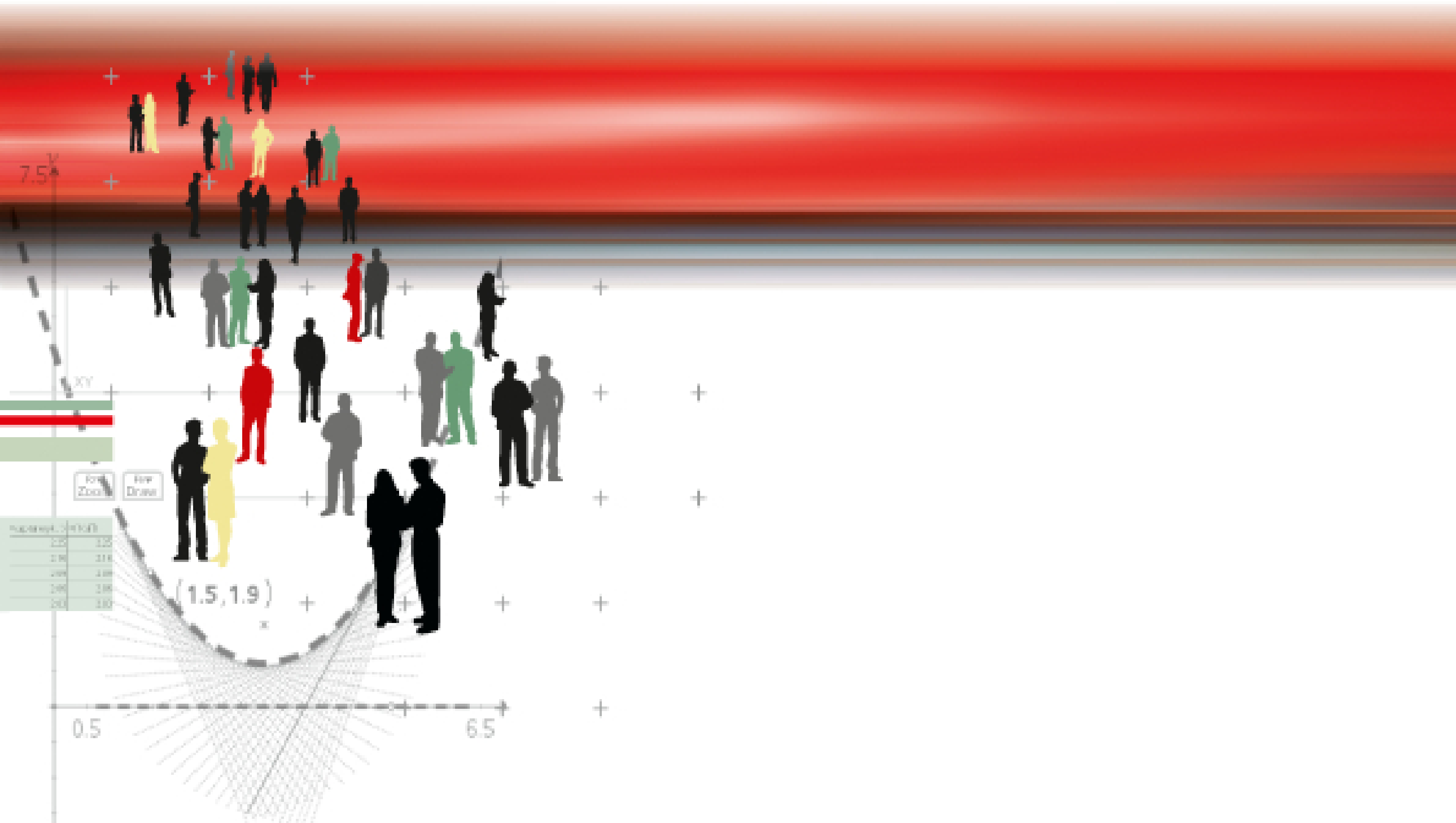
T³ DEUTSCHLAND

Zentralabitur mit CAS
Stand und Perspektiven

Ergebnisse der Ländertagung 27. bis 29.11.2008 Bad Berka

Wolfgang Moldenhauer, Sibylle Stachniss-Carp (Hrsg.)



Texas Instruments

Zentralabitur mit CAS
Stand und Perspektiven

Ergebnisse der Ländertagung 27. bis 29.11.2008 Bad Berka

Wolfgang Moldenhauer, Sibylle Stachniss-Carp (Hrsg.)

Verlag:
Westfälische Wilhelms-Universität Münster, Zentrum für Lehrerbildung

"Wissen ist Macht."
nach Francis Bacon Meditationes sacrae, 11

Einleitung

Vom 27. bis 29. November 2008 fand am Thüringer Institut für Lehrerfortbildung, Lehrplanentwicklung und Medien (ThILLM) in Bad Berka eine Tagung zum Thema

„Zentralabitur mit CAS - Stand und Perspektiven"

statt, an der Vertreter aus den Ländern Baden-Württemberg, Bayern, Berlin, Brandenburg, Bremen, Hamburg, Hessen, Mecklenburg-Vorpommern, Niedersachsen, Nordrhein-Westfalen, Saarland, Sachsen, Sachsen-Anhalt, Schleswig-Holstein und Thüringen, die von den Kultusministerien benannt waren, Mathematiklehrer und -lehrerinnen und Repräsentanten von Texas Instruments Inc. teilnahmen.

Die Thematik dieser Tagung besitzt hohe aktuelle schulpolitische Relevanz. Sie ordnet sich in Veränderungsprozesse ein, die durch die Einheitlichen Prüfungsanforderungen in der Abiturprüfung Mathematik[1], durch den Wechsel von dezentralen Abituren zu zentralen in einigen Ländern, durch eine Verkürzung der Schulzeit von 13 auf 12 Jahre, durch die Diskussion über Bildungsstandards und Reformprozesse in den Ländern stichwortartig beschrieben sind.

Für die Tagung, die von der T^3-Themengruppe[2] „Zentralabitur mit CAS" vorbereitet wurde, waren folgende Themenfelder vorgesehen:

1. **Dokumentation der Aufgabenbearbeitung**
   Durch die Nutzung von CAS im Zentralabitur entsteht für Schüler und Lehrer die Frage, wie der Lösungsweg nachvollziehbar und damit auch bewertbar darzustellen ist. Anhand von Beispielen soll diese Frage in der Arbeitsgruppe diskutiert und Mindestanforderungen an eine angemessene Dokumentation erstellt werden.

2. **Gleiche Aufgabenstellung für CAS und NON-CAS ?**
   Beim Zentralabitur werden gelegentlich auch (fast) identische Aufgaben für die Bearbeitung mit CAS und ohne CAS gestellt. Ist das gerechtfertigt oder sollte man besser andere Modelle der Aufgabenkonstruktion verwenden?

3. **Hilfsmittelfreie Teile als eigenständiger Prüfungsteil – ist das notwendig?**
   Einige Bundesländer setzen beim Zentralabitur einen separaten hilfsmittelfreien Teil ein. Andere verfolgen den Weg, Fragestellungen ohne Computereinsatz in CAS-Aufgaben zu integrieren. Welche Argumente sprechen für diese unterschiedlichen Wege? Welche Funktion haben solche hilfsmittelfreien Teile?

1 Beschluss der KMK vom 1.12.1989 i. d. F. vom 24.5.2002
2 Teachers Teaching with Technology

4. **Vision: Ein länderübergreifendes Curriculum, das die Möglichkeiten von CAS einbezieht.**
   Eine Ausrichtung auf Kompetenzentwicklung erfolgt in fast allen Bundesländern. Dabei stellt sich die Frage, ob die aktuellen Curricula die Möglichkeiten von CAS angemessen berücksichtigen. Wie sollte sich das Curriculum verändern, damit CAS zur Förderung dieser Kompetenzen sinnvoll eingesetzt werden kann? Ergeben sich dadurch auch neue inhaltliche Schwerpunktsetzungen?

5. **Notwendige CAS-Werkzeugkompetenz**
   Für die drei zentralen Gebiete der Sekundarstufe 2 werden vom T³-Arbeitskreis „Zentralabitur mit CAS“ erstellte Listen mit unverzichtbaren Werkzeugkompetenzen vorgestellt und an Hand konkreter Abituraufgaben diskutiert. Dabei soll auch auf die besondere Bedeutung modularer CAS-Kompetenzen für Unterricht und Klausuren eingegangen werden.

6. **Anwendungsaufgaben und mathematischer Gehalt**
   Schon mit Grafikrechnern lassen sich Anwendungsaufgaben oft ohne tiefere Analysiskenntnisse angemessen lösen. Die Tendenz, im Wesentlichen diesen Aufgabentyp in der Abiturprüfung zu stellen, birgt die Gefahr in sich, dass klassische mathematische Inhalte verloren gehen. Wie können wir vorbeugen – was ist letztlich eine „gute“ CAS-Aufgabe?

Das Themenfeld 5 wurde auf Wunsch der Teilnehmer zugunsten der anderen nicht bearbeitet. Natürlich ist der Themenschwerpunkte 5 immanent in den anderen Themenfeldern enthalten.

Zusätzlich wurde ein von der T³-Themengruppe „Zentralabitur mit CAS“ vorgelegtes Papier diskutiert, das der Frage „Welche Chancen bietet in CAS auf dem Weg zum Mathematik-Abitur?“ nachgeht.

