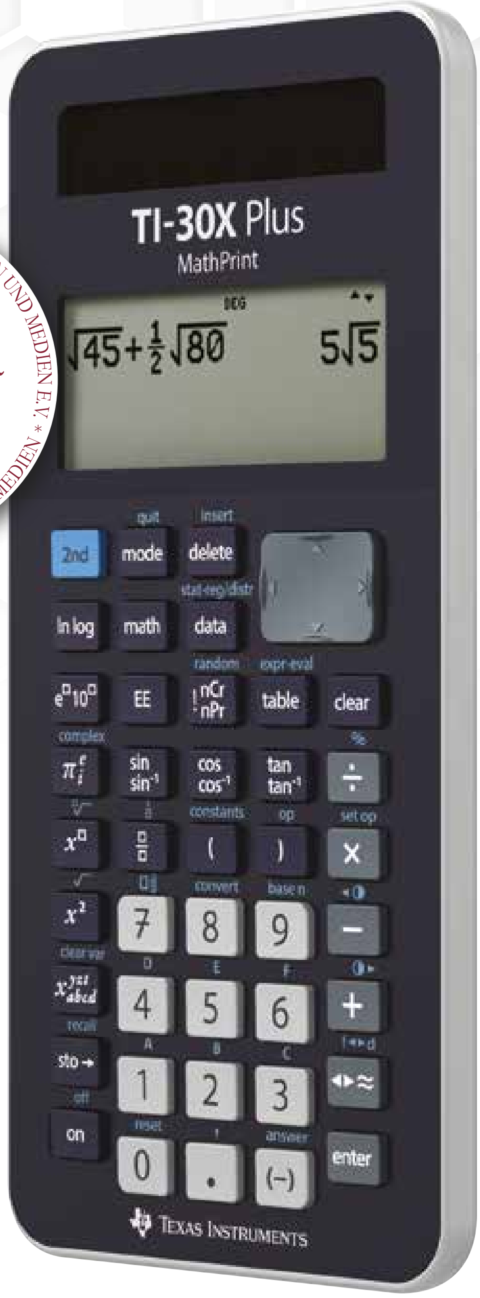
Heinz Klaus Strick

Stochastik im Abitur



Comenius EduMedia Siegel 2018

Gesellschaft für Pädagogik, Information und Medien e.V. * Für exemplarische Bildungsmedien *

- Aus dem Aufgabenpool des IQB
- Lösungen mit dem TI-30X Plus MathPrint™

Texas Instruments

Dieses und weiteres Material steht Ihnen auf der TI Materialdatenbank zum Download bereit:
www.ti-unterrichtsmaterialien.net

© 2020 Texas Instruments

Dieses Werk wurde in der Absicht erarbeitet, Lehrerinnen und Lehrern geeignete Materialien für den Unterricht an die Hand zu geben. Die Anfertigung einer notwendigen Anzahl von Fotokopien für den Einsatz in der Klasse, einer Lehrerfortbildung oder einem Seminar ist daher gestattet. Hierbei ist auf das Copyright von Texas Instruments hinzuweisen. Jede Verwertung in anderen als den genannten oder den gesetzlich zugelassenen Fällen ist ohne schriftliche Genehmigung von Texas Instruments nicht zulässig. Alle Warenzeichen sind Eigentum ihrer Inhaber.

Vorwort

In der vorliegenden Schrift finden Sie drei Aufgaben aus dem Themenbereich der Stochastik, an denen die besonderen Einsatzmöglichkeiten des TI-30X Plus MathPrint™ dargestellt werden.

Die ersten beiden Aufgaben sind dem gemeinsamen Aufgabenpool des IQB entnommen, die im Jahr 2019 den Bundesländern als mögliche Abituraufgaben zur Verfügung gestellt wurden – jeweils eine Aufgabe für das grundlegende Anforderungsniveau bzw. für das erhöhte Anforderungsniveau.

Die Aufgabenstellungen wurden ergänzt durch das jeweilige Aufgabenprofil sowie eine ausführliche Lösung, ggf. auch mit Lösungsalternativen. Hierin enthalten ist die Darstellung, durch welche der vielfältigen Optionen des wissenschaftlichen Taschenrechners TI-30X Plus MathPrint™ die Lösung der betr. Teilaufgabe erfolgen kann. Hierdurch wird deutlich, dass der TI-30X Plus MathPrint™ im Rahmen der Stochastik nicht nur als Ersatz für die früher üblicherweise verwendeten Tabellen zur kumulierten Binomialverteilung bzw. zur Normalverteilung anzusehen ist.

Die dritte Aufgabe beschäftigt sich mit verschiedenen Fragestellungen zu einem Würfelspiel. Der Umfang dieser Aufgabe geht über den einer typischen Prüfungsaufgabe des IQB hinaus. Durch die Vielfalt der Teilaufgaben wird dargestellt, welche Aufgabenvariationen im Zusammenhang mit dem Thema „Würfelspiel“ im Rahmen einer Prüfungsaufgabe möglich wären. Diese – im Vergleich zu den ersten beiden Aufgaben – zu umfangreiche Aufgabe eignet sich also insbesondere als Trainingsaufgabe ohne Beachtung des für die Abiturprüfung zur Verfügung stehenden zeitlichen Rahmens.

Hinweis: Alle weiteren Aufgaben des IQB-Aufgabenpools der Länder für die Abiturprüfung 2019 sind in der besonderen Schrift „**Aufgaben für das Fach Mathematik“** enthalten (mit Lösungen und Erläuterungen zum Einsatz des TI-30X Plus MathPrint™).

Diese und weiterere Materialien stehen in der TI Materialdatenbank zum download bereit: **www.ti-unterrichtsmaterialien.net.**

1. Stochastik-Aufgabe des IQB 2019 (grundlegendes Anforderungsniveau)

In einem Land, in dem 80 % der Erwachsenen einen Führerschein besitzen, werden 200 Erwachsene zufällig ausgewählt. Es soll angenommen werden, dass dabei die Anzahl der ausgewählten Erwachsenen, die einen Führerschein besitzen, binomialverteilt ist.

Aufgabenstellung Teilaufgabe a)

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Anzahl der ausgewählten Erwachsenen, die einen Führerschein besitzen, vom Erwartungswert für diese Anzahl um höchstens 5 % abweicht.

Anforderungsprofil und vorgeschlagene Punktwertung Teilaufgabe a)

(1)	Bestimmen des Erwartungswerts	1/4 Punkte
(2)	Bestimmen des Intervalls um den Erwartungswert	1/4 Punkte
(3)	Berechnen der Intervall-Wahrscheinlichkeit	2/4 Punkte

Lösung Teilaufgabe a)

X: *Anzahl der Erwachsenen in der Stichprobe, die einen Führerschein besitzen*

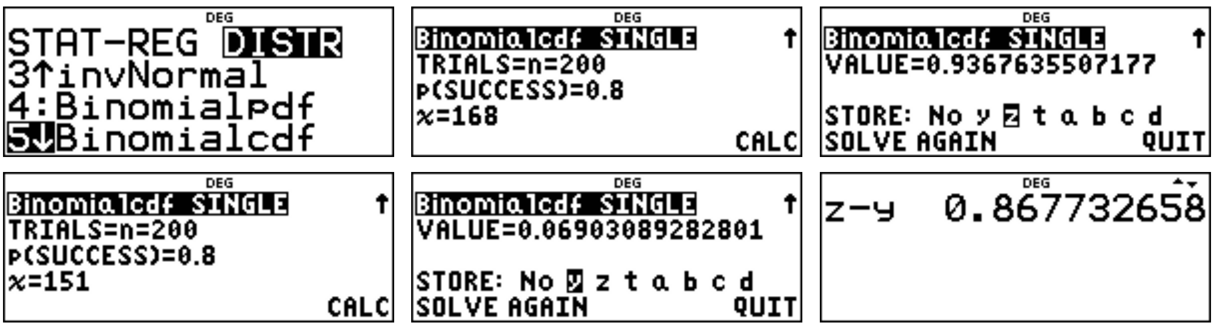
Erwartungswert: $\mu = n \cdot p = 200 \cdot 0{,}8 = 160$

