke im Graphen dargestellt, dies gelingt erst bei mehrfachem Zoomen.

Wie hilfreich diese Einstellung „Discontinuity Detection ON“ für einen forschenden Schüler ist, wird deutlich, wenn man die Einstellung deaktiviert und der schnellen Zeichengeschwindigkeit wegen $x_{res}=5$ wählt. Dann bekommt man für die eben genannte Funktion folgenden, irreführenden Graphen:

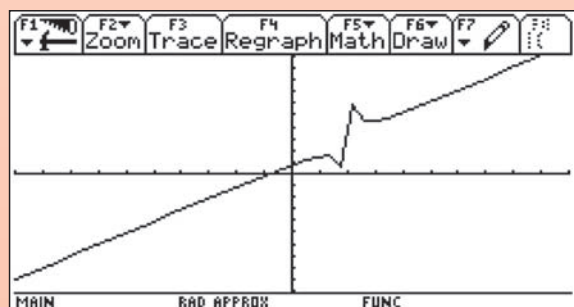


Abb. 4

TI-*n*spire™ TECHNOLOGIE

2 in 1: TI-Nspire™ Handheld mit TI-84 Plus Modus

Das TI-Nspire™ Handheld ist kompatibel mit den TI-Vorgängermodellen: Sie müssen nur die Tastatur des TI-Nspire™ Handhelds (numerischer Graphikrechner) gegen die TI-84 Plus Tastatur (optional erhältlich) austauschen. Schon halten Sie einen TI-84 Plus in der Hand.

Nutzen Sie die neuen didaktisch wertvollen Darstellungsfähigkeiten des TI-Nspire™ auch in den TI-84 Plus Klassen.

Ihre Unterrichtsmaterialien für den TI-84 Plus können Sie einfach weiter verwenden und bei Bedarf nach und nach auf die TI-Nspire™ Technologie umstellen.

2 in 1: Sie erhalten die Funktionalität von zwei Handhelds in einem Gerät.



Mehr zur TI-Nspire™ Technologie erfahren Sie unter: education.ti.com

 **TEXAS
INSTRUMENTS**

Ihre Erfahrung. Unsere Technologie. Mehr Lernerfolg.

Innovative Technologie

Dank der Technologie unserer aktuellen Graphikrechner TI-84 Plus, TI-84 Plus Silver Edition, TI-89 Titanium, Voyage™ 200, TI-Nspire™, TI-Nspire™ CAS können Sie die bestehenden Fähigkeiten der Rechner durch Herunterladen zusätzlicher Applikationen und/oder Upgrades erweitern und Ihren persönlichen Wünschen anpassen. Damit halten Sie sich alle Optionen für die Zukunft offen.

Kostenlose Ausleihe

Sie möchten einen TI-Graphikrechner oder ein Computer-Algebra-System testen? – Kein Problem! Wir leihen Ihnen Einzel-exemplare oder Klassensätze bis zu vier Wochen – kostenlos und unverbindlich!



Unterrichtsmaterialien

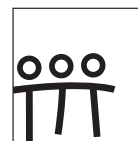
Neben den „TI-Nachrichten“ gibt es eine Fülle von begleitenden Unterrichtsmaterialien zum Einsatz unserer Produkte – insbesondere auch von Schulbuchverlagen. Hier eine Auswahl von TI und T³:

- CuBaLibra: Einfache, gut strukturierte Aufgaben: Stoff für eine Unterrichtsstunde.
- MMM: Kurze Beispiele für alltäglich benötigte Veranschaulichungen, Die Umsetzung wird mittels Kurzvideos erklärt.
- T³ Akzente: Aufgaben mittlerer Komplexität mit Schülerarbeitsblättern und didaktischen Hinweisen.

Mehr Informationen, kostenlose Downloads sowie die Anmelde-möglichkeit zum E-Newsletter „TI-Materialien“ finden Sie auf den TI-Webseiten oder unter: www.ti-unterrichtsmaterialien.net.

Lehrerfortbildungen

Graphikrechner und CAS sind für viele Kolleginnen und Kollegen neu und unbekannt. Wir helfen Ihnen mit Fort-bildungen an Ihrer Schule oder auf Veranstaltungen! Wenden Sie sich direkt an T³. Mehr Informationen zu T³ finden Sie im Internet:
T³ Deutschland: www.t3deutschland.de
T³ Österreich: www.t3oesterreich.at
T³ Schweiz: www.t3schweiz.ch
Oder kontaktieren Sie Ihren TI-Schulberater sowie unser Customer Service Team.



T³ DEUTSCHLAND
T³ ÖSTERREICH
T³ SCHWEIZ

Praktische Präsentationsmöglichkeiten

Projizieren Sie das Display der Lehrerversion Ihres TI-Graphikrechners mit ViewScreen und Overheadprojektor!



Flexible Verbindungsmöglichkeiten

Die Verbindungskabel zu den TI-Graphikrechnern und Computer-Algebra-Systemen ermöglichen eine schnelle und stabile Verbindung zum PC oder Mac.



Unkomplizierte Messwerterfassung

Portable, universell einsetzbares Messwerterfassungssysteme für den naturwissenschaftlichen Unterricht. Verschiedene Sensoren erhältlich.



Allgemeine Informationen



Nehmen Sie mit unserem Customer Service Center Kontakt auf, wenn Sie technische Auskünfte benötigen oder Fragen zum Gebrauch unserer Rechner oder bezüglich einer Lehrerfortbildung haben. Auch zum Ausleihen der Rechner ist das CSC die erste Adresse:

Wir sind für Sie da: Mo – Fr, 9.00 – 17.00 Uhr

Texas Instruments
Customer Service Center
c/o Sitel NV
Woluwelaan 158
1831 Diegem
Belgien

Tel D: +49 (61 96) 97 50 15 Fax D: +49 (61 96) 97 50 44
Tel A: +43 (1) 5 02 91 00 07 Fax A: +43 (1) 5 02 91 00 34
Tel CH: +41 (44) 2 73 06 88 Fax CH: +41 (22) 7 10 00 36

Allgemeine Informationen:
ti-cares@ti.com

Kostenlose Ausleihe von Graphikrechnern und Computer-Algebra-Systemen:
ti-loan@ti.com

Kostenloses Abonnement der TI-Nachrichten:
ti-nachrichten@ti.com

Garantie

Auf alle Graphikrechner und Computer-Algebra-Systeme von Texas Instruments bietet Texas Instruments 3 Jahre Herstellergarantie. Sollte doch einmal etwas defekt sein, rufen Sie bitte zunächst unser Customer Service Center an. Oft kann das Problem bereits am Telefon behoben werden.

**education.ti.com/deutschland · education.ti.com/oesterreich · education.ti.com/schweiz
ti-cares@ti.com**