Der Weihnachtsmann verteilt Apfelsinen

Der Weihnachtsmann hat Apfelsinen im Korb[1]. Er begegnet drei Kindern. Dem ersten Kind gibt er die Hälfte der Apfelsinen und noch eine dazu. Von den restlichen Apfelsinen gibt er dem zweiten Kind die Hälfte und noch eine dazu. Auch das dritte Kind erhält von den verbliebenen Apfelsinen die Hälfte und noch eine dazu. Am Schluss hatte er noch eine Apfelsine im Korb.
Wie viele Apfelsinen hatte der Weihnachtsmann zu Beginn in seinem Korb?

Lösung 1:
Durch „Rückwärtsarbeiten" ergibt sich folgender Lösungsweg.

	verschenkte Apfelsinen	im Korb bleibender Rest
Start mit x_3 (x_n)		
1. Kind	$\frac{x_3}{2}+1$	$x_3-(\frac{x_3}{2}+1)=\frac{x_3}{2}-1=x_2$
2. Kind	$\frac{x_2}{2}+1$	$x_2-(\frac{x_2}{2}+1)=\frac{x_2}{2}-1=x_1$
3. Kind	$\frac{x_1}{2}+1$	$x_1-(\frac{x_1}{2}+1)=\frac{x_1}{2}-1=x_0=\mathbf{1}$

Nun kann man hinten anfangen zu rechnen:

$\frac{x_1}{2}-1=x_0=\mathbf{1}$ → $x_1=2\cdot(x_0+1)$ → $x_1=\mathbf{4}$

$\frac{x_2}{2}-1=\mathbf{4}$ → $x_2=2\cdot(x_1+1)$ → $x_2=\mathbf{10}$

$\frac{x_3}{2}-1=\mathbf{10}$ → $x_3=2\cdot(x_2+1)$ → $x_3=\mathbf{22}$

Der Weihnachtsmann hatte 22 Apfelsinen im Korb.

Das erste Kind erhielt $\frac{22}{2}+1=12$ Apfelsinen, es bleiben 10 Stück.

Das zweite Kind bekommt $\frac{10}{2}+1=6$ Apfelsinen, es bleiben 4 Früchte.

Das dritte Kind empfängt $\frac{4}{2}+1=3$ Apfelsinen, es bleibt eine Apfelsine übrig.

Probe: 12 + 6 + 3 +1 = 22

Aus diesem rekursiven Vorgehen kann man auch auf eine explizite Bildungsvorschrift schließen.

[1] Eine ähnliche Aufgabe wurde Anfang des Jahres 2008 („Jahr der Mathematik") von der Zeitung „Freies Wort" als Wettbewerbsaufgabe veröffentlicht.

$x_3 = 2 \cdot x_2 + 2 = 4 \cdot x_1 + 4 + 2 = 8 \cdot x_0 + 8 + 4 + 2$

Mit $x_0 = 1$ erhalten wir $x_3 = 22$.

Allgemein ergibt sich unter Verwendung der Summenformel $\sum_{k=1}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 2$

$x_n = x_0 \cdot 2^n + 2^{n+1} - 2 = 2^n \cdot (x_0 + 2) - 2$

Beweis durch vollständige Induktion:

Anfang: n = 0

$x_0 = 2^0 \cdot (x_0 + 2) - 2 = x_0$

Schluss von n auf n + 1:

$x_{n+1} = (x_n + 1) \cdot 2 = (2^n \cdot (x_0 + 2) - 2 + 1) \cdot 2 = 2^{n+1} \cdot (x_0 + 2) - 2$

Lösung 2:
Wir ermitteln die Lösung durch „Vorwärtsarbeiten“.

	verschenkte Apfelsinen	im Korb bleibender Rest
Start mit x		
1. Kind	$\frac{x}{2} + 1$	$x - (\frac{x}{2} + 1) = \frac{x}{2} - 1 = y$
2. Kind	$\frac{y}{2} + 1$	$\frac{y}{2} - 1 = \frac{\frac{x}{2} - 1}{2} - 1 = \frac{x}{4} - \frac{3}{2} = z$
3. Kind	$\frac{z}{2} + 1$	$\frac{z}{2} - 1 = \frac{\frac{x}{4} - \frac{3}{2}}{2} - 1 = \frac{x}{8} - \frac{7}{4} = 1$

Löst man die letzte Gleichung $\frac{x}{8} - \frac{7}{4} = 1$, so erhält man wieder x = 22.

