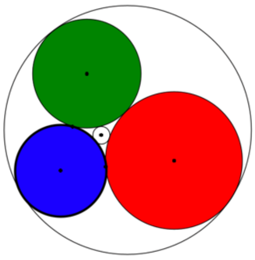
Hubert Langlotz
Wilfried Zappe

Vier-Kreise-Satz von René Descartes – weitere Beispiele

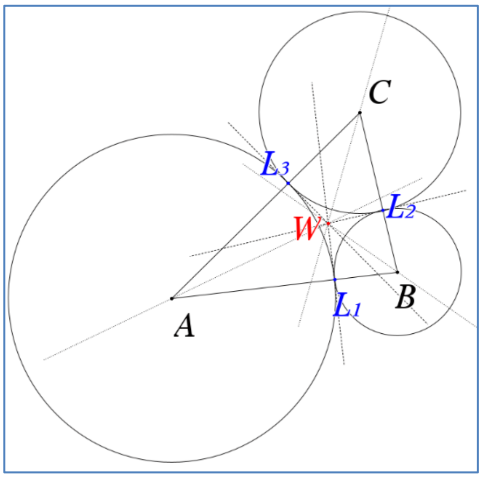


Von Descartes stammt der sogenannte Vier-Kreise-Satz:
Zu drei sich gegenseitig berührenden Kreisen mit den Radien r_1, r_2 und r_3 findet man immer zwei Kreise, die diese drei Kreise einmal von innen und einmal von außen berühren.

DESCARTES entdeckte den Zusammenhang:

$2\,(k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + k_4^2) = (k_1 + k_2 + k_3 + k_4)^2$, wobei $k_i = +1/r_i$ die Krümmung der Kreise angibt (negatives Vorzeichen für k_4, wenn der vierte Kreis die anderen drei von außen berührt). Um r_4 zu bestimmen, genügt es, die oben angegebene quadratische Gleichung nach der Variable k_4 zu lösen.

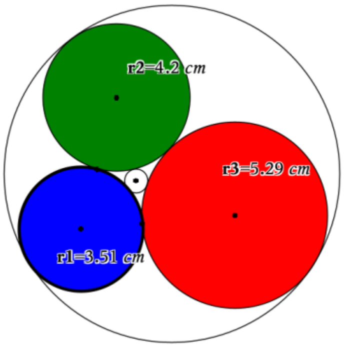
Um dieses Problem mit dem TI-Nspire nachvollziehen zu können, wird das Problem in Teilprobleme aufgeteilt:



1. Gesucht sind drei Kreise, die sich gegenseitig berühren und deren Größe frei veränderbar sein soll.
   Man konstruiert ein Dreieck ABC, dessen Eckpunkte die Mittelpunkte der drei Kreise sind.
   Dazu konstruiert man den Schnittpunkt W der Winkelhalbierenden (Inkreismittelpunkt) und fällt von diesem Punkt die Lote auf die Seiten, die entstehenden Schnittpunkte L_1, L_2, L_3 liefern mit den Eckpunkten A, B und C als Mittelpunkte die Radien $\overline{AL_1} = r_1$, $\overline{BL_2} = r_2$, und $\overline{ACL_3} = r_3$.

2. Die Radien der „4. Kreise“ (der Radius des inneren Kreises wird im Weiteren mit r_4 und der des äußeren Kreises mit r_5 bezeichnet) werden nach der Descartes-Formel berechnet.
   Hierzu nutzt man die App *Notes* und verknüpft dort die im Geometriefenster berechneten Werte für die drei gegebenen Kreise und berechnet die beiden Werte für die gesuchten Kreise.

Hubert Langlotz
Wilfried Zappe



r1 ▸ 3.51112

r2 ▸ 4.19553

r3 ▸ 5.29083

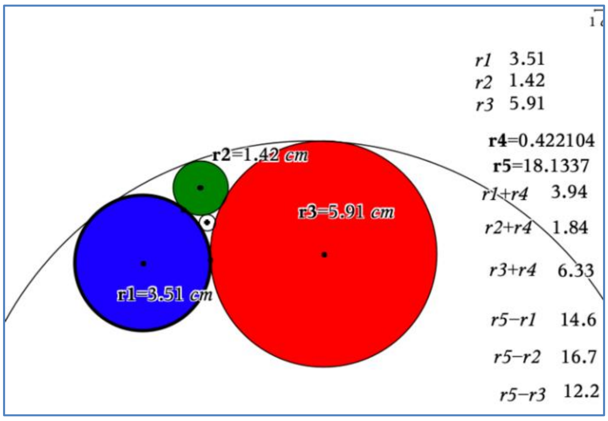
$$\mathbf{rr4}:=\text{zeros}\left(2\cdot\left(\left(\frac{1}{\mathbf{r1}}\right)^2+\left(\frac{1}{\mathbf{r2}}\right)^2+\left(\frac{1}{\mathbf{r3}}\right)^2+\left(\frac{1}{\mathbf{r4}}\right)^2\right)-\left(\frac{1}{\mathbf{r1}}+\frac{1}{\mathbf{r2}}+\frac{1}{\mathbf{r3}}+\frac{1}{\mathbf{r4}}\right)^2,\mathbf{r4}\right)$$

▸ $\{-9.56289,0.654065\}$

rr4 ▸ $\{-9.56289,0.654065\}$

r4:=**rr4**[2] ▸ 0.654065

r5:=|**rr4**[1]| ▸ 9.56289



3. Den Mittelpunkt des inneren Kreises findet man als Schnittpunkt der Kreise mit den Radien $r_1 + r_4$, $r_2 + r_4$ und $r_3 + r_4$ um die Eckpunkte A, B und C.