5 % des Erwartungswerts: $0{,}05 \cdot 160 = 8$

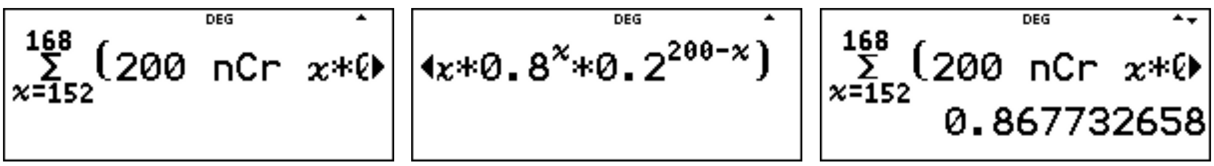
$P(152 \le X \le 168) = P(X \le 168) - P(X \le 151) \approx 0{,}868 = 86{,}8\ \%$

Einsatz des TI30X Plus MathPrint™

Berechnung der Intervall-Wahrscheinlichkeit $P(152 \le X \le 168) = P(X \le 168) - P(X \le 151)$ mithilfe der kumulierten Binomialverteilung



Alternativ ist eine Berechnung mithilfe der BERNOULLI –Formel möglich:



Aufgabenstellung Teilaufgabe b)

Ermitteln Sie, wie groß die Anzahl der ausgewählten Erwachsenen mindestens sein müsste, damit von diesen mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90 % mehr als 160 einen Führerschein besitzen.

Anforderungsprofil und vorgeschlagene Punktwertung Teilaufgabe b)

	Suchalgorithmus erläutern und anwenden	3/4 Punkte
	Ergebnis formulieren	1/4 Punkte

Lösung Teilaufgabe b)

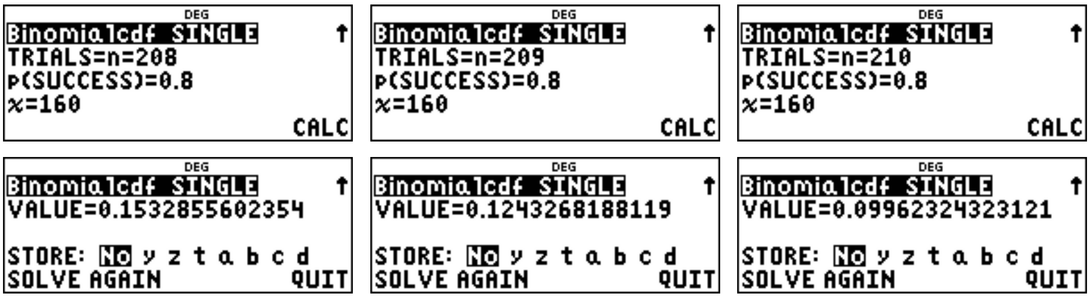
X: *Anzahl der Erwachsenen in der Stichprobe, die einen Führerschein besitzen* (p = 0,8)

Die Aufgabe kann durch systematisches Probieren gelöst werden. Gesucht ist der kleinste Wert von n, sodass P(X > 160) = 1 – P(X ≤ 160) ≥ 0,9, also P(X ≤ 160) ≤ 0,1

Die Bedingung ist erfüllt für $n \geq 210$.

Einsatz des TI30X Plus MathPrint[TM]

Lösung mithilfe der kumulierten Binomialverteilung:



Hinweis: Eine Lösung mithilfe einer Funktion $f(n) = \sum_{k=0}^{n} P(X = k)$, in deren Wertetabelle man den passenden Wert von n ablesen kann, ist nicht möglich, weil die Funktionsvariable n und der Laufindex k der Summe mit x bezeichnet sind (in der Voreinstellung des WTR) und hier keine Änderung möglich ist.

In einer bestimmten Region des betrachteten Lands werden alle Fahrprüfungen eines Jahres auf einen möglichen Zusammenhang zwischen dem Alter eines Prüflings und dem Bestehen der Prüfung hin untersucht. Von insgesamt 13879 Prüflingen waren 2482 zum Zeitpunkt der Prüfung mindestens 30 Jahre alt. Insgesamt haben 11104 Prüflinge die Prüfung bestanden; davon waren 8870 zum Zeitpunkt der Prüfung jünger als 30 Jahre.

Ein Prüfling wird zufällig ausgewählt. Betrachtet werden die folgenden Ereignisse:

A: „Der Prüfling war zum Zeitpunkt der Prüfung mindestens 30 Jahre alt.“

B: „Der Prüfling hat die Prüfung bestanden.“

© 2020 Texas Instruments

Aufgabenstellung Teilaufgabe c)

Bestimmen Sie die Anzahl der Prüflinge, die zum Zeitpunkt der Prüfung jünger als 30 Jahre waren und die Prüfung nicht bestanden haben.

Anforderungsprofil und vorgeschlagene Punktwertung Teilaufgabe c)

	Bestimmen der gesuchten Anzahl (ggf. mithilfe einer4-Feldertafel)	2/2 Punkte

Lösung Teilaufgabe c)

Die im Text enthaltenen Informationen kann man in eine 4-Feldertafel mit absoluten Häufigkeiten eintragen (schwarz) und durch Subtraktion ergänzen (rot):

	B	$\overline{B}$	gesamt
A	**2234**	**248**	2482
$\overline{A}$	8870	**2527**	**11397**
gesamt	11104	**2775**	13879

Gesucht ist die Anzahl $|\overline{A} \cap \overline{B}| = 2527$.

Aufgabenstellung Teilaufgabe d)

Untersuchen Sie, ob die Wahrscheinlichkeiten $P_A(B)$ und $P(B)$ übereinstimmen. Geben Sie an, ob die Ereignisse A und B stochastisch unabhängig sind, und interpretieren Sie Ihre Angabe im Sachzusammenhang.

Anforderungsprofil und vorgeschlagene Punktwertung Teilaufgabe d)

	Bestimmen der Wahrscheinlichkeiten	3/5 Punkte
	Entscheidung über die stochastische Abhängigkeit.	2/5 Punkte

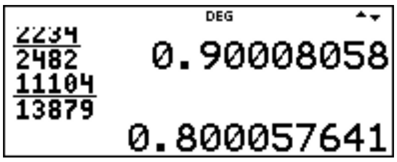
Lösung Teilaufgabe d)

Die gesuchten Wahrscheinlichkeiten lassen sich aus der Vierfeldertafel ablesen:
$P_A(B) = \frac{2234}{2482} \approx 0{,}900$ und $P(B) = \frac{11104}{13879} \approx 0{,}800$.

Da diese beiden Wahrscheinlichkeiten nicht übereinstimmen, sind die Ereignisse A und B nicht stochastisch unabhängig voneinander, d. h., die Anteile der Personen, die die Führerscheinprüfung bestehen, ist in den beiden Altersgruppen unterschiedlich groß.

Einsatz des TI30X Plus MathPrint™

Die Berechnung der gesuchten Anteile kann so erfolgen:



Aufgabenstellung Teilaufgabe e)

Besteht ein Prüfling die Prüfung bei der ersten Teilnahme nicht, nimmt er ein zweites Mal teil. Der Anteil der Prüflinge, die die Prüfung schon bei der ersten Teilnahme bestanden haben, ist q. Unter denjenigen, die zum zweiten Mal an der Prüfung teilnahmen, ist der Anteil der Prüflinge, die die Prüfung bestanden haben, nur halb so groß. Der Anteil der Prüflinge, die die Prüfung spätestens bei der zweiten Teilnahme bestanden haben, beträgt 90 %. Berechnen Sie den Wert von q.

Anforderungsprofil und vorgeschlagene Punktwertung Teilaufgabe e)

	Ansatz und Aufstellen der Gleichung	3/5 Punkte
	Lösung der Gleichung im Sachzusammenhang	2/5 Punkte

Lösung Teilaufgabe e)

Anteil der Personen, die bei der 1. Prüfung bestanden haben = q

Anteil der Personen, die erst bei der 2. Prüfung bestanden haben = $(1 - q) \cdot \frac{1}{2} \cdot q$,

also $q + (1-q) \cdot \frac{q}{2} = 0{,}9$

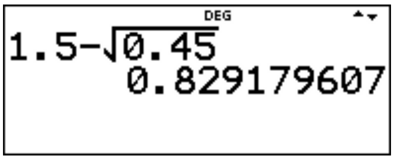
Durch Umformen erhält man

$$q + 0{,}5q - 0{,}5q^2 = 0{,}9 \Leftrightarrow q^2 - 3q = -1{,}8 \Leftrightarrow (q-1{,}5)^2 = 2{,}25 - 1{,}8 \Leftrightarrow q = 1{,}5 \pm \sqrt{0{,}45}$$

Nur die Lösung $q = 1{,}5 - \sqrt{0{,}45} \approx 0{,}829 = 82{,}9\ \%$ ist im Sachzusammenhang brauchbar, denn für die Wahrscheinlichkeit q muss gelten q ≤ 1.

