Wie lang ist der kürzeste Weg?

Hemmes mathematische Rätsel: Wie lang ist der kürzeste Weg? - Spektrum der Wissenschaft

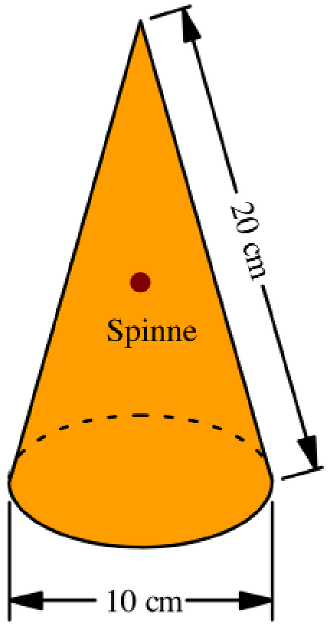
„Auf einem Kegel, dessen kreisförmige Grundfläche einen Durchmesser d von 10 Zentimeter und dessen Flanke eine Länge s von 20 Zentimeter hat, sitzt auf halber Länge der Flanke eine Spinne. Sie krabbelt einmal um den Kegel herum und gelangt wieder zu ihrem Ausgangspunkt zurück.

Dabei muss ihr Abstand von der Kegelspitze nicht unbedingt immer gleich bleiben. Zufällig hat sie den kürzest möglichen Weg genommen."

a) Wie lang ist dieser Weg?

b) Bestimme den minimalen Abstand von der Kegelspitze zum Weg s der Spinne!

c) Ermittle die Raumkurve der Spinne!



Lösungen:

Wickelt man die Mantelfläche eines Kegels ab, entsteht ein Kreisausschnitt.

Die Bogenlänge des Kreisausschnitts l_b ergibt sich zu $l_b = 10 \cdot \pi$ bei einem Radius r = 20.

Daraus ergibt sich der Winkel α des Kreisausschnittes aus $l_b = s \cdot \alpha$ zu

$$\alpha = \frac{\pi}{2}$$

Eine Zeichnung zu den Fragestellungen

Zu a)

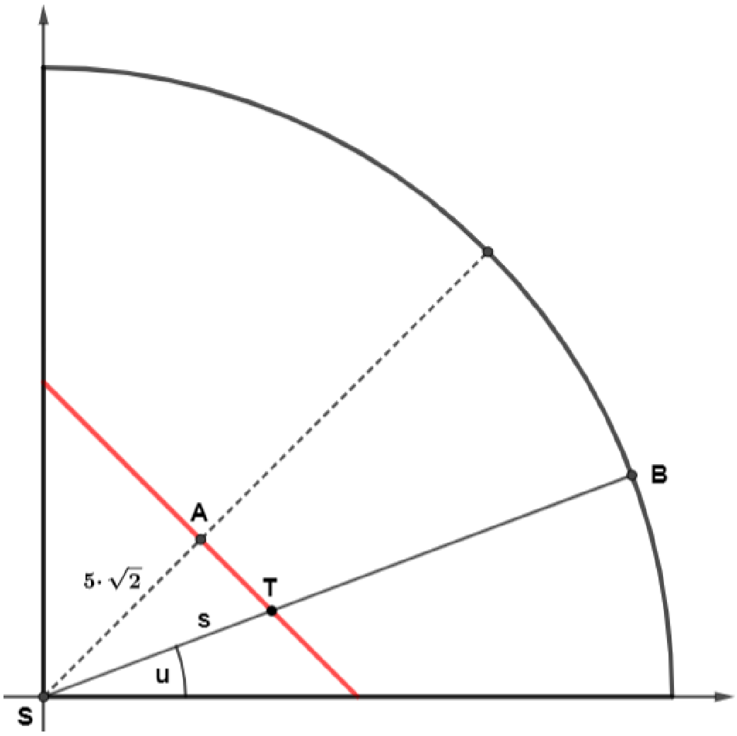
Der kürzeste Weg w_S der Spinne ist die Gerade und ergibt sich zu