Wie in den Tagungsbänden von 2004[3] und 2005[4] enthält auch dieses Heft vielfältige Beispiele, die die Diskussionen, Standpunkte und Argumente in den genannten Themenfeldern bereichern.

Sehr herzlich danken möchten wir

- der T³-Themengruppe „Zentralabitur mit CAS“ für die Vorbereitung und vielfältige Unterstützung,
- allen Tagungsteilnehmern für ihre engagierte Mitarbeit und das Bereitstellen von Beiträgen sowie für die redaktionelle Unterstützung für diesen Tagungsbericht,
- den Kollegen aus dem Arbeitskreis Computeralgebrasysteme am ThILLM für die Unterstützung in Vor- und Nachbereitung sowie Durchführung der Tagung und
- Texas Instruments Inc. für die finanzielle Unterstützung der Tagung.

Ferner möchten wir die produktive Heterogenität der Tagungsteilnehmer[5], die Bereitschaft, Probleme und Schwierigkeiten offen ohne Ressentiments zu benennen, und die hohen Erwartungen an das Ergebnis der Tagung gerade bei den Ländervertretern, die derzeit komplizierte Prozesse zu gestalten haben, erwähnen.

Wolfgang Moldenhauer Sibylle Stachniss-Carp

3 www.minet.uni-jena.de/preprints/fothe_04/BerichtezurTagung24.25.September.pdf
4 Abiturprüfung, Mathematik mit CAS, Thillm, Reihe Materialien, Heft 125, 2005
5 Personenbezeichnungen stehen im Heft für beide Geschlechter.

Inhalt

1 Zentralabitur mit CAS – Stand und Perspektiven (Auszüge aus dem Eingangsreferat von Rainer Heinrich)

„Denn es ist eines ausgezeichneten Mannes nicht würdig,
wertvolle Stunden wie ein Sklave
im Keller der einfachen Berechnungen zu verbringen.“
G.-W. Leibniz (1646-1716)

1.1 Anliegen

In der Bundesrepublik Deutschland gibt es gegenwärtig viele Faktoren, die ein künftiges Mathematikabitur beeinflussen werden:

- Schulzeitverkürzung (G8)
- Entwicklung von Standards für die Abiturprüfung
- Einführung zentraler Prüfungen in fast allen Ländern
- Veränderungen in der Struktur der gymnasialen Oberstufe
- Weiterentwicklung von Lehrplänen/Rahmenrichtlinien
- Bestrebungen zu gemeinsamen Prüfungen von Ländern
- Einfluss moderner Mathematikwerkzeuge
- Internationale mathematikdidaktische Entwicklungen

Heute soll insbesondere der Einfluss moderner digitaler Medien, wie CAS auf das Zentralabitur Gegenstand der Betrachtung sein. Nicht immer lassen sich die genannten Faktoren aber voneinander trennen. Auch werde ich bei der Verwendung des Begriffs CAS nicht nur CAS im engeren Sinne meinen, sondern stets komplexe Software oder Handheld-Systeme, die auch Funktionsplotter, Tabellenkalkulation, Dynamische Geometrie usw. enthalten.

CAS und GTR haben zweifellos wachsenden Einfluss auf die Gestaltung des Mathematikunterrichts. Die Systeme dienen der Unterstützung des Lernprozesses und wurden mit diesem Ziel entwickelt. Damit stehen sie als digitale Werkzeuge aber eben auch in Prüfungen zur Verfügung und erfordern eine entsprechende Berücksichtigung bei der Aufgabengestaltung und der Festlegung von Prüfungsmodalitäten.
Zum Verständnis soll zunächst kurz die Rolle von CAS/GTR im Lernprozess umrissen werden.

1.2 Rolle von CAS im Lernprozess

Selbst wenn man unterstellt, dass ein Lehrer keine Aversion gegen CAS und GTR im Unterricht hat, fällt gerade am Anfang der sinnvolle pädagogische Einsatz mitunter schwer.
Im Rahmen eines Unterrichtsbesuchs konnte ich folgende Situation beobachten:

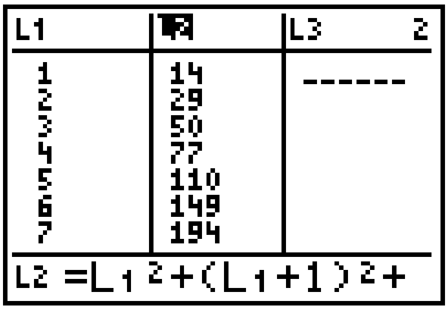
Die Lehrerin stellte Schülern einer 9. Klasse die Aufgabe:
„Die Summe der Quadrate dreier aufeinander folgender natürlicher Zahlen ist 590. Wie lauten die Zahlen?“
Sie erwartete den folgenden klassischen Lösungsweg:

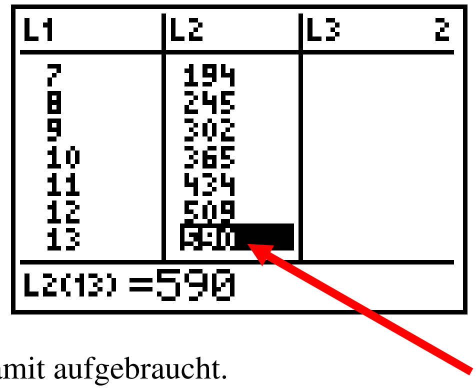
$$n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 = 590$$
$$n^2 + n^2 + 2n + 1 + n^2 + 4n + 4 = 590$$
$$3n^2 + 6n + 5 = 590 \quad | -590$$
$$3n^2 + 6n - 585 = 0 \quad | \div 3$$
$$n^2 + 2n - 195 = 0$$

$$x_{1;2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$
$$= -1 \pm \sqrt{1-(-195)}$$
$$= -1 \pm \sqrt{196}$$
$$x_1 = 13 \text{ (trifft zu)}$$
$$x_2 = -15 \text{ (entfällt)}$$

Ergebnis: Die Zahlen lauten 13, 14 und 15.

Ein Schüler arbeitete im Listenmenü des GTR, legte als Liste 1 (L1) eine Liste natürlicher Zahlen fest und definierte die Liste 2 als $L_1^2 + (L_1+1)^2 + (L_1+2)^2$. Damit war für den Wert 590 in Liste L_2 sofort der entsprechende Wert 13 in Liste L_1 ablesbar. Der Schüler meldete sich und nannte der Lehrerin nach kurzer Zeit das Ergebnis. Diese schaute ihm über die Schulter, betrachtete etwas ungläubig den GTR und sagte: „Das stimmt. Aber jetzt machst Du es noch mal richtig!“





Die Motivation für den Schüler war damit aufgebraucht.

Digitale Medien erfordern ein grundsätzliches Nachdenken über Mathematikunterricht.

Bert Waits prägte während der Internationalen DERIVE-Konferenz in Portoroz 2000 den Ausspruch:
“Some Mathematics becomes more important because technology requires it.
Some Mathematics becomes less important because technology replaces it.
Some Mathematics becomes possible because technology allows it.”

Für den Einsatz digitaler Medien sprechen eine Reihe didaktischer Gründe bzw. Einsatzziele:

- Entdeckendes Lernen – Experimentieren
- Visualisieren
- Ermöglichen verschiedener Lösungszugänge
- Motivieren

- Anwenden der Mathematik
- Rechenknecht
- Änderung der Aufgabenkultur, offene Aufgaben
- Fächerübergreifendes Lernen

Um diese Ziele umzusetzen, benötigen Lehrer erfahrungsgemäß Hilfen durch Aus- und Fortbildung, Fachliteratur, Unterstützungssysteme und ähnliche Maßnahmen. Didaktische Anwendungen digitaler Medien spielten leider in der Ausbildung eines Großteils der heutigen Lehrer noch keine Rolle.
Lehrer, und hier verwende ich den Begriff sehr weit, also auch Schulbuchautoren, Vertreter der Schulaufsicht usw., durchlaufen auf dem Weg zum sinnvollen Einsatz von Technologie verschiedene Phasen:

1. Entwickeln von grundsätzlichem Interesse für digitale Medien
2. Nutzen als eigenes Werkzeug, z. B. zur Unterrichtsvorbereitung/Korrektur
3. Einsatz als Demonstrationsgerät
4. Einsatz als Schüler(rechen)hilfsmittel (meist bei tradierten Problemen)
5. Einsatz als Experimentierwerkzeug
6. **Einsicht zur Veränderung des Mathematikunterrichts**

Betrachten wir ein Beispiel aus Phase 5:
Der klassische Weg der Vermittlung einer Rechenregel verläuft etwa so:
1. Der Lehrer demonstriert die einzuführende Regel *ohne Technologie*
2. Die Schüler bearbeiten viele Beispiele *ohne Technologie* (Training).
3. Danach zeigt der Lehrer das Verfahren *mit Technologie.*

Ein etwas anderer Weg soll am Beispiel des Erlernens des Auflösens von Klammern demonstriert werden:
Der Lehrer stellt folgendes Problem:
Die Variable a steht für dein Alter, die Variable m für deine Masse. Nimm a, multipliziere es mit 2 und addiere 5. Multipliziere das Ganze mit 50 und addiere m. Subtrahiere 365.

$$(a \cdot 2 + 5) \cdot 50 + m - 365$$

Wenn man den Term in ein CAS eingibt, so erhält man 100a + m - 115. Setzt man Alter und Masse für einen konkreten Fall ein und addiert man nun 115, so kann man in den ersten beiden Stellen der vierstelligen Zahl das Alter, in den hinteren beiden Stellen die Masse ablesen. Solche Zahlenpuzzles sind für Schüler in der Regel motivierender als das stupide Rechnen von Aufgabenkaskaden.
Noch interessanter wäre es, selbst solche Rätsel zu erfinden. Nur: Schüler in der betrachteten Klassenstufe 8 können in der Regel noch keine Klammern auflösen.