Einsatz des TI30X Plus MathPrint™

Näherungswert für die Lösung der quadratischen Gleichung



2. Stochastik-Aufgabe des IQB 2019 (erhöhtes Anforderungsniveau)

Ein Unternehmen organisiert Fahrten mit einem Ausflugsschiff.

Betrachtet wird zunächst eine Fahrt, bei der das Schiff mit 60 Fahrgästen voll besetzt ist. Zu Beginn der Fahrt werden drei Fahrgäste zufällig ausgewählt; diese erhalten jeweils ein Freigetränk.

Aufgabenstellung Teilaufgabe a)

Ermitteln Sie die Anzahl möglicher Dreiergruppen, die sich bei der Auswahl ergeben können.

Anforderungsprofil und vorgeschlagene Punktwertung Teilaufgabe a)

	Bestimmung der Anzahl durch kombinatorischen Ansatz	2/2 Punkte

Lösung Teilaufgabe a)

Die gesuchte Anzahl ergibt sich aus dem Binomialkoeffizienten $\binom{60}{3} = \frac{60 \cdot 59 \cdot 58}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 34220$.

Einsatz des TI30X Plus MathPrint™

Berechnung des Binomialkoeffizienten mithilfe der Option der Taste p

```
        DEG
60 nCr 3     34220
```

Aufgabenstellung Teilaufgabe b)

Zwei Drittel der Fahrgäste kommen aus Deutschland, die übrigen aus anderen Ländern. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die drei ausgewählten Fahrgäste aus Deutschland kommen.

Anforderungsprofil und vorgeschlagene Punktwertung Teilaufgabe a)

	Bestimmung der Wahrscheinlichkeit	2/2 Punkte

Lösung Teilaufgabe b)

Aus der Sachsituation ergibt sich, dass es sich um ein Ziehen ohne Zurücklegen handelt, d. h., die Wahrscheinlichkeit berechnet sich gemäß Pfadmultiplikationsregel wie folgt

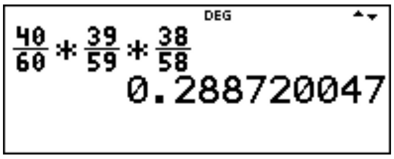
$\frac{40}{60} \cdot \frac{39}{59} \cdot \frac{38}{58} \approx 0{,}289 = 28{,}9\,\%$

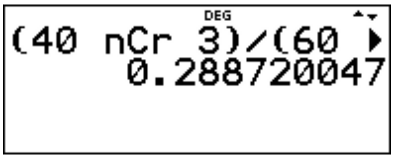
Alternativ kann der Vorgang auch als Stichprobennahme aufgefasst werden, also

$$\frac{\binom{40}{3}}{\binom{60}{3}} = \frac{\frac{40 \cdot 39 \cdot 38}{3 \cdot 2 \cdot 1}}{\frac{60 \cdot 59 \cdot 58}{3 \cdot 2 \cdot 1}} = \frac{40}{60} \cdot \frac{39}{59} \cdot \frac{38}{58} \approx 0{,}289 = 28{,}9\,\%$$

Einsatz des TI30X Plus MathPrint™

Bestimmen der Wahrscheinlichkeit als Produkt von Wahrscheinlichkeiten oder als Quotient von Binomialkoeffizienten:





Aufgabenstellung Teilaufgabe c)

Unter den Fahrgästen befinden sich Erwachsene und Kinder. Die Hälfte der Fahrgäste isst während der Fahrt ein Eis, von den Erwachsenen nur jeder Dritte, von den Kindern 75 %. Berechnen Sie, wie viele Kinder an der Fahrt teilnehmen.

Anforderungsprofil und vorgeschlagene Punktwertung Teilaufgabe c)

	Aufstellen der Gleichung	2/3 Punkte
	Lösen der Gleichung	1/3 Punkte

Lösung Teilaufgabe c)

Bezeichnet man die Anzahl der teilnehmenden Kinder mit *k*, dann beträgt die Anzahl der Erwachsenen also 60 – *k*.

Die Anzahl der Eis essenden Kinder ist dann $0{,}75 \cdot k$, der Eis essenden Erwachsenen $\frac{1}{3} \cdot (60 - k)$.

Aus der Angabe, dass 30 Personen ein Eis essen, ergibt sich dann die Gleichung $\frac{3}{4} \cdot k + \frac{1}{3} \cdot (60 - k) = 30$,

also $9 \cdot k + 4 \cdot (60 - k) = 360 \Leftrightarrow 5 \cdot k = 120 \Leftrightarrow k = 24$.

An der Fahrt nehmen also 24 Kinder und 36 Erwachsene teil.

Möchte man an einer Fahrt teilnehmen, so muss man dafür im Voraus eine Reservierung vornehmen. Erfahrungsgemäß erscheinen von den Personen mit Reservierung einige nicht zur Fahrt. Für die 60 Plätze lässt das Unternehmen deshalb bis zu 64 Reservierungen zu. Es soll davon ausgegangen werden, dass für jede Fahrt tatsächlich 64 Reservierungen vorgenommen werden. Erscheinen mehr als 60 Personen mit Reservierung zur Fahrt, so können nur 60 von ihnen daran teilnehmen; die übrigen müssen abgewiesen werden.

Vereinfachend soll angenommen werden, dass die Anzahl der Personen mit Reservierung, die zur Fahrt erscheinen, binomialverteilt ist, wobei die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine zufällig ausgewählte Person mit Reservierung nicht zur Fahrt erscheint, 10 % beträgt.

© 2020 Texas Instruments

Aufgabenstellung Teilaufgabe d)

Geben Sie einen Grund dafür an, dass es sich bei dieser Annahme im Sachzusammenhang um eine Vereinfachung handelt.

Anforderungsprofil und vorgeschlagene Punktwertung Teilaufgabe d)

	Modellbildung kommentieren	1/1 Punkte

Lösung Teilaufgabe d)

Man kann davon ausgehen, dass die Buchungen ebenso wie die Absagen nicht unabhängig voneinander erfolgen, da meistens kleinere oder größere Gruppen an einer solchen Fahrt teilnehmen möchten.

Aufgabenstellung Teilaufgabe e)

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens eine Person mit Reservierung abgewiesen werden muss.

Anforderungsprofil und vorgeschlagene Punktwertung Teilaufgabe e)

	Interpretation der Fragestellung	1/3 Punkte
	Berechnen der Intervall-Wahrscheinlichkeit	2/3 Punkte

Lösung Teilaufgabe e)

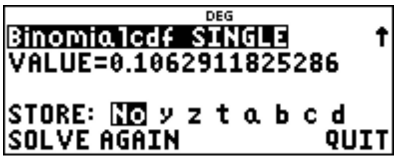
Zufallsvariable X: *Anzahl der Personen, die reserviert haben, aber nicht erscheinen*
Stichprobenumfang $n = 64$, Erfolgswahrscheinlichkeit $p = 0{,}1$

Wenn mehr als 60 Personen erscheinen, muss mindestens eine Person abgewiesen werden, d. h. gesucht ist die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis $X \leq 3$:

$P(X \leq 3) \approx 0{,}106 = 10{,}6\ \%$

Einsatz des TI30X Plus MathPrint™

Bestimmen der Intervall-Wahrscheinlichkeit mithilfe der kumulierten Binomialverteilung



Aufgabenstellung Teilaufgabe f)

Für das Unternehmen wäre es hilfreich, wenn die Wahrscheinlichkeit dafür, mindestens eine Person mit Reservierung abweisen zu müssen, kleiner als ein Prozent wäre. Dazu müsste die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine zufällig ausgewählte Person mit Reservierung nicht zur Fahrt erscheint, mindestens einen bestimmten Wert haben. Ermitteln Sie diesen Wert auf ganze Prozent genau.