$$\boxed{w_S = 10 \cdot \sqrt{2}}$$

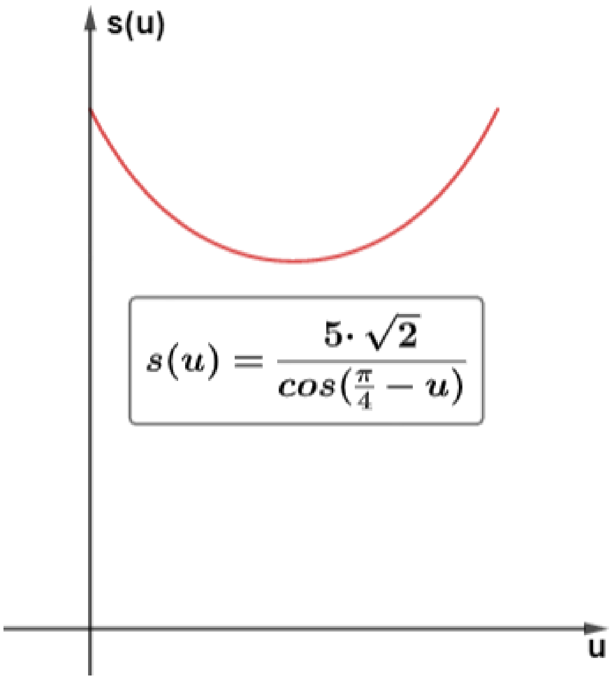
Zu b)

$\overline{SA}$ ergibt sich zu

$$\overline{SA} = 5 \cdot \sqrt{2} \rightarrow \overline{ST} = s(u) = \frac{5 \cdot \sqrt{2}}{\cos\left(\frac{\pi}{4} - u\right)}$$



In $s(u)=\dfrac{5\cdot\sqrt{2}}{\cos\left(\frac{\pi}{4}-u\right)}$ steckt ein kleines Extremalproblem.



Mit

$$\left.\begin{aligned} s'(u) &= -5\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}-u\right)}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-u\right)} \\ s'(u) &= 0 \end{aligned}\right\}\rightarrow \boxed{u=\frac{\pi}{4}}$$

Wie es auch zu erwarten war!

Die minimale Entfernung beträgt also $s=5\cdot\sqrt{2}$ von der Kegelspitze zur Bahn der Spinne.

Der dazugehörige Raumpunkt wird später ermittelt.

Zu c)

C liegt auf dem Grundkreis des Kegels: $C=\left(5\cdot\cos(4u),5\cdot\sin(4u),0\right)$ mit $0\le u\le\frac{\pi}{2}$

Der Kegel hat eine Höhe von $h=5\cdot\sqrt{15}$ mit Punkt $S=\left[0,0,5\cdot\sqrt{15}\right]$

Die Mantellinie des Kegels lässt sich also beschreiben als

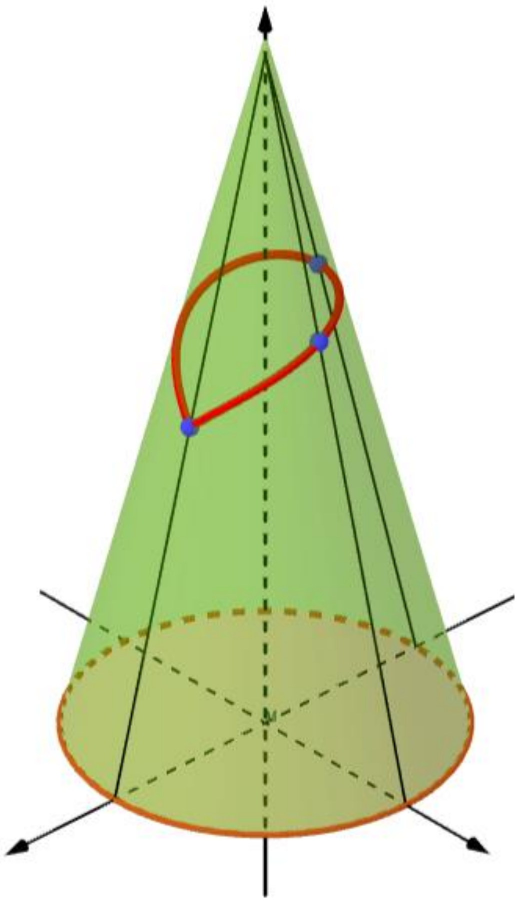
$ml=\left[0,0,5\cdot\sqrt{15}\right]+t\cdot\left[5\cdot\cos(4u),5\cdot\sin(4u),-5\cdot\sqrt{15}\right]$ mit dem Richtungsvektor r