Bei Verfügbarkeit von CAS ist es möglich, die entsprechenden Regeln selbst entdecken zu lassen:
Mögliche Aufgabe:
Vor einer Klammer kann ein „ + “, ein „ - “, ein „ * “ oder ein „ : “ stehen. Versuche Regeln herauszufinden, wie in diesen Fällen die Klammer in einem Term aufgelöst wird. Nutze die CAS - Befehle „Expand“ und „Factor“. Erkunde bei dieser Gelegenheit auch deren Wirkungsweise.“

Nach einer Gruppenarbeitszeit von ca. 45 Minuten sollten die Schüler ihre Ergebnisse der Klasse präsentieren. In der Regel haben Schüler nach dieser Zeit die entsprechenden Regeln gefunden. **Der Behaltenseffekt ist, wie inzwischen vorliegende Studien zeigen, durch die Aktivität im Aneignungsprozess höher.**

Ein experimenteller Erkenntnisweg könnte also die folgende Struktur haben:
1. Entdeckungsphase *mit Technologie*
2. Übungsphase *ohne Technologie* bis zu einem vernünftigen Beherrschungsgrad
3. Anwendungsphase *mit Technologie*

1.3 Rolle von CAS in zentralen Prüfungen

Schwieriger ist die Beantwortung der Frage nach dem Stellenwert von CAS im Abitur. Ganz provokativ gesagt: Eigentlich hat es hier keinen spezifischen, zumindest nicht im Vergleich zum traditionell im Abitur eingesetzten GTR. Langfristig werden Schüler, die mit einem sinnvollen CAS-Einsatz unterrichtet wurden, auch im Abitur bessere Ergebnisse erzielen. Das hat aber weniger mit der Art der Aufgaben als vielmehr mit dem Langzeiteffekt des inhaltlichen Verständnisses von Mathematik zu tun. Der Hauptmehrwert von CAS besteht im Experimentieren, welches bei Beibehaltung von tradierten schriftlichen Prüfungen kaum eine Rolle spielt. Hier müsste man über Prüfungsformate generell nachdenken und dabei vieles in Frage stellen.

Wir müssen uns in den nächsten Jahren mit Problemen der Chancengleichheit der Prüfungsteilnehmer und Konsequenzen für die Aufgabenkultur und die Prüfungsmodalitäten auseinandersetzen.

Hier sollen einige Aspekte aufgezeigt werden, die dann in den Workshops der Tagung weiter bearbeitet werden. Es werden bewusst mehr Problem benannt und Fragen gestellt als Lösungen aufgezeigt. Hätten wir ideale Lösungen, bräuchten wir die Konferenz und den Erfahrungsaustausch der Länder nicht. An geeigneten Stellen sollen Beispiele von Abituraufgaben das Gesagte unterstützen.

1.3.1 Struktur einer Prüfung mit CAS

Im Vorfeld zentraler Prüfungen sind neben der Aufgabenerstellung auch strukturelle Fragen zu klären. Diese Regelungen betreffen die Festlegung der Arbeitszeiten und die Regelungen zur Vergabe der Bewertungseinheiten, wobei hier die regionalen Besonderheiten der Länder und der jeweiligen Rahmenrichtlinien/Lehrpläne zu beachten sind.
Ferner sind Festlegungen zu treffen zu den zugelassenen Hilfsmitteln, der Struktur der Prüfungsarbeit, möglichen Wahlangeboten etc.

Da diese Aspekte durchaus auch inhaltliche Konsequenzen haben, sollen einige denkbare Varianten diskutiert werden:

Variante 1:

1 Aufgabe Analysis
1 Aufgabe Geometrie / Algebra
1 Aufgabe Stochastik
ggf. Wahlaufgabe zu Vernetzung von Teilgebieten

Je nach Unterrichtsanteil müssten dann Festlegungen zum Arbeitszeitanteil der einzelnen Aufgaben für beide Anforderungsniveaus getroffen werden.

Vorteile:
Alle Teilgebiete der Schulmathematik werden prüfungsrelevant.

Probleme:
Es müsste in den meisten Ländern Varianten geben für Schüler, die einen Taschenrechner, einen GTR oder ein CAS benutzen. Diese Varianten könnten sich z. T. auf einzelnen Aufgaben erstrecken. So könnte die Variante Stochastik und Geometrie für GTR und CAS gleich sein.

Wahlaufgaben könnten im Sinne der EPA Kompetenzen aus verschiedenen mathematischen Gebieten vernetzen. Damit hat aber der Schüler kaum eine echte Wahlalternative. Bei Aufgaben zur Modellierung müsste er z. B. zwischen "Fichtenwachstum" und "Fallschirmspringen" entscheiden, ohne dass er die mathematischen Hürden der Aufgaben bei der Auswahl schon erkennen kann. Dafür muss man die Aufgabe in der Regel erst einmal selbst gelöst haben. Die Wahl wird also ein Lotteriespiel. Als Alternative bliebe eine Auswahl durch den Lehrer.

Durch die strenge Zuordnung der Aufgaben zu mathematischen Teilgebieten wird der Entwicklung von "Schubkastenwissen" Vorschub geleistet, der Vernetzungsgedanke kommt in den Pflichtaufgaben zu kurz.

Variante 2

(rechen)hilfsmittelfreier Teil mit Items zu verschiedenen Teilgebieten
1 Aufgabe Analysis
1 Aufgabe Geometrie / Algebra oder 1 Aufgabe Stochastik

Vorteile:
Die Problematik der Wahlaufgaben entfällt, damit wird auch der Aufwand zur Erstellung der Aufgaben reduziert. Im ersten Teil könnten überschaubare Items aus verschiedenen mathematischen Teildisziplinen gestellt werden.

Probleme:
Der Ruf nach hilfsmittelfreien Teilen in Prüfungen ist nicht neu und wird gegenwärtig immer lauter. Dagegen ist auch nichts einzuwenden, wenn man die Funktionalität dieses Teiles klar definiert.

Variante 3

(rechen)hilfsmittelfreier Teil mit Items zu verschiedenen Teilgebieten
2 bis 3 vernetzte Aufgaben

Vorteile:
Die strenge Zuordnung zu mathematischen Teilgebieten entfällt. Damit werden einerseits deren Vernetzung angestrebt und andererseits die Möglichkeiten der Modellierung wesentlich erweitert.

Probleme:
Hinsichtlich des hilfsmittelfreien Teils siehe Themenfeld 3.

Variante 4

(rechen)hilfsmittelfreier Teil mit Items zu verschiedenen Teilgebieten
2 bis 3 vernetzte Aufgaben
dezentraler Teil zur schulspezifischen Schwerpunktsetzung und insbesondere zur Prüfung der Problemlösekompetenz

Vorteile:
Das Modell ermöglicht auch bei zentralen Prüfungen eine individuelle Profilierung bzw. Schwerpunktsetzung an einzelnen Schulen. Der überwiegend zentrale Teil der Prüfung trägt zur Vergleichbarkeit und Qualitätssicherung bei. Der dezentrale Teil, der maximal ein Viertel des Aufgabenumfanges umfassen sollte, ermöglicht die spezielle Prüfung von Problemlösekompetenzen. Wird er als Gruppenprüfung umgesetzt, könnten auch prozessorientierte Bewertungsformen einfließen und Sozialkompetenzen geprüft werden.

Problem:
Aufgrund der Mischung von zentraler und dezentraler Prüfung erscheint diese Variante, auch aus juristischen Überlegungen, gegenwärtig kaum umsetzbar zu sein.

Aufgaben zur **Vernetzung mathematischer Inhalte** gewinnen zunehmend an Bedeutung, wenn man die Entwicklungen der Zentralabiture in den letzten Jahren in der Bundesrepublik, aber auch in Europa betrachtet. Waren Anwendungsaufgaben bisher meist auf die Stochastik beschränkt, findet man sie heute auch in anderen Gebieten vor, so u. a. in Hessen, Niedersachsen, Bremen, Sachsen.
Ein Beispiel hierzu wird im Anhang als Aufgabe 2 unter 3. gegeben.

1.3.2 Dokumentation der Aufgabenbearbeitung

Durch die Nutzung von CAS im Zentralabitur entsteht für Schüler und Lehrer die Frage, wie der Lösungsweg nachvollziehbar und damit auch bewertbar darzustellen ist.

Viele Länder haben inzwischen Operatorenlisten veröffentlicht. Solche Operatoren sollen den Schülern signalisieren, welche Lösungsdarstellung von ihnen erwartet und welche Hilfsmittel und Werkzeugebenen sie einsetzen können.