© 2020 Texas Instruments

Anforderungsprofil und vorgeschlagene Punktwertung Teilaufgabe f)

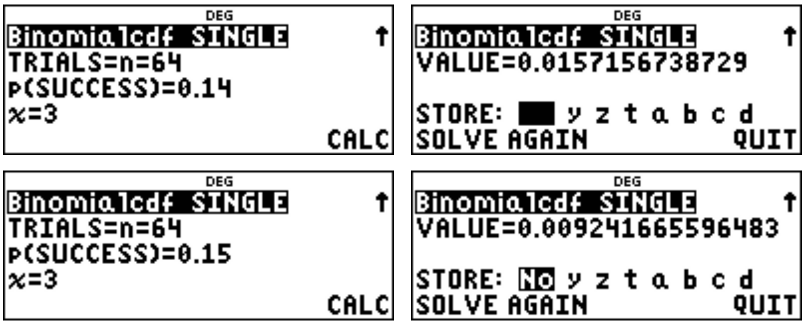
	Interpretation der Fragestellung	1/4 Punkte
	Berechnen der Intervall-Wahrscheinlichkeit für verschiedene *p*	3/4 Punkte

Lösung Teilaufgabe f)

Bestimmung der Erfolgswahrscheinlichkeit *p* durch systematisches Verändern von *p*.
Ergebnis: Die gesuchte Erfolgswahrscheinlichkeit müsste mindestens 15 % betragen.

Einsatz des TI30X Plus MathPrint™

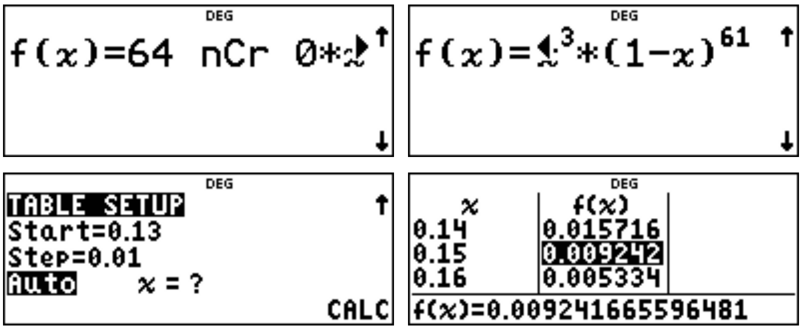
Bestimmen der Intervall-Wahrscheinlichkeit mithilfe der kumulierten Binomialverteilung:



Alternativ könnte man eine Funktion *f* definieren, um P(X ≤ 3) für verschiedene Erfolgswahrscheinlichkeiten *x* zu berechnen, also

$$f(x) = \binom{64}{0} \cdot x^0 \cdot (1-x)^{64} + \binom{64}{1} \cdot x^1 \cdot (1-x)^{63} + \binom{64}{2} \cdot x^2 \cdot (1-x)^{62} + \binom{64}{3} \cdot x^3 \cdot (1-x)^{61}$$

und dann in der Wertetabelle die geeignete Erfolgswahrscheinlichkeit suchen:



Das Unternehmen richtet ein Online-Portal zur Reservierung ein und vermutet, dass dadurch der Anteil der Personen mit Reservierung, die zur jeweiligen Fahrt nicht erscheinen, zunehmen könnte. Als Grundlage für die Entscheidung darüber, ob pro Fahrt künftig mehr als 64 Reservierungen zugelassen werden, soll die Nullhypothese „Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine zufällig ausgewählte Person mit Reservierung nicht zur Fahrt erscheint, beträgt höchstens 10 %." mithilfe einer Stichprobe von 200 Personen mit Reservierung auf einem Signifikanzniveau von 5 % getestet werden. Vor der Durchführung des Tests wird festgelegt, die Anzahl der möglichen Reservierungen pro Fahrt nur dann zu erhöhen, wenn die Nullhypothese aufgrund des Testergebnisses abgelehnt werden müsste.

© 2020 Texas Instruments

Aufgabenstellung Teilaufgabe g)

Ermitteln Sie für den beschriebenen Test die zugehörige Entscheidungsregel.

Anforderungsprofil und vorgeschlagene Punktwertung Teilaufgabe g)

	Erläuterung des Ansatzes zum einseitigen Test	2/5 Punkte
	Bestimmen der Entscheidungsregel	3/5 Punkte

Lösung Teilaufgabe g)

Die Nullhypothese: $p \leq 0{,}10$ soll getestet werden.

Diese Hypothese wird verworfen, wenn in der Stichprobe vom Umfang $n = 200$ zufällig *extrem viele* Personen sind, die trotz Reservierung nicht erscheinen.

Im Falle von $p = 0{,}1$ kann bei $n = 200$ erwartet werden, dass $\mu = 20$ Personen nicht erscheinen. Durch systematisches Probieren findet man:

$P(X \geq 27) = 1 - P(X \leq 26) \approx 1 - 0{,}9328 = 0{,}0672 > 0{,}05$

$P(X \geq 28) = 1 - P(X \leq 27) \approx 1 - 0{,}9566 = 0{,}0434 < 0{,}05$

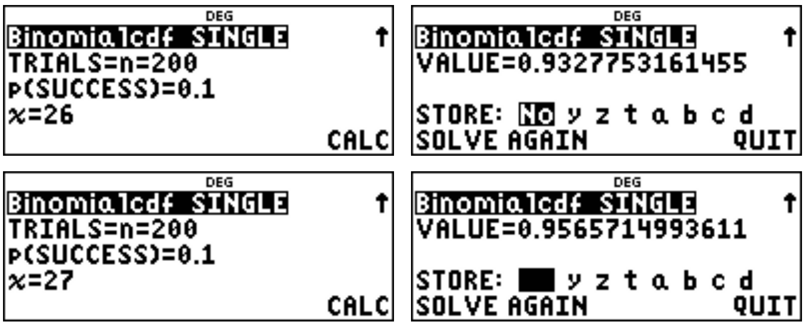
Hinweis: Eigentlich gehört die folgende Überlegung ebenfalls zur Lösung der Aufgabe, aber i. A. wird es nicht beanstandet, wenn diese Überlegung fehlt.

Falls der Anteil der Personen, die nicht zu einer Fahrt erscheinen, sogar kleiner ist als 10 % (also $p < 0{,}1$), dann ist die Wahrscheinlichkeit $P(X \geq 28)$ sogar noch kleiner als 0,0434.

Entscheidungsregel: Wenn in der Stichprobe vom Umfang 200 mindestens 28 nicht zu einer Fahrt erscheinen, dann würde man die Nullhypothese als falsch ansehen und verwerfen, d. h., man würde wegen des zu erwartenden höheren Anteils von nicht erscheinenden Personen (also $p > 0{,}1$) die Anzahl der anzunehmenden Reservierungen heraufsetzen können.

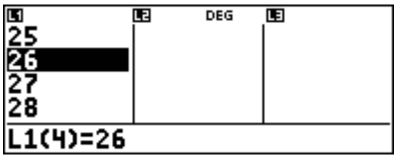
Einsatz des TI30X Plus MathPrint™

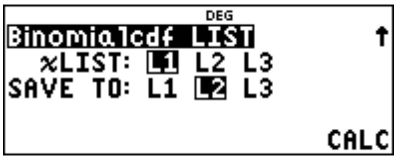
Berechnung der Intervall-Wahrscheinlichkeit mithilfe der kumulierten Binomialverteilung:

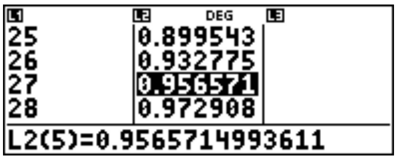


Alternativ kann das systematische Probieren mithilfe der Listenoption der kumulierten Binomialverteilung erfolgen: Zunächst gibt man über das y-Menü infrage kommende Werte für die obere Grenze ein, dann ruft man die kumulierte Binomialverteilung auf.

© 2020 Texas Instruments







Aufgabenstellung Teilaufgabe h)

Entscheiden Sie, ob bei der Wahl der Nullhypothese eher das Interesse, dass weniger Plätze frei bleiben sollen, oder das Interesse, dass nicht mehr Personen mit Reservierung abgewiesen werden müssen, im Vordergrund stand. Begründen Sie Ihre Entscheidung.