Auch hier bietet sich eine Verallgemeinerung an. Das Nacheinandereinsetzen von $\frac{x}{2} - 1 = \frac{1}{2} \cdot (x - 2)$ ergibt folgende Strukturen für die im Korb verbleibende Apfelsinenanzahlen:

1. Schritt: $\frac{1}{2} \cdot (x - 2)$
2. Schritt: $\frac{1}{2} \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot (x - 2) - 2\right] = \frac{1}{4} x - 1$
3. Schritt: $\frac{1}{2} \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot (x - 2) - 2\right] - 2\right] = \frac{1}{8} x - \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - 1$

Das legt folgende Vermutung nahe:

n-ter Schritt: $\frac{1}{2^n} \cdot x - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} = \frac{1}{2^n} \cdot x - 2 \cdot \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$

Ein Test für x = 22 und n ∈ {0,1, 2, 3} bringt die bekannten Ergebnisse:

$reste(x,n):=\frac{1}{2^n}\cdot x-2\cdot\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$	*Fertig*
$reste(22,0)$	22
$reste(22,1)$	10
$reste(22,2)$	4
$reste(22,3)$	1

Die Formel $r=\frac{1}{2^n}\cdot x-2\cdot\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$ umgestellt nach x ergibt

$x=r\cdot 2^n+2\cdot\left(2^n-1\right)$. Sie stimmt überein mit dem im Lösungsweg 1 gefundenen Term und führt zu denselben Resultaten. Auf einen Beweis können wir deshalb hier verzichten, weil ein Beweis in der Lösung 1 geführt wurde.

$reste(x,n):=\frac{1}{2^n}\cdot x-2\cdot\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$	*Fertig*
$\text{solve}(reste(x,n)=r,x)$	$x=2^n\cdot r+2\cdot\left(2^n-1\right)$
$x=2^n\cdot r+2\cdot\left(2^n-1\right)\mid n=3 \text{ and } r=1$	$x=22$

Martin Kesting
Wilfried Zappe

Lösung 3:
Die Methode des Rückwärtsarbeitens (Lösung 1) legt auch die Verwendung einer Tabellenkalkulation nahe.
Hier ist noch einmal zum besseren Lesen die dort entwickelte Übersicht dargestellt:

$\frac{x_1}{2}-1=x_0=1$	→	$x_1=2\cdot(x_0+1)$	→	$x_1=4$
$\frac{x_2}{2}-1=4$	→	$x_2=2\cdot(x_1+1)$	→	$x_2=10$
$\frac{x_3}{2}-1=10$	→	$x_3=2\cdot(x_2+1)$	→	$x_3=22$

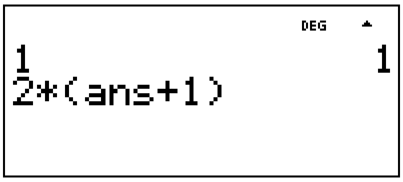
	A schritt	B rest	C menge	D
◆				
1	0	1	_	
2	1	4	3	
3	2	10	6	
4	3	22	12	
5				

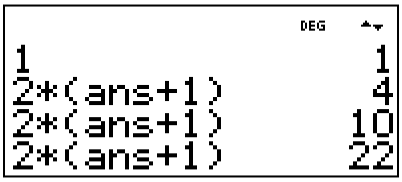
B2 =2·(b1+1)

Gestartet wird in Zelle B1 mit der nach allen Schenkungsaktionen übrig gebliebenen Anzahl von Apfelsinen. In der Zelle B2 wird die Formel **= 2·(B1 + 1)** und in die Zelle C2 die Formel **= B2 – B1** eingegeben. Beide Formeln werden durch „nach unten ausfüllen“ als relative Zellbezüge in die darunter stehenden Zellen kopiert.

So erhalten wir in der Spalte B die „Reste“ übrig gebliebener Apfelsinen und in der Spalte C die Menge an Apfelsinen, die die Kinder erhalten haben, beides allerdings von hinten an gezählt. In der letzten Zelle der Spalte B (hier B4) steht dann die Anzahl der zu Beginn vorhandenen Apfelsinen.

Anstelle der Tabellenkalkulation kann man für das Erzeugen der Werte der Spalte B auch die ANS-Taste (soweit vorhanden) eines Taschenrechner nutzen.





Lösung 4:
Die Methode des Vorwärtsarbeitens ist Inspiration für die Verwendung n-fach verketteter Funktionen.
Die Funktion $f(x) = x - (\frac{x}{2} + 1)$ beschreibt die nach jedem Schritt vorhandene Anzahl an Apfelsinen in Abhängigkeit von der Anzahl x der vorher vorhandenen Apfelsinen. Nach dreimaliger Anwendung (Verkettung) dieser Funktion f bleibt noch eine Apfelsine übrig. Daraus lässt sich auf die Anzahl x der ursprünglich vorhandenen Apfelsinen schließen, in dem diese dreifach verkettete Funktion mit einem CAS nach x aufgelöst wird.

$f(x) := x - \left(\frac{x}{2} + 1\right)$	*Fertig*
$\text{solve}(f(f(f(x))) = 1, x)$	$x = 22$

Autoren:
Martin Kesting
Dr. Wilfried Zappe