Als Beispiel sei ein Auszug aus der Operatorenliste aus Sachsen benannt:

Geben Sie an, Nennen Sie:	Ergebnisangabe, Lösungsweg muss nicht dargestellt werden.
Ermitteln Sie:	Ansatz bzw. Lösungsidee, Lösungsschritte, Mittel frei wählbar
Berechnen Sie:	Ansatz bzw. Lösungsidee, Lösungsschritte, keine grafische Werkzeugebene gestattet

Grundsätzlich ermöglichen solche Festlegungen eine gewisse Transparenz des Korrekturverfahrens und geben Lehrern und Schülern eine gewisse Sicherheit. Gleichzeitig besteht die Gefahr einer formalen Anwendung der Operatoren.
So schlug im Rahmen einer Diskussion in der Aufgabenkommission in Sachsen ein Lehrer eine Formulierung vor: „Treffen Sie eine begründete Aussage, dass…“. Ein anderes Mitglied der Kommission entgegnete: „’Treffen Sie’ dürfen wir nicht verwenden. Es ist kein sächsischer Operator.“

Außerdem besteht die Gefahr, dass das sächsische „Ermitteln Sie“ nicht dasselbe wie das hessische „Ermitteln Sie“ ist usw.

1.3.3. Getrennte Aufgabenstellung für CAS und NON – CAS?

Betrachtet man den Aspekt der Aufgabendifferenzierung hinsichtlich der Hilfsmittel, kann ein möglicher hilfsmittelfreier Teil zunächst ausgeklammert werden. Da das Anliegen einer Prüfung aber die Messung mathematischer Kompetenzen und nicht vordergründig die Überprüfung der Fähigkeiten im Handling ist, wirken Differenzierungsversuche oft aufgesetzt; ihr Sinn ist zu hinterfragen.

Beispiel 1

Auszug aus einer NON-CAS-Variante im Zentralabitur 2007 für den Grundkurs aus Nordrhein-Westfahlen

> **Aufgabenstellung:**
>
> Anlässlich der Fußball-Europameisterschaft 2008 in Österreich und der Schweiz plant ein Süßwarenhersteller eine Großproduktion von Überraschungseiern, von denen jedes zehnte – ein so genanntes EM-Ei – eine witzige Fußballfigur enthalten soll. Zum Versand werden Paletten durch ein Zufallsprogramm mit Eiern bestückt. EM-Eier sind von anderen Überraschungseiern äußerlich nicht zu unterscheiden.
>
> a) Philipp kauft in einem Supermarkt zehn Überraschungseier.
>
> *Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass er*
>
> (1) *im zehnten Ei die erste Fußballfigur findet,*
> (2) *in den zehn Eiern genau eine Figur findet,*
> (3) *in den zehn Eiern mindestens drei Figuren findet.* (13 Punkte)

Dieselbe Aufgabe als CAS-Variante:

> **Aufgabenstellung:**
>
> Anlässlich der Fußball-Europameisterschaft 2008 in Österreich und der Schweiz plant ein Süßwarenhersteller eine Großproduktion von Überraschungseiern, von denen jedes zehnte – ein so genanntes EM-Ei – eine witzige Fußballfigur enthalten soll. Zum Versand werden Paletten durch ein Zufallsprogramm mit Eiern bestückt. EM-Eier sind von anderen Überraschungseiern äußerlich nicht zu unterscheiden.
>
> a) Philipp kauft in einem Supermarkt zwei Paletten mit je 25 Überraschungseiern.
>
> *Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass er*
>
> (1) *im 25. Ei die erste Fußballfigur findet,*
> (2) *in der ersten Palette mindestens 3 Figuren findet,*
> (3) *in der ersten Palette genau 2 und in der zweiten Palette genau 3 Figuren findet.*
> (10 Punkte)

Hier wird den Prüfungsteilnehmern in der CAS-Variante von vornherein ein komplizierteres mathematisches Modell (2 Paletten mit je 25 Überraschungseiern) vorgelegt. Die Varianten unterscheiden sich im Problemlöseanspruch, nicht im Rechen- und Termumformungsaufwand. Es wird also genau dort differenziert, wo CAS keinen Einfluss hat. Die Populationen von Prüfungsteilnehmern werden ungleich behandelt.

Beispiel 2
Eine Aufgabe aus dem Abitur 2007 in Niedersachsen in Varianten für GTR und TR:

Rechnertyp: GTR	**Grundkurs**	**Block 2A**	**Gymnasium Gesamtschule**

Block 2A – Aufgabe 1

a) In einer Urne befinden sich 1000 Kugeln, die rot bzw. blau sind.
Eine Probenentnahme besteht daraus, dass 10 Kugeln (mit einem Griff) gezogen werden. Dabei ist k die Anzahl der roten Kugeln in der Stichprobe. Dann werden für die nächste Probenentnahme die 10 Kugeln wieder zu den anderen gegeben und vermischt.
Die Ziehung wurde zwölfmal durchgeführt; dies führte zu folgender Tabelle:

k (Anzahl der roten Kugeln)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Anzahl der Probenentnahmen mit k roten Kugeln	0	0	2	4	3	1	2	0	0	0	0

Bestimmen Sie die mittlere Anzahl der erhaltenen roten Kugeln und die Standardabweichung (Streuung).
Geben Sie eine begründete Prognose für die Anzahl der roten Kugeln in der Urne an.

Rechnertyp: TR	**Grundkurs**	**Block 2A**	**Gymnasium Gesamtschule**

Block 2A – Aufgabe 1

a) In einer Urne befinden sich 1000 Kugeln, die rot bzw. blau sind.
Eine Probenentnahme besteht daraus, dass 10 Kugeln (mit einem Griff) gezogen werden. Dabei ist k die Anzahl der roten Kugeln in der Stichprobe. Dann werden für die nächste Probenentnahme die 10 Kugeln wieder zu den anderen gegeben und vermischt.
Die Ziehung wurde zwölfmal durchgeführt; dies führte zu folgender Tabelle:

k (Anzahl der roten Kugeln)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Anzahl der Probenentnahmen mit k roten Kugeln	0	0	2	4	3	1	2	0	0	0	0

Bestimmen Sie die mittlere Anzahl der erhaltenen roten Kugeln.
Geben Sie eine begründete Prognose für die Anzahl der roten Kugeln in der Urne an.

Beide Aufgaben unterscheiden sich nur in der Forderung, dass Prüfungsteilnehmer mit GTR zusätzlich die Standardabweichung angeben mussten. Das ist in der Tat auf Knopfdruck beim GTR möglich. Aber warum ist die Angabe erforderlich? Es entsteht der Eindruck, dass die Angabe eben verlangt wurde, weil der GTR die entsprechende Taste hat. Interessanter wäre es, den Wert vorzugeben und seine Bedeutung interpretieren zu lassen.

Beispiel 3

Abitur 2006 in Dänemark:

Aufgabe A:

In einem kartesischen Koordinatensystem ist eine Gerade l gegeben durch: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene, die die Gerade l enthält und durch den Punkt Q(4; -2; 5) verläuft.

Eine Kugel K ist gegeben durch:

ohne CAS: $(x-4)^2 + (y+2)^2 + (z-5)^2 = 11$

mit CAS: $(x-a)^2 + (y+2)^2 + (z-5)^2 = 11$ mit $a > 2$

Die Kugel K und die Gerade l haben exakt einen gemeinsamen Punkt P.

Ohne CAS: Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes P.
Mit CAS: Bestimmen Sie a und die Koordinaten des Punktes P.

Aufgabe B:

Ohne CAS: Gegeben ist die Funktion f mit $y = f(x) = x - 2\sqrt{x}\ ,\ x \geq 2$

Mit CAS: Gegeben sind Funktionen $y = f_a(x) = x - a\sqrt{x}\ ,\ x \geq 0,\ \ a > 0$

Die Differenzierung erfolgt in beiden Aufgaben durch Ersetzen einer Zahlenangabe durch einen Parameter. Mit einem CAS ist das dadurch entstehende neue Problem zwar genau so bequem lösbar wie für Taschenrechnernutzer mit dem Zahlenwert, es entsteht aber auch keine Notwendigkeit des Parametereinsatzes, um das CAS zu rechtfertigen. Der Parameter wird nicht interpretiert, sein Einfluss nicht differenziert untersucht. Hier böten neuere CAS wie TI-Nspire™ CAS durch die Möglichkeiten des Dynamisierens der Grafik ganz neue Denkansätze.

Fazit: Die Differenzierung wird oftmals aus Gründen der scheinbaren Chancengleichheit gefordert, es zeigt sich aber, dass sie in Prüfungsaufgaben nur schwer sinnvoll umzusetzen ist. Prüfungsteilnehmer haben im Unterricht TR-, GTR- oder CAS-typische Lösungsstrategien entwickelt, die sie in der Prüfung anwenden. So bietet der GTR mit grafischen Lösungsmethoden an einigen Stellen auch Vorteile gegenüber dem CAS im engeren Sinne. An anderen Stellen ist es wiederum umgekehrt.

Gegenwärtig gibt es in der Bundesrepublik in fast allen Ländern (mit Ausnahme von Sachsen-Anhalt, noch) von der eingesetzten Technik abhängige Varianten, z. B.:

- Baden-Württemberg und Sachsen: hilfsmittelfreier Teil für alle und CAS oder GTR-Abitur
- Niedersachsen: Varianten für CAS, GTR,
- Hessen: Varianten für TR, GTR, CAS
- Thüringen: Varianten für TR und CAS
- Nordrhein-Westfalen: Variante für CAS und für NON-CAS

Die Prüfungsvorgaben sehen die unterschiedlichsten Vorgaben und Zulassungsvoraussetzungen vor. Interessant ist die Zusammenfassung von TR und GTR in der NON-CAS-Variante in Nordrhein-Westfalen oder die ausschließliche Zulassung von TR oder CAS in Thüringen (und eventuell zukünftig auch in Bayern).