Anforderungsprofil und vorgeschlagene Punktwertung Teilaufgabe h)

	Entscheidung über die Wahl der Nullhypothese	1/3 Punkte
	Begründung	2/3 Punkte

Lösung Teilaufgabe h)

Grundsätzlich sind beide Hypothesen denkbar ($p \leq 0{,}1$ bzw. $p > 0{,}1$):

Wenn man die Hypothese $p > 0{,}1$ bestätigt haben möchte, weil man die Vermutung hat, dass der Anteil der nicht erscheinenden Personen beim neuen Reservierungsverfahren größer wird (und man deshalb die maximale Anzahl der Reservierungen heraufsetzen kann), wird man die Hypothese $p \leq 0{,}1$ testen.

Wenn man umgekehrt die Vermutung hat, dass durch das neue Reservierungsverfahren der Anteil der nicht erscheinenden Personen höchstens genauso groß ist wie bisher (und man bei der bisherigen Maximalzahl von Vorabreservierungen beibehalten oder sogar absenken sollte), dann wird man die Hypothese $p > 0{,}1$ testen.

Bei der Wahl von $p \leq 0{,}1$ als Nullhypothese soll die Wahrscheinlichkeit, irrtümlich mehr als 64 Reservierungen zuzulassen, gering gehalten werden. Damit steht das Interesse im Vordergrund, möglichst nicht mehr Personen als bisher abweisen zu müssen, die eigentlich einen Platz reserviert hatten.

Aufgabenstellung Teilaufgabe i)

Beschreiben Sie den Fehler zweiter Art im Sachzusammenhang.

Anforderungsprofil und vorgeschlagene Punktwertung Teilaufgabe i)

	Beschreibung des Fehlers 2. Art	2/2 Punkte

Lösung Teilaufgabe i)

Fehler 2. Art: Eine falsche Hypothese wird nicht als solche erkannt, weil das Stichprobenergebnis zufällig im Annahmebereich der Hypothese liegt, d. h.,

tatsächlich gilt $p > 0{,}1$ (der Anteil der nicht erscheinenden Personen wird größer), aber man belässt es bei der bisherigen Maximalzahl von 64 Vorabreservierungen, obwohl man diese Anzahl erhöhen könnte.

Die Firma müsste dann damit rechnen, dass nicht alle 60 Plätze eingenommen werden und so finanzielle Einbußen entstehen.

© 2020 Texas Instruments

3. Eine komplexe Stochastik-Aufgabe zum Trainieren

Bei einem Würfelspiel hat ein Spieler den Eindruck, dass Augenzahl „1“ sehr oft auftritt, die auf der gegenüberliegenden Würfelfläche stehende „6“ aber nur selten.

Daher vermutet er, dass die Wahrscheinlichkeit, eine „6“ zu werfen, nur 10 % beträgt.

Betrachten Sie zunächst die Zufallsvariable

X: *Anzahl der Sechsen mit der Erfolgswahrscheinlichkeit p = 0,1*

Aufgabenstellung Teilaufgabe a)

(1) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, mit diesem gezinkten Würfel in 120 Würfen genau 12-mal Augenzahl 6 zu werfen.

(2) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass in 120 Würfen mindestens 20-mal Augenzahl 6 auftritt.

(3) Berechnen Sie Erwartungswert μ und Standardabweichung σ für die Zufallsvariable X und bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Anzahl der Sechsen um höchstens 2σ von μ abweicht.

Anforderungsprofil und vorgeschlagene Punktwertung für Teilaufgabe a)

(1)	Einzel-Wahrscheinlichkeit berechnen	2/8 Punkte
(2)	Intervall-Wahrscheinlichkeit berechnen	2/8 Punkte
(3)	Erwartungswert und Standardabweichung berechnen und Intervall-Wahrscheinlichkeit bestimmen	4/8 Punkte

Lösung Teilaufgabe a)

Nach Voraussetzung ist die Zufallsvariable binomialverteilt mit n = 100 und p = 0,1.

(1) $P(X=12)=\binom{120}{12}\cdot 0{,}1^{12}\cdot 0{,}9^{108}\approx 0{,}1205$

(2) $P(X\geq 20)=\sum_{k=20}^{120}\binom{120}{k}\cdot 0{,}1^{k}\cdot 0{,}9^{120-k}=1-P(X\leq 19)=1-\sum_{k=0}^{19}\binom{120}{k}\cdot 0{,}1^{k}\cdot 0{,}9^{120-k}\approx 0{,}0158$

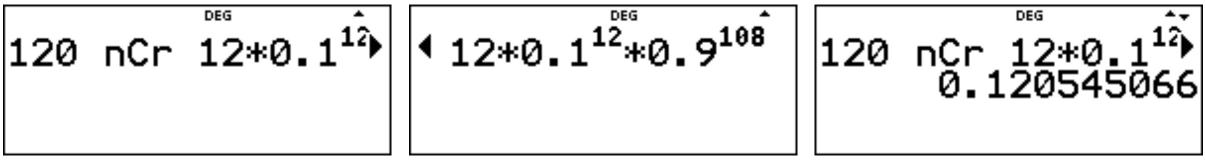
(3) $\mu=120\cdot 0{,}1=12$, $\sigma=\sqrt{120\cdot 0{,}1\cdot 0{,}9}\approx 3{,}286$, $2\sigma\approx 6{,}572$

$$P(12-6{,}572\leq X\leq 12+6{,}572)=P(6\leq X\leq 18)=P(X\leq 18)-P(X\leq 5)$$
$$=\sum_{k=6}^{18}\binom{120}{k}\cdot 0{,}1^{k}\cdot 0{,}9^{120-k}\approx 0{,}9542$$

Einsatz des TI30X Plus MathPrint™

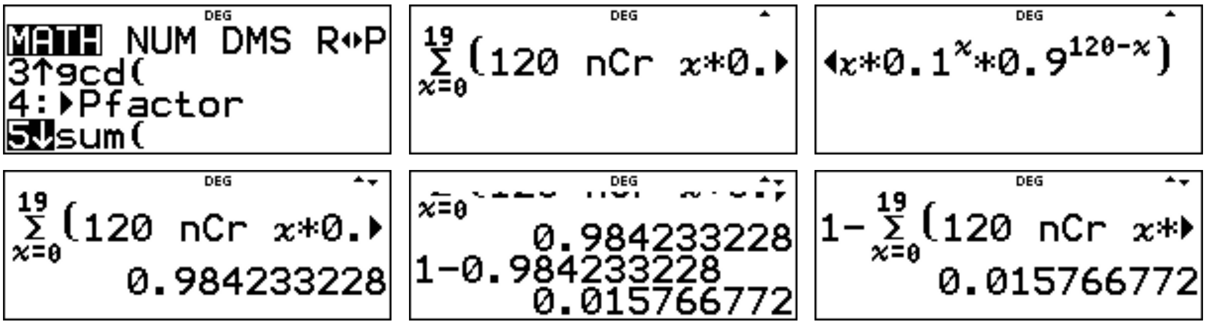
Die Berechnung den Wahrscheinlichkeiten kann mithilfe der Bernoulli-Formel erfolgen (unter Verwendung der Binomialkoeffizienten p und dem Summationsbefehl im t-Menü) oder mithilfe der Optionen im +-Menü.