$$\vec{r}=\left[5\cdot\cos(4u),5\cdot\sin(4u),-5\cdot\sqrt{15}\right]$$

Der Punkt T auf dem Weg der Spinne $pT(u)=\left[0,0,5\cdot\sqrt{15}\right]+s\cdot\frac{\vec{r}}{r}\rightarrow$

$$pT(u)=\left[0,0,5\cdot\sqrt{15}\right]+\frac{5\cdot\sqrt{2}}{\cos\left(\frac{\pi}{4}-u\right)}\cdot\frac{\left[5\cdot\cos(4u),5\cdot\sin(4u),-5\cdot\sqrt{15}\right]}{400}$$

$$pT(u)=\left[\frac{\sqrt{2}\cdot\cos(4u)}{\sin\left(u+\frac{\pi}{4}\right)},\frac{\sqrt{2}\cdot\sin(4u)}{\sin\left(u+\frac{\pi}{4}\right)},5\cdot\sqrt{15}-\frac{15\cdot\sqrt{2}}{16\cdot\sin\left(u+\frac{\pi}{4}\right)}\right]$$



pT(u) ist dann die Gleichung der Raumkurve mit dem Parameter u, dargestellt rechts.

Hervorgehoben auf der Raumkurve sind die Punkte

P_1 für u = 0

$$P_1=\left(\frac{5}{2}/0/\frac{5}{2}\sqrt{15}\right)$$

P_2 für $u=\frac{\pi}{8}$

$$P_2=\left(0/\frac{5}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}/\frac{5}{2}\cdot\sqrt{15}\cdot\left(2-\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)\right)$$

P_3 für $u=\frac{\pi}{4}$

$$P_3=\left(-\frac{5}{4}\sqrt{2}/0/\frac{5}{4}\sqrt{15}\cdot\left(4-\sqrt{2}\right)\right)$$

P_3 ist der Raumpunkt mit dem geringsten Abstand zur Kegelspitze (siehe b)).

Zusatzaufgabe

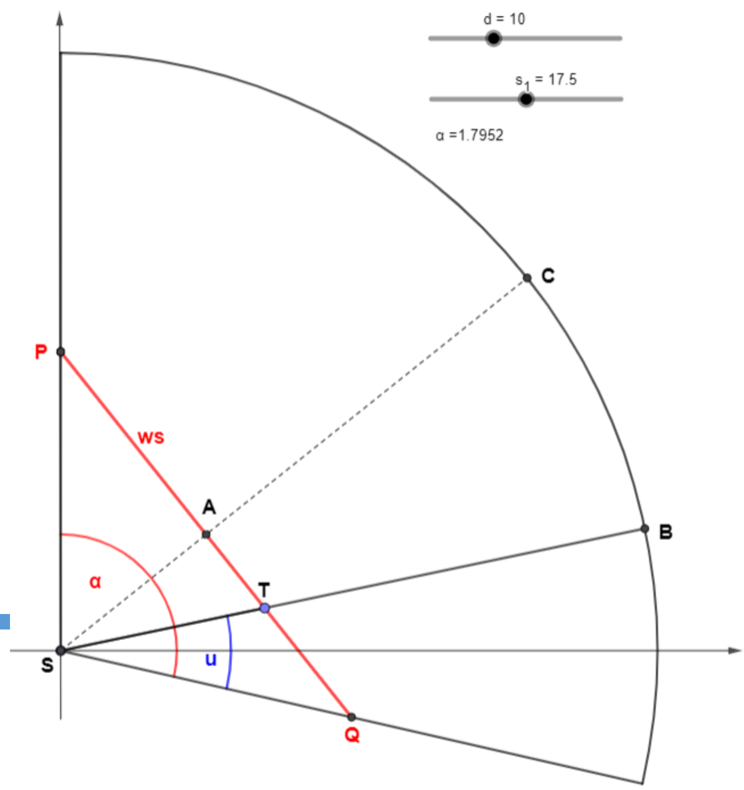
Nun soll das Problem betrachtet werden mit allgemeinem d und s.