Auch wenn inzwischen die meisten Länder vernünftigerweise Verbote zeitgemäßer Mathematikwerkzeuge mehr und mehr aufheben (Fahrschulen wird ja auch nicht durch den Staat verboten, Autos mit Servo-Lenkung einzusetzen.), gibt es fast weltweit eine Tabu-Zone: Hilfsmittel, mit denen Daten und Informationen zwischen Prüfungsteilnehmern ausgetauscht werden können. Teamfähigkeit spielt in Mathematikprüfungen überhaupt keine Rolle.

Die einzigen Prüfungen unter Einsatz des Internets habe ich 2005 in Israel gefunden.

Beispiel 4
Aufgabe aus einer Abiturprüfung 2005 in Israel, auf der Grundlage z. T. handschriftlicher Mitzeichnungen und durch die Übersetzung sinngemäß bearbeitet

Ein Flugzeug fliegt auf einer Kreisbahn in einer Höhe von 10 km um die Erde. Es passiert Pjöngyang (Nordkorea) und Karthoum und hat als Ziel Tel Aviv.
Passiert das Flugzeug bei Kurs auf einer Umlaufbahn das Kriegsgebiet im Iran?

Zur Beantwortung der Frage sind nun Internetrecherchen, z. B. zur Angabe der geographischen Daten der genannten Orte und des Irans notwendig. Auch die Angabe „Kriegsgebiet im Iran" muss u. U. sogar tagaktuell recherchiert werden. Der Erdradius könnte auch dem Internet entnommen werden.

1.3.4 Struktur und Funktion hilfsmittelfreier Prüfungsteile

Hilfsmittelfreie Teile als eigenständiger Prüfungsteil – ist das notwendig? Einige Bundesländer setzen beim Zentralabitur einen separaten hilfsmittelfreien Teil ein. Andere verfolgen den Weg, Fragestellungen ohne Computereinsatz in CAS-Aufgaben zu integrieren. Welche Argumente sprechen für diese unterschiedlichen Wege? Welche Funktion haben solche hilfsmittelfreien Teile?

Beispiel 5
Auszug aus dem hilfsmittelfreien Teil in Baden-Württemberg 2007:

1. Bilden Sie die erste Ableitung der Funktion f mit $f(x)=(1-\sin x)^2$.
2. Berechnen Sie $\int_0^{\ln 2} e^{2x}dx$

Die Aufgaben prüfen grundlegende Rechenkompetenzen, sollten sich dabei meist auf in wenigen Schritten lösbare Kalküle beschränken und weisen wenig Komplexität auf.

Es darf nicht zu einer Verlagerung von rechenintensiven Aufgaben in diesen Teil kommen, weil ansonsten das Ziel der Einführung neuer Mathematikwerkzeuge unterlaufen wird und der Unterricht wieder auf Training von Algorithmen abgestellt wird. Ähnlich wie bei der Überprüfung von Standards sollten die Aufgaben auf die Überprüfung von Kompetenzen zielen. In diesem Teil könnten auch Multiple–Choise-Aufgaben enthalten sein, Interpretationen von Darstellungen und einfache Berechnungen. Bei den letzteren wäre es günstig, wenn die Rahmenrichtlinien/Lehrpläne hinsichtlich des "händischen" Rechnens in den Ländern Aussagen zu Obergrenzen im Niveau treffen würden.

Beispiel 6
Interpretationsaufgabe und einfache Anwendungsaufgabe aus einem hilfsmittelfreien Teil (abiturähnliche Musteraufgaben Sachsen 2008)

A Die erste Ableitung einer Funktion h ist an einer Stelle s ihres Definitionsbereichs negativ. Welche der Aussagen ist unter dieser Voraussetzung wahr?

- ☐ Der Graph von h ist achsialsymmetrisch zu x = s.
- ☐ h hat an der Stelle s ein lokales Maximum.
- ☐ Die Tangente an den Graphen von h an der Stelle s ist monoton fallend.
- ☐ s ist eine negative Nullstelle von h.
- ☐ s ist eine Wendestelle von h.

B

Verbindet man jeden Mittelpunkt einer Seitenfläche des Würfels ABCDEFGH mit den vier Mittelpunkten der benachbarten Seitenflächen, dann erhält man den Körper IJKLMN, wobei I und N Mittelpunkte gegenüberliegender Seitenflächen sind.

Weisen Sie nach, das der Winkel zwischen den Kanten $\overline{JI}$ und $\overline{JN}$ ein rechter Winkel ist.

Hilfsmittelfreie Prüfungsteile in Mathematik sind seit Jahren in den Festlegungen der Prüfungsmodalitäten in verschiedenen Ländern zu beobachten. Mitunter lassen uns vor dem Hintergrund vollständig justiziabler Lösungen in Deutschland die etwas großzügigen Strukturfestlegungen in anderen Ländern sogar schmunzeln.

Beispiel 7

Festlegungen in Dänemark (2005):

Prüfung für A-Level (4 Stunden, 100 Bewertungseinheiten) <u>Erlaubte Hilfsmittel:</u> Bücher, Tabellen- und Formelsammlungen, Graphikrechner, korrigierte Hausaufgaben, **usw.** Schüler, die die CAS-Version bearbeiten, dürfen auch Voyage 200, TI-89, Computer mit Mathcad o.ä. nutzen.

Der Schüler trifft hier die Wahlentscheidung.

Beispiel 8

Festlegungen in Australien (2006):

Teil **Ohne Hilfsmittel: (40 BE)** 3.11.2006 Lesezeit: 09:00 – 09:15 Arbeitszeit: 09:15 – 10:15 Minuten Hilfsmittel: Füllfederhalter, Bleistift, Highlighter, Radiergummi, Tintenkiller, Buntstifte, Lineal	**Teil mit Hilfsmitteln: (80 BE)** 06.11.2006 Lesezeit: 11:45 – 12:00 Arbeitszeit: 12:00 –14:00 Hilfsmittel: Ein CAS-Rechner (Speicher braucht nicht gelöscht zu werden). Wird CAS am Computer benutzt, **kann die gesamte Funktionalität** des Computers genutzt werden.

Länder, die keine explizit ausgewiesenen hilfsmittelfreien Teile im Mathematikabitur eingeführt haben, prüfen in der Regel integriert in andere Aufgabenstellungen ebenfalls „händische“ Kompetenzen.
So durch die

- Forderung, Zwischenschritte bei Rechnungen anzugeben
- Forderung zum Beschreiben von Verfahren
- Überprüfung des Verständnisses von Zusammenhängen, z. B. beim qualitativen Zeichnen von Graphen von Ableitungsfunktionen

1.3.5 Was ist zukünftig EPA-Niveau I?

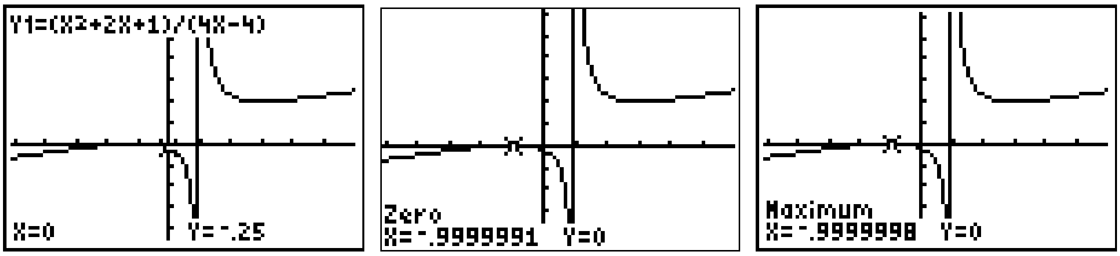
Auch wenn die EPA gegenwärtig zu Standards weiterentwickelt werden, ist einsichtig, dass aus pädagogischen und prüfungspsychologischen Gründen auch künftige Abiturprüfungsaufgaben einfache Reproduktionsanforderungen enthalten werden.

Betrachtet man den Wandel der Aufgabenkultur in den Prüfungen der letzten Jahre, geht aber der Trend immer mehr weg von algorithmischen Aufgaben.

Beispiel 9
Algorithmisch zu lösende Kurvendiskussionsaufgabe (Sachsen 1994):

Gegeben ist eine Funktion f mit der Gleichung $y = f(x) = \dfrac{x^2 + 2x + 1}{4x - 4}$.
Führen Sie für die Funktion f eine Kurvendiskussion durch (Nullstellen, Koordinaten des Schnittpunktes mit der y-Achse, Koordinaten der lokalen Extrempunkte und Art der Extrema).

Selbst bei Verfügbarkeit eines GTR ohne CAS wird die Aufgabenstellung trivial und fast überflüssig.



Die Aufgabe ermöglichte aber Schülern einen psychologisch „sicheren“ Prüfungsbeginn. Man konnte sich darauf verlassen, dass das Abitur mit der Kurvendiskussion beginnt, die Schritte waren auswendig gelernt, die einzige Überraschung am Prüfungsmorgen war die Funktionsgleichung.