(1) Berechnen der Einzel-Wahrscheinlichkeit P(X = 12) durch Eingabe des Terms $\binom{120}{12} \cdot 0{,}1^{12} \cdot 0{,}9^{108}$

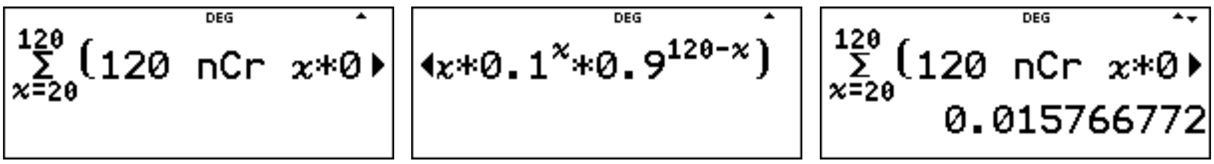


Berechnen der Einzel-Wahrscheinlichkeit durch Eingabe von *n*, *p*, *k*

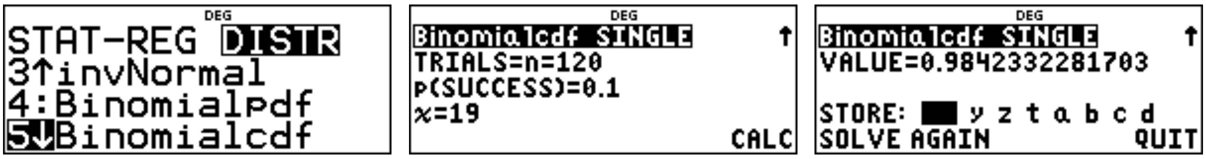
(2) Berechnen der Intervall-Wahrscheinlichkeit P(X ≤ 19) durch Eingabe des Summenterms $\sum_{k=0}^{19} \binom{120}{k} \cdot 0{,}1^{k} \cdot 0{,}9^{120-k}$, anschließend Anwenden der Komplementärregel, oder Berechnung der Wahrscheinlichkeit 1 – P(X ≤ 19)



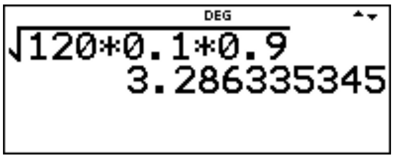
Alternativ: Berechnen der Intervall-Wahrscheinlichkeit P(X ≥ 20) durch Eingabe des Summenterms $\sum_{k=20}^{120} \binom{120}{k} \cdot 0{,}1^{k} \cdot 0{,}9^{120-k}$



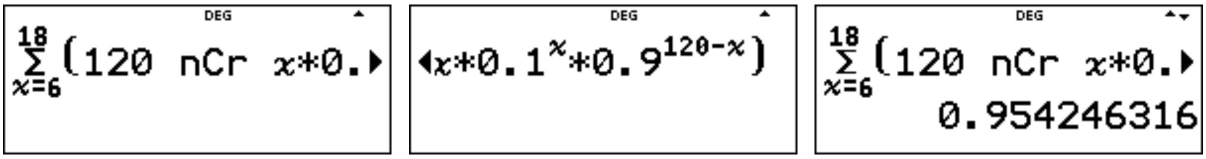
Berechnen der Intervall-Wahrscheinlichkeit P(X ≤ 19) durch Eingabe von *n*, *p*, *k* (anschließend Anwenden der Komplementärregel, vgl. oben)



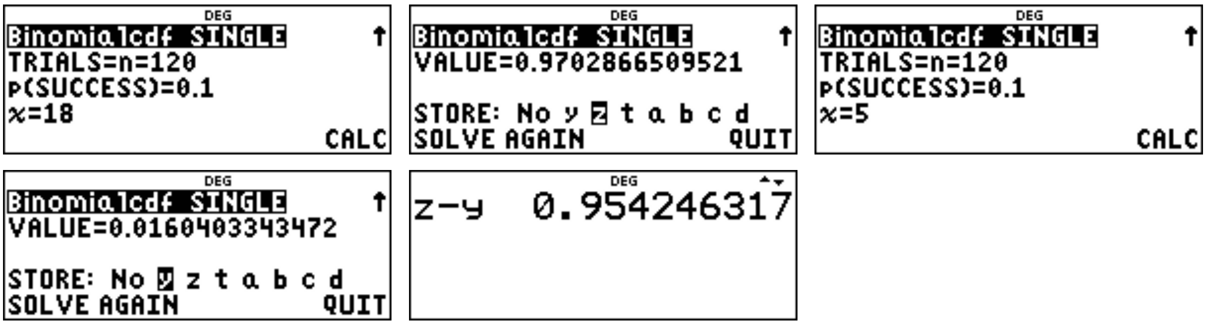
(3) Berechnen der Standardabweichung



Berechnen der Intervall-Wahrscheinlichkeit P(6 ≤ X ≤ 18) mithilfe der BERNOULLI -Formel



Alternativ: Berechnen der kumulierten Wahrscheinlichkeiten P(X ≤ 5) und P(X ≤ 18) und durch Differenzbildung: P(6 ≤ X ≤ 18) = P(X ≤ 18) – P(X ≤ 5)



Aufgabenstellung Teilaufgabe b)

Der Würfel wird mehrfach geworfen.

(1) Wie oft muss der gezinkte Würfel mindestens geworfen werden, sodass die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis *Mindestens einmal Augenzahl 6* mindestens 99 % beträgt.

(2) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass Augenzahl 6 erst beim 6. Wurf fällt.

Anforderungsprofil und vorgeschlagene Punktwertung Teilaufgabe b)

(1)	Lösungsansatz (Ungleichung) erläutern	4/8 Punkte
	Anzahl der Würfe berechnen (Ungleichung auflösen)	2/8 Punkte
(2)	Wahrscheinlichkeit bestimmen	2/8 Punkte

Lösung Teilaufgabe b)

(1) Betrachtete Zufallsvariable X: *Anzahl der Würfe mit Augenzahl 6*; $p = 0{,}1$

Das Ereignis *Mindestens einmal Augenzahl 6 in n Würfen* ($X \geq 1$) ist das Gegenereignis zu *Keinmal Augenzahl 6 in n Würfen* ($X = 0$).

Für dieses Gegenereignis gilt: $P(X = 0) = 0{,}9^n$.

Daher ist nach Komplementärregel: $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0{,}9^n$

Hierfür soll gelten: $P(X \geq 1) \geq 0{,}99$.

Zu lösen ist also die Ungleichung: $1 - 0{,}9^n \geq 0{,}99$, d. h. $0{,}9^n \leq 0{,}01$

Lösung durch Logarithmieren: $n \cdot \log(0{,}9) \leq \log(0{,}01) \Leftrightarrow n \geq \log(0{,}01)/\log(0{,}9) \approx 43{,}7$

Hinweis 1: Das Ungleichheitszeichen in der Ungleichung kehrt sich um, weil beide Seiten durch eine negative Zahl dividiert werden.

Hinweis 2: Es spielt keine Rolle, welche Logarithmus-Funktion für das Logarithmieren der Ungleichung gewählt wird, weil die Quotienten immer gleich sind.

➢ Der gezinkte Würfel muss mindestens 44-mal geworfen werden, damit die Wahrscheinlichkeit für mindestens einmal Augenzahl 6 mindestens 99 % beträgt.

(2) Wenn Augenzahl 6 erst beim 6. Wurf eintritt, bedeutet dies, dass 5-mal eine andere Augenzahl auftritt, bevor die Augenzahl 6 fällt.

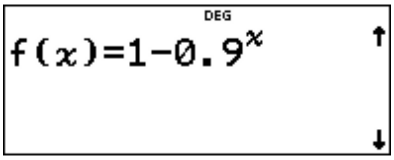
Die Wahrscheinlichkeit hierfür beträgt

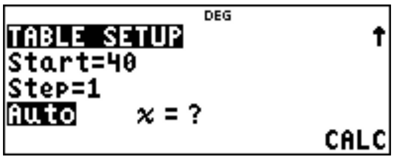
P(*Augenzahl 6 erst beim 6. Wurf*) $= 0{,}9^5 \cdot 0{,}1 = 0{,}059049 \approx 5{,}9$ %.

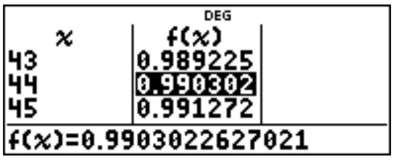
Einsatz des TI30X Plus MathPrint™

(1) Zur Bestimmung der notwendigen Anzahl *n* kann man im a-Menü eine Funktion *f* mit $f(x) = P(X \geq 1) = 1 - 0{,}9^x$ definieren und dann in der Wertetabelle (Schrittweite = 1) nachschauen, wann die Bedingung $P(X \geq 1) \geq 0{,}99$ erfüllt ist. Oder man löst die Ungleichung durch Logarithmieren und Umformung.

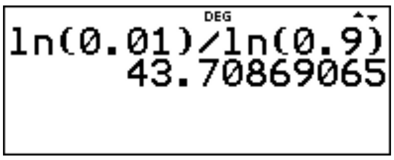
Funktionsterm definieren und in der Wertetabelle suchen



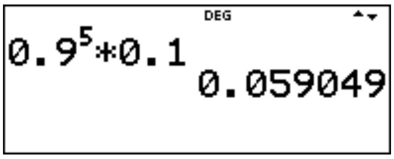




Alternativ: Ungleichung durch Logarithmieren lösen (beliebige Basis)



(2) Zur Lösung dieser Teilaufgabe müssen die Wahrscheinlichkeiten gemäß Pfadmultiplikationsregel multipliziert werden.