Hier gilt entsprechend:

$$\alpha=\pi\cdot\frac{d}{s}$$

Den Weg der Spinne erhält man aus dem rechtwinkligen Dreieck SAP:

$$\frac{\frac{1}{2}ws}{\frac{1}{2}s}=\sin\left(\frac{1}{2}\alpha\right)\rightarrow \underline{ws=s\cdot\sin\left(\frac{1}{2}\alpha\right)}$$



$\overline{SA}$ ergibt sich aus

$$\frac{\overline{SA}}{\frac{1}{2}s} = \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \rightarrow \underline{\overline{SA} = \frac{1}{2}s \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$$

Außerdem gilt:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\overline{SA}}{\overline{ST}} = \cos\left(\dfrac{\alpha}{2} - u\right) \\ \overline{ST} = \dfrac{\frac{1}{2}s \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\alpha}{2} - u\right)} \end{array}\right\} \rightarrow \overline{ST}(u) = \frac{s \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{2 \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2} - u\right)}$$

Für den kürzesten Weg erhält man damit

$$\overline{ST}'(u) = \frac{1}{2}s \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{\alpha}{2} - u\right)}$$

Mit $\overline{ST}'(u) = 0$ erhält man $u = \frac{\alpha}{2}$ $\boxed{\overline{ST}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{s}{2} \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$

Der Weg der Spinne um den Kegel

$$\alpha = \pi \cdot \frac{d}{s} \qquad n = \frac{2s}{d} \qquad h = \sqrt{s^2 - \frac{d^2}{4}} \qquad ws = s \cdot \sin\left(\frac{1}{2}\alpha\right) \qquad \overline{ST}(u) = \frac{s \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{2 \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2} - u\right)}$$

Der Punkt C auf dem Grundkreis

$$C = \left(\frac{d}{2} \cdot \cos(n \cdot u) \,/\, \frac{d}{2} \cdot \sin(n \cdot u) \,/\, 0\right)$$

$$C = \left(\frac{d}{2} \cdot \cos\left(\frac{2s}{d} \cdot u\right) / \frac{d}{2} \cdot \sin\left(\frac{2s}{d} \cdot u\right) / 0\right) \text{ mit } 0 \le u \le \frac{\pi \cdot d}{s}$$

Der Punkt T in Abhängigkeit von u, d und s

$$pT(u,d,s)=\begin{pmatrix}0\\0\\h\end{pmatrix}+\overline{ST}(u)\cdot\frac{\overrightarrow{CS}}{\left|\overrightarrow{CS}\right|}\rightarrow pT(u,d,s)=\begin{pmatrix}0\\0\\\sqrt{s^2-\dfrac{d^2}{4}}\end{pmatrix}+\frac{s\cdot\cos\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)}{2\cdot\cos\left(\dfrac{\alpha}{2}-u\right)}\cdot\begin{pmatrix}\dfrac{d}{2}\cdot\cos\left(\dfrac{2s}{d}u\right)\\\dfrac{d}{2}\cdot\sin\left(\dfrac{2s}{d}u\right)\\-\sqrt{s^2-\dfrac{d^2}{4}}\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{s}$$

Die fertige Raumkurve:

$$\boxed{pT(u,d,s)=\begin{pmatrix}\dfrac{d\cdot\cos\left(\dfrac{\pi\cdot d}{2s}\right)\cdot\cos\left(\dfrac{2s}{d}\cdot u\right)}{4\cdot\cos\left(u-\dfrac{\theta\cdot d}{2s}\right)}\\[2ex]\dfrac{d\cdot\cos\left(\dfrac{\pi\cdot d}{2s}\right)\cdot\sin\left(\dfrac{2s}{d}\cdot u\right)}{4\cdot\cos\left(u-\dfrac{\pi\cdot d}{2s}\right)}\\[2ex]\sqrt{s^2-\dfrac{d^2}{4}}\cdot\left(1-\dfrac{\cos\left(\dfrac{\pi\cdot d}{2s}\right)}{2\cdot\cos\left(u-\dfrac{\pi\cdot d}{2s}\right)}\right)\end{pmatrix}}\quad \text{mit } 0\le u\le\frac{\pi\cdot d}{s}$$

Einige Variationen