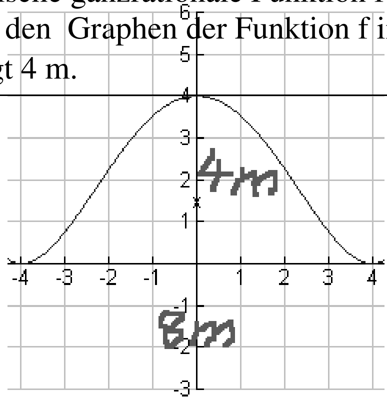
Beispiel 10
Eingekleidete Kurvendiskussionsaufgabe (Sachsen 1999):

Der symmetrische Giebel eines Barockhauses soll rekonstruiert werden. Die folgende Abbildung zeigt den Giebel in einem Koordinatensystem. Eine symmetrische ganzrationale Funktion f beschreibt den oberen Giebelrand. Die x-Achse ist Tangente an den Graphen der Funktion f in den Punkten $P_1(-4;0)$ und $P_2(4;0)$. Die Höhe des Giebels beträgt 4 m.

a) Begründen Sie, dass die Funktion f mindestens 4. Grades sein muss.

b) Bestimmen Sie eine Gleichung der Funktion f.

c) Die Giebelfläche soll durch eine waagerechte Linie in zwei flächengleiche Teilstücke zerlegt werden. Der obere Teil soll mit Ornamenten versehene werden, während im unteren Teil Fenster angebracht werden.
Berechnen Sie, in welcher Höhe der Giebel geteilt werden muss.



Die Aufgabe verlangt als ersten Schritt eine inhaltliche Begründung, für die nicht sofort ein auswendig gelernter Algorithmus zur Verfügung steht.

Beispiel 11
Eine fiktive offene Kurvendiskussionsaufgabe aus dem Jahr 1999

Beschreiben Sie die Form des Giebels mit mathematischen Mitteln.

Der Schüler muss das Modell vollständig selbst bilden und die Schwerpunkte der Themenbearbeitung sowohl inhaltlich als auch methodisch festlegen.

Die Frage, geschickte Einstiegsaufgaben für Abituraufgaben zu finden, die von den meisten Schülern gelöst werden können, ist eine der großen Herausforderungen bei künftigen Abituren. In den von Einzelitems geprägten hilfsmittelfreien Teilen lässt sich das noch relativ gut umsetzen.

Bei Komplexaufgaben können
- Forderungen nach Skizzen
- Forderungen nach einfachsten Berechnungen, auch mit Mitteln der Sekundarstufe I oder
- Faktenfragen

mögliche Zugänge sein.

1.3.6 Für ein Abitur benötigte Werkzeugkompetenz

Auch wenn in Abiturprüfungen, wie eingangs festgestellt, mathematische Kompetenzen geprüft werden sollen, erfordert der Einsatz von Hilfsmitteln auch Werkzeugkompetenzen des Prüfungsteilnehmers. Das war im Übrigen auch im Zeitalter des Rechenschiebers und der Logarithmentafel so. CAS erfordert andere Kompetenzen.
Für die drei zentralen Gebiete des Mathematikunterrichts hat der T^3-Arbeitskreis „Zentralabitur mit CAS“ Listen mit unverzichtbaren Werkzeug-Kompetenzen erstellt und wird sie in einem Workshop im Rahmen dieser Tagung anhand konkreter Abituraufgaben diskutieren.

- Einstellen der Grundmodi und Umgang mit Fehlermeldungen
- Eingeben und Speichern von
  - Werten
  - Termen, Gleichungen und Funktionen
  - Listen
  - Vektoren und Matrizen
- Arbeiten mit Termen
  - Umformungen mit Termen
  - Vergleich von Termen
  - Systematischer Umgang mit Parametern
  - ...

Besonders hervorgehoben wird die zentrale Bedeutung modularer CAS-Kompetenzen im Unterricht und in Klausuren/Prüfungen. Diese umfassen das Definieren algebraischer Strukturen und deren modulare weitere Verwendung im Kontext der entsprechenden Aufgaben.

- Define k(x,u)=u·e^x+e^(-u·x)
- Solve (k(0,u)=6,u)
- Bausteine verknüpfen
- Eigene Bausteine entwickeln

Eine direkte Prüfung der Werkzeugkompetenz war in Deutschland bisher nicht üblich. Fragen nach bestimmten Taschenrechnerbefehlen werden in der Regel kaum, zumindest im Abitur nicht gestellt. Zum einen wären sie aufgrund der Vielzahl vorhandener Soft- und Hardware-Systeme nicht sinnvoll, zum anderen gehören Tastenkombinationen etc. nicht zur Allgemeinbildung. Die oben beschriebenen Kompetenzen sind einfach notwendige Voraussetzung zum Lösen mathematischer Probleme und werden somit indirekt gemessen.

Aber da es auf der Erde fast nichts gibt, was es nicht gibt, sei am Beispiel der zentralen praktischen Mathematik-BAC-Prüfungen von Frankreich gezeigt, wie dort Werkzeugkompetenz im Umgang von digitalen Medien in der Abiturprüfung unmittelbar Prüfungsgegenstand wird.

Traditionell hat Frankreich sehr offene Festlegungen für Hilfsmittel. Die Beschränkung auf alles, was nicht größer als ein Stück A5-Papier ist, wurde unter Prüfungsverantwortlichen legendär und ist wohl das stärkste Gegenteil zu in Deutschland üblichen Restriktionen.
Ab 2008 wurde als integrativer Bestandteil der zentralen BAC-Prüfung ein praktischer Prüfungsteil eingeführt. Je vier Schüler arbeiten zeitgleich aber individuell unter Aufsicht eines Lehrers. Jeder Schüler nutzt einen PC mit Mathematiksoftware und/oder ein Handheld mit CAS. Jeder Schüler bearbeitet das gleiche Thema. Insgesamt werden im September des Schuljahres 100 Themen zentral veröffentlicht und grob beschrieben. Dann werden zentral 25 Themen davon am Prüfungstag mit der konkreten Problemstellung den Schulen bekannt gegeben. Jede Schule wählt davon wiederum maximal 10 Themen aus. Jedes Thema beinhaltet $\frac{1}{4}$ Theorie und $\frac{3}{4}$ Experimentierteil.
Der Lehrer beobachtet nun die Arbeit der Schüler und fertigt ein Beobachtungsprotokoll, welches u. a.

- die Kompetenz im Auswählen für das Problem relevanter Software
- die Kompetenz im Umgang mit der Software
- die Flexibilität beim Suchen nach Lösungswegen
- die Zielstrebigkeit / Planmäßigkeit im Entwickeln von Lösungsplänen
- die Flexibilität beim Auftreten technischer Probleme enthält.

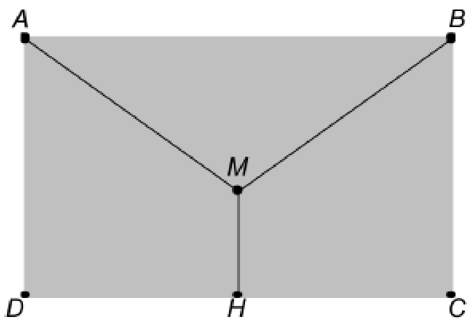
Die Festlegung der Teilnote der zentralen BAC-Prüfung in Mathematik erfolgt auf der Grundlage der Beobachtungsprotokolle des Lehrers, nicht eventueller „Lösungen“ des Prüfungsteilnehmers. (So sieht es jedenfalls die zentrale Vorgabe vor, die Praxis sei nach Aussagen französischer Kollegen auch nicht immer so.)
Ein Teil der Überprüfung dient damit wirklich der Werkzeugkompetenz. In besonderen Situationen kann der Lehrer auch technische Hilfe geben. Dafür sind auf dem Lehrerblatt aber sehr stringente Vorgaben enthalten, bis hin zu vorgegebenen Formulierungen für den Lehrer.

Beispiel 12
Schülerarbeitsblätter für die zentrale praktische BAC-Prüfung in Mathematik in Frankreich (2008):

Problème d'optimisation

Situation

On décide de mettre en place un système de collecte des eaux de pluie sur la façade d'une maison. Sur cette façade, de forme rectangulaire, deux tuyaux obliques doivent récupérer les eaux de pluies pour les déverser dans un tuyau vertical aboutissant à un réservoir.
On donne ci-dessous le plan de cette façade.



Sur ce plan, (MH) est la médiatrice de $[DC]$.

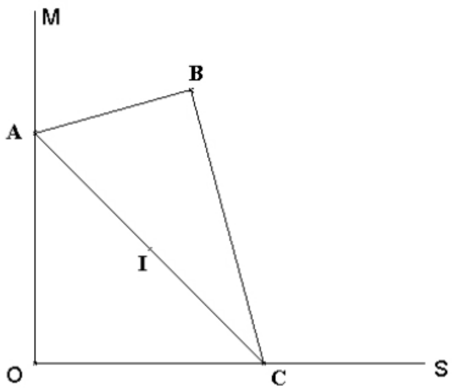
Il s'agit de trouver, sur la façade de cette maison, la position du point M qui minimise la longueur totale des tuyaux.

Compétences évaluées

Compétences TICE
– Construire une figure avec un logiciel de géométrie dynamique ;
– Tester les conjectures émises ;
– Traduire, à l'aide du logiciel, une situation géométrique par un graphique.

Compétences mathématiques
– Émettre une conjecture en croisant des informations variées : observation d'une figure dynamique, données numériques et graphiques ;
– Élaborer une stratégie permettant de déterminer l'*extremum* d'une fonction.

Situation



Le triangle ABC représente une équerre.
On s'intéresse à l'étude du lieu de certains points de l'équerre lorsque les points A et C glissent respectivement sur les demi-droites perpendiculaires $[OM)$ et $[OS)$.