Aufgabenstellung Teilaufgabe c)

Durch eine Versuchsreihe von 300 Würfen soll überprüft werden, ob die Wahrscheinlichkeit für Augenzahl 6 tatsächlich kleiner ist als 1/6.

(1) Erläutern Sie, welche gegensätzlichen einseitigen Hypothesen in der Sachsituation betrachtet werden und welche der beiden möglichen Hypothesen getestet werden soll. Bestimmen Sie eine Entscheidungsregel zu diesem Test für $\alpha \leq 0{,}05$.

(2) Beschreiben Sie die Auswirkungen eines Fehlers 1. und 2. Art in der Sachsituation.

(3) Erläutern Sie, welche Entscheidung gefällt wird, wenn in der Versuchsreihe 41-mal Augenzahl 6 auftritt.

(4) Angenommen, die Wahrscheinlichkeit für Augenzahl 6 beträgt tatsächlich nur $p = 0{,}1$. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 2. Art.

Anforderungsprofil und vorgeschlagene Punktwertung Teilaufgabe c)

(1)	Angabe der beiden Hypothesen	2/14 Punkte
	Bestimmen der Entscheidungsregel	4/14 Punkte
(2)	Beschreibung des Fehlers 1. und 2. Art im Sachzusammenhang	3/14 Punkte
(3)	Erläuterung der Entscheidung	2/14 Punkte
(4)	Berechnung der Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 2. Art	3/14 Punkte

Lösung Teilaufgabe c)

(1) Wenn man die Vermutung $p < 1/6$ „statistisch beweisen" möchte, muss man zeigen, dass das Versuchsergebnis nicht verträglich ist mit der gegenteiligen Hypothese $p \geq 1/6$.

Betrachtet werden also die beiden Hypothesen H_1: $p < 1/6$ und H_0: $p \geq 1/6$ sowie die Zufallsvariable X: *Anzahl der Sechsen in 300 Würfen*.

Für $p = \frac{1}{6}$ ist $\mu = 300 \cdot \frac{1}{6} = 50$ und $\sigma = \sqrt{300 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}} \approx 6{,}455 > 3$

Da die LAPLACE-Bedingung erfüllt ist, kann eine Entscheidungsregel mithilfe der Sigma-Regeln aufgestellt werden; dabei gilt: $P(X \leq \mu - 1{,}64\sigma) \approx 0{,}05$

Für $p = \frac{1}{6}$ ist $\mu - 1{,}64\sigma \approx 39{,}4$.

Kontrollrechnung zur Sigma-Regel:

Für $p = \frac{1}{6}$ ist $P(X \leq 39) \approx 0{,}0486 < 0{,}05$ und $P(X \leq 40) \approx 0{,}0675 > 0{,}05$.

Für $p > \frac{1}{6}$ gilt erst recht: $P(X \leq 39) < 0{,}05$.

Zu $\alpha \leq 0{,}05$ gehört der *kritische Wert k* = 39,5 und es ergeben sich

Annahmebereich A = {40, 41, 42, …, 300} und *Verwerfungsbereich* V = {0, 1, …, 38, 39}.

- *Entscheidungsregel*: Verwirf die Hypothese H_0: $p \geq 1/6$, falls bei 300 Würfen weniger als 40-mal Augenzahl 6 fällt.

(2) Ein Fehler 1. Art liegt vor, wenn das Versuchsergebnis im Verwerfungsbereich liegt, obwohl die Hypothese richtig ist. Im Sachzusammenhang bedeutet dies, dass für den Würfel gilt, dass $p \geq 1/6$, aber zufällig treten weniger als 40 Sechsen in 300 Würfen auf. Der Würfel würde also als gezinkt angesehen, obwohl er es nicht ist.

Ein Fehler 2. Art liegt vor, wenn das Versuchsergebnis im Annahmebereich liegt, obwohl die Hypothese falsch ist. Im Sachzusammenhang bedeutet dies, dass für den Würfel gilt, dass $p < 1/6$, aber zufällig fällt in 300 Würfen mindestens 40-mal Augenzahl 6. Man hätte also keinen Anlass daran zu zweifeln, dass der Würfel in Ordnung ist, obwohl er tatsächlich gezinkt ist.

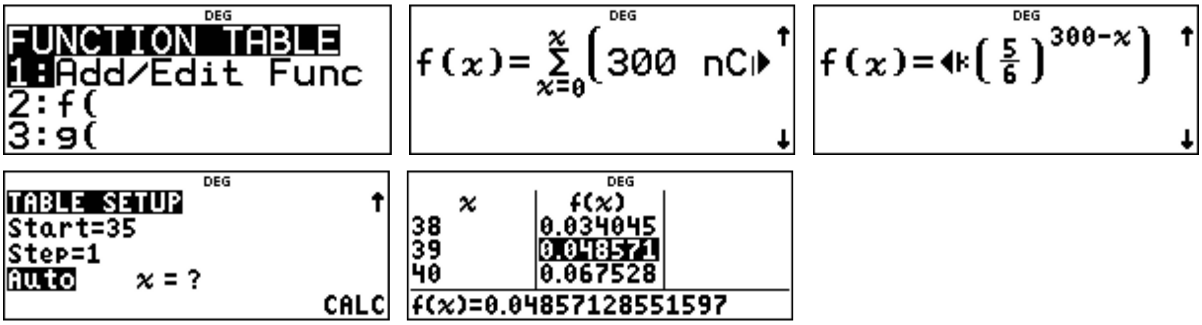
(3) Da das Ergebnis 41-mal Augenzahl 6 im Annahmebereich der Hypothese $p \geq 1/6$ liegt, hat man keinen Anlass, an der Richtigkeit der Hypothese zu zweifeln und geht davon aus, dass der Würfel in Ordnung ist.

(4) Zu bestimmen ist die Wahrscheinlichkeit für den Annahmebereich unter der Voraussetzung, dass dem Versuch p = 0,1 zugrunde liegt:

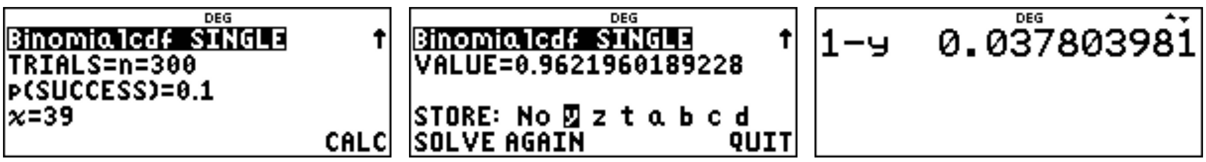
$$P_{p\,=\,0{,}1}(X \geq 40) = 1 - P(X \leq 39) \approx 0{,}038$$

Einsatz des TI30X Plus MathPrint™

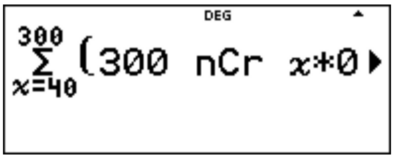
(1) Mithilfe des Rechners kann der kritische Wert auch ohne Sigma-Regeln bestimmt werden. Dazu definiert man eine Funktion f gemäß der BERNOULLI-Formel mit variablem *x*-Wert, bis zu dem die Wahrscheinlichkeiten summiert werden sollen.
Bei *x* = 40 wird die vorgegebene 5 %-Schranke überschritten, d. h., der kritische Wert liegt zwischen 39 und 40.

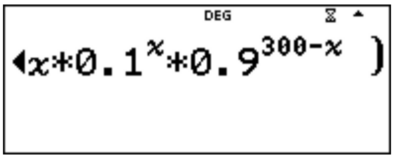


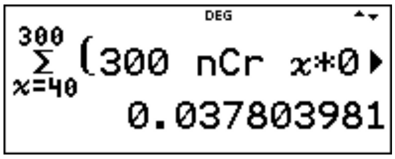
(4) Die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 2. Art kann mithilfe der kumulierten Binomialverteilung bestimmt werden, anschließend Anwendung der Komplementärregel.