4. Den Mittelpunkt des äußeren Kreises findet man als Schnittpunkt der Kreise mit den Radien $r_5 - r_1$, $r_5 - r_2$ und $r_5 - r_3$ um die Eckpunkte A, B und C. Die entsprechenden Werte werden dynamisch im Geometriefenster berechnet. Nun kann man beliebig große Kreise erzeugen und die Exaktheit der Konstruktion beobachten.

Möchte man die Radien der drei Kreise vorab festlegen, so kann man diese wieder in einem Notes-Fenster festlegen.

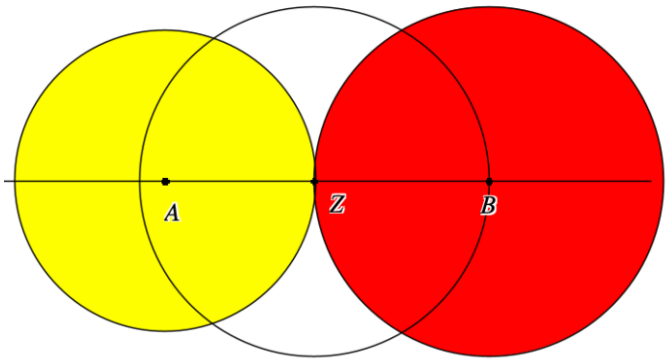
Vorgabe der Radien der drei Kreise

r1:=6 ▸ 6

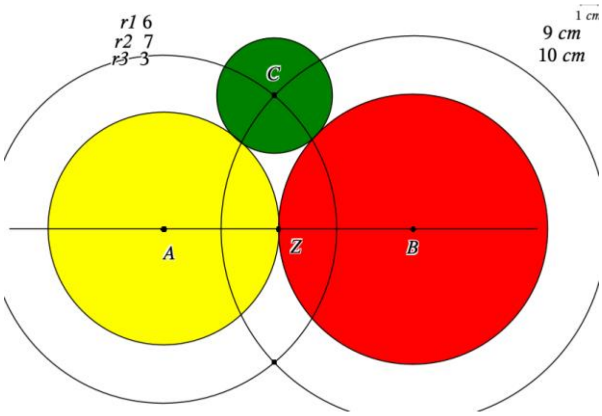
r2:=7 ▸ 7

r3:=4 ▸ 4

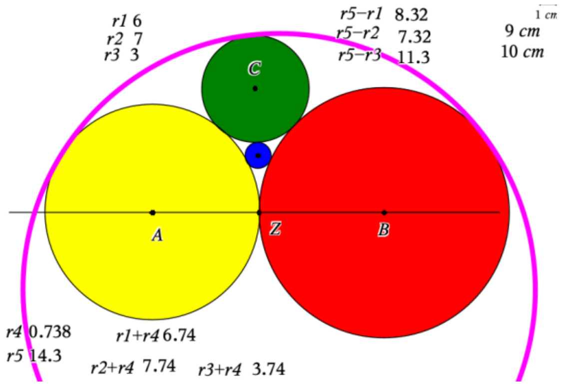
Zuerst konstruiert man z. B. die beiden sich berührenden Kreise mit den Radien r1 und r2, was sich einfach erledigen lässt. Der Screenshot ist selbsterklärend.



Anschließend konstruiert man um A einen Kreis mit dem Radius r1 + r3 und um B einen Kreis mit dem Radius r2 + r3. Einer der beiden Schnittpunkte dieser Kreise liefert den Mittelpunkt für den dritten Kreis mit dem Radius r3.

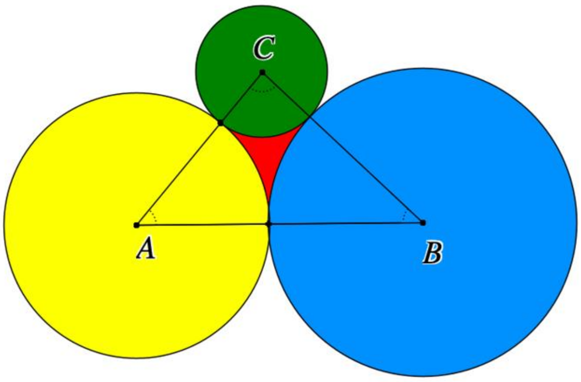


Die weitere Konstruktion entspricht der oben dargestellten Lösung.