1.3.7 Curriculare Voraussetzungen

Eine Ausrichtung auf Kompetenzentwicklung des Mathematikunterrichts erfolgt in fast allen Bundesländern. Dabei stellt sich die Frage, ob die aktuellen Curricula die Möglichkeiten von CAS angemessen berücksichtigen. Wie sollte sich ein Curriculum verändern, damit CAS zur Förderung dieser Kompetenzen sinnvoll eingesetzt werden kann? Ergeben sich dadurch auch neue inhaltliche Schwerpunktsetzungen?

Auch die Diskussionen im Workshop zu diesem Themenfeld stehen im unmittelbaren Bezug zum eingangs bereits benannten Zitat von Bert Waits:

"Some Mathematics becomes more important because technology requires it.
Some Mathematics becomes less important because technology replaces it.
Some Mathematics becomes possible because technology allows it."

Hinter dem Thema steht aber auch die Frage nach den allgemeinen Zielen des Mathematikunterrichts in einer Zeit, in der algorithmische Arbeiten besser, zuverlässiger und vor allem schneller durch Computer ausgeführt werden können.

Im sächsischen Lehrplan wurden solche Ziele schulartübergreifend wie folgt definiert und dann für die Schularten und Klassenstufen jeweils untersetzt:

- Entwickeln der Problemlösekompetenz
- Erziehung zum kritischen Vernunftgebrauch
- Entwickeln der Kompetenz zum sachgerechten Umgang mit der mathematischen Sprache
- Entwickeln des Anschauungsvermögens
- Entwickeln der Kompetenz zum sachgerechten Umgang mit grundlegenden mathematischen Objekten

Ein Curriculum im CAS-Zeitalter sollte deshalb dem Lehrer helfen, eine obere Grenze für händisch zu beherrschende Rechenverfahren festzulegen. Das wäre einerseits eine Hilfe für den Unterrichtsprozess und andererseits eine Absicherung für die Prüfungsvorbereitung.

Beispiel 13
Niveaubeschränkung für händisches Arbeiten im Lehrplan für das Gymnasium in Sachsen (2004):
Ermitteln von Ableitungen mit und ohne CAS
Ableitungsregeln, höhere Ableitungen
ohne CAS: ganzrationale Funktionen, Potenzfunktionen mit rationalen Exponenten,
einfache Verkettungen und Verknüpfungen mit $f(x) = e^x$ bzw. $f(x) = \sin(x)$

Gleichzeitig erscheint die curriculare Verankerung folgender mathematischer Inhalte gegenwärtig nahezu zwingend notwenig:

- Regression und Approximation
- Wachstumsprozesse
- Periodische Prozesse
- Matrizen als Werkzeug

1.3.8 Anwendungsbezug und mathematischer Gehalt

Schon mit Grafikrechnern lassen sich Anwendungsaufgaben oft ohne tiefere Analysiskenntnisse angemessen lösen. Die Tendenz, im Wesentlichen diesen Aufgabentyp in der Abiturprüfung zu stellen, birgt die Gefahr in sich, dass klassische mathematische Inhalte verloren gehen. Wie können wir vorbeugen – was ist letztendlich eine „gute“ CAS-Aufgabe?
Auch bei der Diskussion zu diesem Themenfeld kann das o. g. Waits-Zitat nützlich sein.

Die Gestaltung zentraler Abiturprüfungen befindet sich in einem grundlegenden Wandlungsprozess. Auch, aber nicht nur wegen der immer stärkeren Verfügbarkeit moderner digitaler Mathematikwerkzeuge. Allein TI-Nspire™-CAS wird neue Fragen aufwerfen, ermöglicht ganz andere Problemlösungszugänge, die mit einem herkömmlichen CAS nicht mehr vergleichbar sind. Aber das wäre ein eigenes Thema.

2 Themenfelder

2.1 Dokumentation der Aufgabenbearbeitung

Teilnehmer: ***Ewald Bichler (BY), Steffen Böhlke (SN), Ralf Erens (BW), Hubert Langlotz (TH), Peter Lorenz (MV)***

Zielsetzung: *Durch die Nutzung von CAS im Zentralabitur entsteht für Schüler und Lehrer die Frage, wie der Lösungsweg nachvollziehbar und damit auch bewertbar darzustellen ist. Anhand von Beispielen soll diese Frage in der Arbeitsgruppe diskutiert und Mindestanforderungen an eine angemessene Dokumentation erstellt werden.*

Mindestanforderungen an eine angemessene Dokumentation von Lösungen

1. In der Dokumentation müssen die Lösungsschritte nachvollziehbar erläutert werden. Dies ist ein Aspekt, den die Lehrkraft mit der Klasse festlegen und im Unterricht thematisieren muss. Offizielle Musterlösungen sollten daher nicht zu detailliert sein, um diese Möglichkeit zu erhalten.

2. Die mathematische Fachsprache bei Termen, Gleichungen, usw. sollte verwendet und möglichst auf rechnerspezifische Angaben verzichtet werden.

3. Es muss ersichtlich sein, wo ein Werkzeug wie benutzt worden ist.

4. Die Dokumentation der Lösungsschritte erfolgt auf Papier. Bei Druckerausgabe ist diese durch den Schüler zu unterschreiben.

5. Rechnerausgaben müssen unter Bezug auf die Aufgabenstellung angemessen interpretiert werden.

Daraus resultierende Empfehlungen zur Formulierung von Prüfungsaufgaben

6. Eigenständige Aufgabenstellungen sollten eine Vorwegnahme des Ergebnisses möglichst vermeiden und offener formuliert werden. Aber, wenn der Nachweis einer Eigenschaft ggf. mit Zwischenschritten gewünscht wird, sollte dies dezidiert in der Aufgabenformulierung zum Ausdruck gebracht werden.

   Beispiel:
   Statt: „Weisen Sie nach, dass die Geraden windschief sind. Berechnen Sie den Abstand der beiden Geraden."
   Besser: „Untersuchen Sie die Lagebeziehung der beiden Geraden und bestimmen Sie Abstand bzw. Schnittpunkt."

7. Untersuchungs- und Beschreibungsaufgaben sollten einen größeren Rahmen einnehmen, um den höheren Anteil von Modellierungsprozessen im Unterricht widerzuspiegeln.

Beispiel:
„Beschreiben Sie, wie Sie diese Simulation mithilfe eines GTR, eines CAS oder eines anderen Zufallsgenerators umsetzen können.“

8. Die aus Operatoren resultierenden Anforderungen an die Lösungsverfahren und deren Dokumentation müssen den Schülern vertraut sein.

Erläuterungen:

Zu 1:

Wird eine im Zentralabitur erstellte Arbeit zunächst von der unterrichtenden Lehrkraft korrigiert, so sind dies optimale Bedingungen für die Frage, was genau nachvollziehbar bedeutet, sowohl für die Schüler als auch für die Lehrkraft. Eine nicht zu enge Korrekturvorgabe bezüglich der Verteilung von Bewertungseinheiten unterstützt dies. Dokumentationsverfahren erwachsen aus dem Unterricht.
Bei anonymisierten Fremdkorrekturverfahren mag die Frage, was genau nachvollziehbar genug ist, unter Umständen problematischer sein.

Zu 2:

Eine Angabe von Formulierungen, die Befehlen bzw. Syntaxvorschriften entsprechen, ist nicht erstrebenswert. Moderne CAS-Systeme gleichen sich in der Eingabe der Symbolik der mathematischen Notation weitestgehend an und werden dies auch in Zukunft tun.

Zu 3:

Wenn eine Gleichung mithilfe eines CAS gelöst worden ist, so muss dies angegeben werden. Analog gilt dies für alle anderen Tätigkeiten, in denen der Rechner zum Einsatz kommt. Wie die konkrete Ausgestaltung aussieht, obliegt der Lehrkraft.

Zu 4:

Eine rein elektronische Abgabe erscheint (noch) nicht realisierbar und anfällig für Manipulationen. Eine reine Historie der Eingaben in ein Computersystem reicht nicht aus, es werden stets zusätzliche Kommentare nötig sein. Fertigt dies der Schüler etwa mithilfe einer Software an, so kann diese Dokumentation auf einem Drucker ausgegeben und handschriftlich unterzeichnet werden.

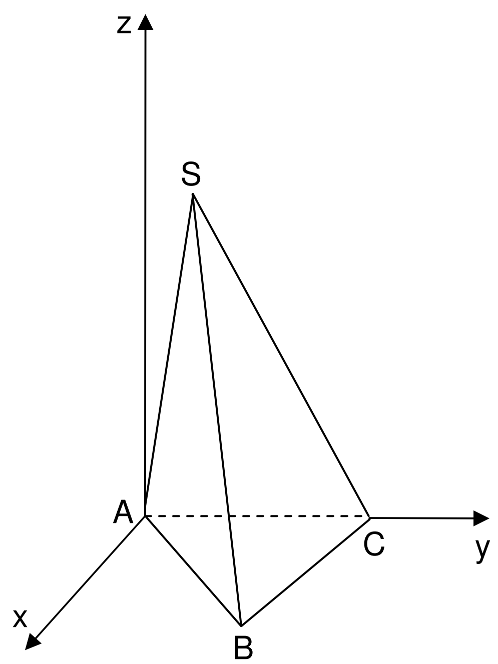
Zu 5:

Ob nun numerisch oder symbolisch mit einem CAS-System gerechnet wird oder ob ein Geometriesystem verwendet wird, die Ausgaben sind stets kritisch zu reflektieren und bezogen auf den Kontext der Aufgabenstellung zu interpretieren, hinsichtlich ihrer Genauigkeit wie hinsichtlich ihrer Aussagekraft. Diese Tätigkeit muss für einen Schüler, der ein solches modernes Medium verwendet, selbstverständlich sein und bedarf keiner ausdrücklichen Erwähnung.