Alternativ ist eine Berechnung durch Summation mithilfe der BERNOULLI-Formel möglich:







Aufgabenstellung Teilaufgabe d)

Zwei Spieler führen ein Glücksspiel mit einem LAPLACE-Würfel durch. Der Würfel wird dreimal geworfen. Was bei den drei Runden des Spiels als *Erfolg* angesehen wird, muss weiter unten geklärt werden.

Wenn 3-mal Erfolg eintritt, zahlt Spieler B an Spieler A 10 Münzen. Bei zwei Erfolgen zahlt Spieler B an Spieler A 3 Münzen; bei einem Erfolg zahlt Spieler A an Spieler B 1 Münze und wenn kein Erfolg eintritt, zahlt Spieler A an Spieler B 2 Münzen.

(1) Stellen Sie ein Term für den Erwartungswert des Betrags auf, den Spieler A erhält oder zahlen muss.

(2) Zeigen Sie, dass für die Erfolgswahrscheinlichkeit p gelten muss, dass $p = 1/3$ ist, damit dies eine faire Spielregel ist.

(3) Geben Sie eine mögliche faire Spielregel an.

Anforderungsprofil und vorgeschlagene Punktwertung Teilaufgabe d)

(1)	Bestimmen der Wahrscheinlichkeitsverteilung	3/10 Punkte
	Bestimmen eines Terms für den Erwartungswert	3/10 Punkte
(2)	Nachweis für $p = 1/3$	3/10 Punkte
(3)	Beispiel einer fairen Spielregel	1/10 Punkte

Lösung Teilaufgabe d)

(1) Für die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsvariable X: *Anzahl der Erfolge bei einem 3-stufigen BERNOULLI-Versuch mit Erfolgswahrscheinlichkeit p* gilt:

$X = k$	$P(X = k)$
0	$1 \cdot p^3$
1	$3 \cdot p^2 \cdot (1 - p)$
2	$3 \cdot p \cdot (1 - p)^2$
3	$1 \cdot (1 - p)^3$

Daher ergibt sich aus der Auszahlungsregel der Aufgabenstellung für den Erwartungswert der Zufallsvariablen Y: *Auszahlung aus der Sicht des Spielers A*

$X = k$	$Y = a$	$P(Y = a)$	$a \cdot P(Y = a)$
0	10	$1 \cdot p^3$	$10 \cdot p^3$
1	3	$3 \cdot p^2 \cdot (1 - p)$	$9 \cdot p^2 \cdot (1 - p)$
2	– 1	$3 \cdot p \cdot (1 - p)^2$	$-3 \cdot p \cdot (1 - p)^2$
3	– 2	$1 \cdot (1 - p)^3$	$-2 \cdot (1 - p)^3$

also: E(Y) = $10 \cdot p^3 + 9 \cdot p^2 \cdot (1 - p) - 3 \cdot p \cdot (1 - p)^2 - 2 \cdot (1 - p)^3$

(2) Zu zeigen ist, dass sich für $p = 1/3$, also $1 - p = 2/3$ ergibt, dass E(Y) = 0.

$$E(Y) = 10 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 + 9 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^1 - 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^1 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 - 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{10}{27} + \frac{18}{27} - \frac{12}{27} - \frac{16}{27} = 0$$

(3) Ein Beispiel für eine solche faire Spielregel wäre: Ein Erfolg liegt vor, wenn der Würfel Augenzahl 5 oder 6 zeigt.

Einsatz des TI30X Plus MathPrint™

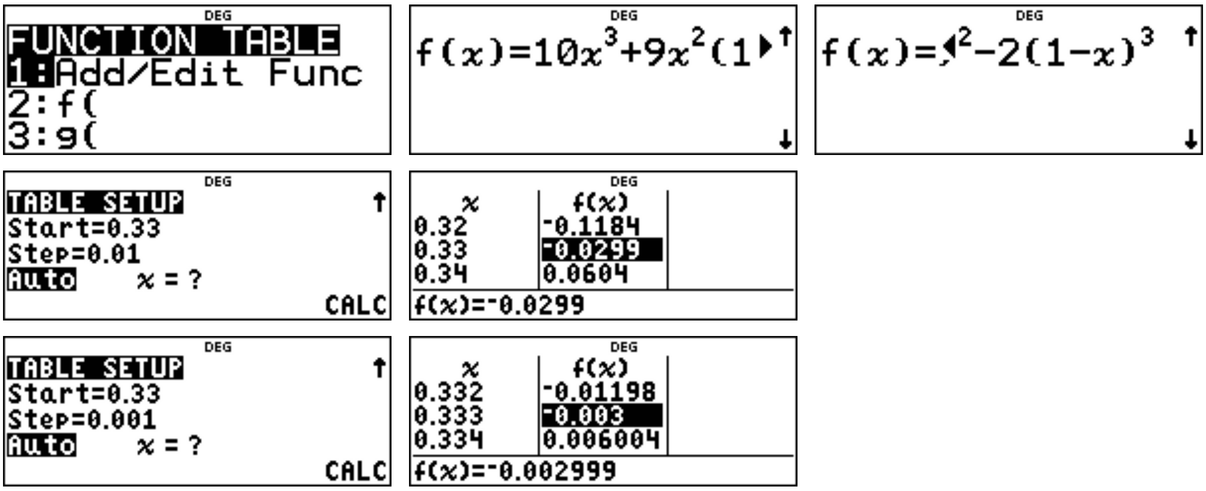
Der Taschenrechner kann bei der Lösung der Aufgabe nur bei der Berechnung von E(Y) verwendet werden. Allerdings wäre ein TR *notwendig*, wenn in der Aufgabenstellung (2) nicht $p = 1/3$ vorgegeben wäre, sondern wenn die Frage wie folgt gestellt würde:

(2) Für welche Erfolgswahrscheinlichkeit p ist die o. a. Spielregel eine faire Spielregel?

Dann muss eine Funktion f mit der Variablen x definiert werden, mit deren Hilfe man die zu erwartende Auszahlung f(x) berechnet:

$f(x) = 10 \cdot x^3 + 9 \cdot x^2 \cdot (1 - x) - 3 \cdot x \cdot (1 - x)^2 - 2 \cdot (1 - x)^3$

Mithilfe der Wertetabelle findet man heraus, dass die Nullstelle der Funktion bei $p \approx 1/3$ liegt.



Leistungsfähige Emulator-Software

Die TI-SmartView™ Emulator-Software für TI-MathPrint™ unterstützt die Visualisierung im Unterricht, z.B. in Kombination mit einem interaktiven Whiteboard.
Probieren Sie es aus. Die kostenlose Test-Version finden Sie auf den TI Web-seiten, Rubrik „Downloads“.

Praxisorientierte Unterrichtsmaterialien

Nützliche Aufgabenbeispiele für Ihren mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterricht, kostenlose Downloads und Hinweise auf Verlagspublikationen finden Sie auf der TI Materialdatenbank, auch ganz speziell zum TI-30X Plus MathPrint™.

Schauen Sie mal rein:
TI Materialdatenbank: www.ti-unterrichtsmaterialien.net

» Nutzen Sie unsere Kennenlernangebote speziell für Lehrkräfte und Schulen auf den TI Webseiten, Rubrik „Alles für die Schule“.

» Ausführliche Produkt- und Serviceinformationen sowie Bezugsquellen finden Sie auf unseren TI Webseiten.

» Die TI Schulberater unterstützen Sie gerne bei allen Fragen rund um den Einsatz von TI Rechnern im Unterricht: schulberater-team@ti.com

Abonnieren Sie unseren Newsletter!

You Tube
www.youtube.com/TIedtechDE

© 2020 Texas Instruments

Haben Sie Fragen zu Produkten von Texas Instruments? Oder sind Sie an weiteren Unterrichtsmaterialien oder einer Lehrerfortbildung interessiert?
Gerne steht Ihnen auch unser Customer Service Center mit Rat und Tat zu Seite. Nehmen Sie mit uns Kontakt auf:

Customer Service Center
TEXAS INSTRUMENTS
education.ti.com/csc

education.ti.com/deutschland
education.ti.com/oesterreich
education.ti.com/schweiz

Weitere Materialien finden Sie unter:
www.ti-unterrichtsmaterialien.net