Mögliche Anschlussaufgabe:

Das Dreieck ABC hat die Seitenlängen 13 cm, 10 cm und 9 cm. Drei Kreise, deren Mittelpunkte jeweils in den Eckpunkten des Dreiecks liegen, berühren sich.



a) Führe die dargestellte Konstruktion aus.

b) Bestimme die Fläche des rot markierten Bereichs mittels der Berechnungsmöglichkeiten, die das MMS bietet.

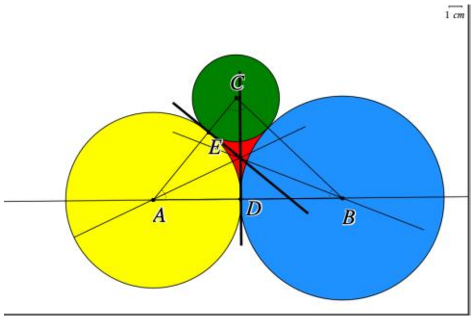
c) Überprüfe das in b) ermittelte Ergebnis mittels algebraischer Methoden.

Hubert Langlotz
Wilfried Zappe

Lösung:

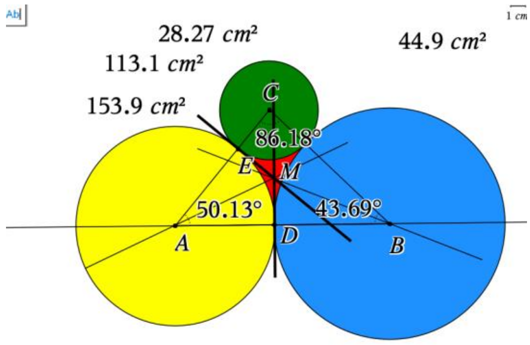
a)

Man konstruiert den Schnittpunkt der Winkelhalbierenden und hat damit den Mittelpunkt des Inkreises M ermittelt. Der Inkreis berührt an den Punkten D die Seite $\overline{AB}$ und E die Seite $\overline{AC}$. Diese Berührpunkte liefern die Radien für die drei Kreise.



b)

Die gesuchte rote Fläche ergibt sich aus der Differenz der Dreiecksfläche und den Flächen der jeweiligen Kreisausschnitte. Man benötigt zur Berechnung die Flächen des Dreiecks, der drei Kreise und die entsprechenden Winkel der Kreisausschnitte.



Es ergibt sich ein Flächeninhalt von ca. 3,7 cm².

$$44.9-\frac{153.9\cdot 43.69}{360}-\frac{113.1\cdot 50.13}{360}-\frac{28.27\cdot 86.18}{360} \qquad 3.70583$$

c)

Mit der Konstruktionsidee ist die algebraische Berechnung einfach nachvollziehbar.

Man berechnet z. B. den Winkel α mit dem Kosinussatz und erhält $\alpha \approx 50{,}1$ °.

Da das Dreieck AMD rechtwinklig ist, ergibt sich für die Länge der Strecke $\overline{AD} \approx 6\ cm$ und damit für die übrigen Strecken 7 cm und 3 cm.

$$\text{solve}\left(10^2=9^2+13^2-2\cdot 9\cdot 13\cdot \cos(x),x\right)|0\le x\le 180 \qquad x=50.1317$$

$$\text{solve}\left(\cos\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{y}{6.63},y\right)|x=50.131658449989 \qquad y=6.0056$$

$$13-y|y=6.0055973891027 \qquad 6.9944$$

$$9-y|y=6.0055973891027 \qquad 2.9944$$

Für die Winkel der zwei weiteren Kreisausschnitte erhält man 43,7° und 86,2°

$$\text{solve}\left(9^2=10^2+13^2-2\cdot 10\cdot 13\cdot \cos(x),x\right)|0\le x\le 180 \qquad x=43.6909$$

$$180-(50.1317+43.6909) \qquad 86.1774$$

© Innenradien 50,1°, 43,7° und 86,2°

Der Flächeninhalt des Dreiecks wird z. B. mit der Formel A = $\frac{1}{2} a\cdot b\cdot \sin(\gamma)$ zu A ≈ $44{,}9 cm^2$ berechnet.

$$\frac{1}{2}\cdot 9\cdot 10\cdot \sin(86.2) \qquad 44.9011$$

Die einzelnen Flächen der Kreisausschnitte werden mit der Formel A = $\frac{\pi\cdot r^2\cdot\alpha}{360°}$ ermittelt und vom Flächeninhalt des Dreiecks abgezogen.

Das Ergebnis stimmt mit dem aus der geometrischen Herleitung überein.

$$44.901066073142-\left(\frac{\pi\cdot 6^2\cdot 50.1}{360}+\frac{\pi\cdot 7^2\cdot 43.7}{360}+\frac{\pi\cdot 3^2\cdot 86.2}{360}\right) \qquad 3.70519$$

Hinweis: Von den beiden Autoren gibt es einen weiteren Artikel zu dem Thema. „Wenn Descartes einen TI-Nspire gehabt hätte …“ behandelt den Vier-Kreise-Satz grundlegend und in Beispielen.

https://ti-unterrichtsmaterialien.net/materialien?resource_id
=3549&cHash=6c20341269622b0b6f1adacb760acd2a

Autoren:
Dr. Hubert Langlotz
Dr. Wilfried Zappe