Zu 6:

Am Beispiel einer Aufgabe aus dem Thüringer Leistungskursabitur 2007 soll die Problematik verdeutlicht werden *(Die vollständige Aufgabe mit Lösungen und Kommentaren befindet sich im Anhang.).*

Aufgabe:
Gegeben seien die Punkte $A(0;\,0;\,0)$, $B(4;\,5;\,0)$, $C(0;\,6;\,0)$ und $S(2;\,3;\,12)$. Diese Punkte sind die Eckpunkte einer dreiseitigen Pyramide.



(Skizze nicht maßstabgerecht)

a) Zeigen Sie, dass die Mittelpunkte der Kanten $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{SC}$ und $\overline{AS}$ ein Parallelogramm, jedoch kein Rechteck bilden! $\boxed{\text{3 (BE)}}$

b) Die Gerade g_1 verläuft durch die Punkte A und C, die Gerade g_2 enthält die Punkte S und B. Weisen Sie nach, dass die Geraden windschief sind! Berechnen Sie den Abstand dieser beiden Geraden! $\boxed{\text{4 (BE)}}$

Ergänzung im CAS-Abitur:
Bestimmen Sie die Koordinaten mindestens eines Lotfußpunktes dieser kürzesten Verbindung beider Geraden!

Lösung zu Aufgabenteil a) – mit Nutzung des CAS-Systems

1. $\overrightarrow{OM_1} = \frac{1}{2} \cdot \left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{5}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $\overrightarrow{OM_2} = \frac{1}{2} \cdot \left(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{11}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$

2. $\overrightarrow{OM_3} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OS} + \overrightarrow{OC}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{9}{2} \\ 6 \end{pmatrix}$ $\qquad \overrightarrow{OM_4} = \frac{1}{2} \cdot \left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OS}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{2} \\ 5 \end{pmatrix}$

Nachweis Parallelogramm

3. $\overrightarrow{M_{AB}M_{BC}} = \overrightarrow{OM_{BC}} - \overrightarrow{OM_{AB}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\qquad \overrightarrow{M_{AS}M_{SC}} = \overrightarrow{OM_{SC}} - \overrightarrow{OM_{AS}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$
4. $\overrightarrow{M_{AB}M_{BC}} = \overrightarrow{M_{AS}M_{SC}}$
5. Somit besitzt das Viereck $M_{AB}M_{BC}M_{SC}M_{AS}$ ein paar paralleler und gleichlanger Seiten und ist damit ein Parallelogramm.

Nachweis kein Rechteck

6. $\overrightarrow{M_{AB}M_{AS}} = \overrightarrow{OM_{AS}} - \overrightarrow{OM_{AB}} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}$
7. $\overrightarrow{M_{AB}M_{BC}} \circ \overrightarrow{M_{AB}M_{AS}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix} = -3 \neq 0$
8. Damit schließen die Seiten $\overline{M_{AB}M_{BC}}$ und $\overline{M_{AB}M_{AS}}$ keinen rechten Winkel ein. Also handelt es sich nicht um ein Rechteck.

Schülerlösungen (mit Nutzung des CAS-Systems) zu Áufgabenteil a:

Bei beiden Schülerlösungen wird deutlich, dass durch die Vorwegnahme der Lösung nicht immer nachvollziehbar ist, was der Schüler wirklich gemacht hat.

Schüler 1:

$M_{AB} = (2 / 2{,}5 / 0)$ $\qquad M_{BC} (2 / 5{,}5 / 0)$

$M_{SC} (1 / 4{,}5 / 6)$ $\qquad M_{AS} (1 / 1{,}5 / 6)$

$M_{AB} = M_1 \qquad M_{BC} = M_2 \qquad M_{SC} = M_3 \qquad M_{AS} = M_4$

$\overrightarrow{M_1M_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{M_1M_4} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{M_3M_4} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{M_2M_3} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{M_1M_2}$ und $\overrightarrow{M_3M_4}$ sind kollinear und gleich lang
$\overrightarrow{M_1M_4}$ und $\overrightarrow{M_2M_3}$ " " " "

=> die sich gegenüberliegenden Seiten sind sowohl parallel als auch gleich lang

=> das Viereck ist ein Parallelogramm

wenn es ein Rechteck sein würde, müsste gelten:

$\overrightarrow{M_1M_2} \circ \overrightarrow{M_1M_4} = 0$

Aber: $\overrightarrow{M_1M_2} \circ \overrightarrow{M_1M_4} = -3$ -> kein rechter Winkel
-> kein Rechteck

Schüler 2:

Mittelpunkt von $\overline{AB}$: $P_1(2/\frac{5}{2}/0)$

— " — $\overline{BC}$: ~~$P_2(-2/\frac{1}{2}/0)$~~ $P_2(2/\frac{11}{2}/0)$

— " — $\overline{SC}$: ~~P_3~~ $P_3(1/\frac{9}{2}/6)$

— " — $\overline{AS}$: $P_4(1/\frac{3}{2}/6)$

Parallelogramm: gegenüberliegende Seiten gleichlang:

$\rightarrow |\overrightarrow{P_1P_2}| = |\overrightarrow{P_3P_4}|$ und $|\overrightarrow{P_1P_4}| = |\overrightarrow{P_2P_3}|$

TI: true → Parallelogramm

Rechteck: alle Winkel 90°

$\sphericalangle P_2P_1P_4$:

$\overrightarrow{P_1P_4} \bullet \overrightarrow{P_1P_2} = -3 \neq 0 \rightarrow$ Winkel $\neq 90°$

→ kein Rechteck

Zu den Zeilen 6 und 7 der Schülerlösung:

Wurde die Gleichheit der Beträge wirklich überprüft?
Wurde tatsächlich das Richtige in den TI eingegeben?

Zur Zeile 10 der Schülerlösung:

Wurden die Vektoren $\overrightarrow{P_1P_4}$ und $\overrightarrow{P_1P_2}$ richtig gebildet?

Es gilt: $$\overrightarrow{P_1P_4} \circ \overrightarrow{P_1P_2} = \left(\overrightarrow{OP_4} - \overrightarrow{OP_1}\right) \circ \left(\overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1}\right) = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = -3$$

aber auch: $$\left(\overrightarrow{OP_1} - \overrightarrow{OP_4}\right) \circ \left(\overrightarrow{OP_1} - \overrightarrow{OP_2}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} = -3$$

Fragen, die diskutiert werden könnten, sind z. B.:
Werden Schülern, die die Vektoren $\overrightarrow{P_1P_4}$ und $\overrightarrow{P_1P_2}$ falsch bilden und dies durch Angabe des Zwischenergebnisses zeigen (Schüler ohne CAS-System müssen bei Verfolgung dieses Lösungsweges dieses Zwischenergebnis notieren!) mit Punktabzug bestraft?
Wie wird bei einem Schüler verfahren, der mit CAS-System arbeitet und diese Zwischenlösungen nicht angibt?

Lösung zu Aufgabenteil b – siehe auch Anhang

1. $g_1 = g(AC)$ $\qquad \vec{x} = \overrightarrow{OA} + \lambda \cdot \overrightarrow{AC} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\qquad \lambda \in R$

2. $g_2 = g(SB)$ $\qquad \vec{x} = \overrightarrow{OB} + \eta \cdot \overrightarrow{SB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + \eta \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix} \quad \eta, \mu \in R$

3. $\overrightarrow{AC} \overset{?}{=} \sigma \cdot \overrightarrow{SB}$ $\qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \overset{?}{=} \sigma \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix}$ $\qquad \begin{matrix} 0 = \sigma_x \\ \Rightarrow 6 = \sigma_y \\ 0 = \sigma_z \end{matrix}$ $\qquad \Rightarrow \sigma_x = 0 \neq 6 = \sigma_y$

4. Die beiden Richtungsvektoren sind also nicht parallel. Demzufolge können die beiden Geraden nur windschief sein oder sie schneiden sich.

5. Gleichsetzen der Geradengleichungen: $\qquad \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix}$

*Dass dieses Gleichungssystem keine Lösung besitzt, ist durch die Aufgabenstellung gegeben. Also ist bekannt, dass die Eingabe dieses Gleichungssystems in den TI das Ergebnis **false** liefern wird. Woher wissen wir nun, dass der Schüler das Gleichungssystem tatsächlich in den TI eingegeben hat?*
Sollte der Schüler dieses Gleichungssystem per Hand lösen können und sollen?

6. $$\begin{aligned} I: &\quad 0 = 4 + \mu \quad \Rightarrow \mu = \text{-}4 \\ II: &\quad 6\lambda = 5 + \mu \\ III: &\quad 0 = -6\mu \quad \Rightarrow \mu = 0 \end{aligned}$$

7. Es gibt somit kein reelles μ, das alle drei Gleichungen erfüllt. Das Gleichungssystem ist also nicht lösbar, demzufolge sind die Geraden g_1 und g_2 windschief.

Schülerlösungen (mit Nutzung des CAS-Systems) zu Aufgabenteil b:

Schüler 1:

$g_1: \quad \vec{x} = r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad g_2: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}$

Richtungsvektoren sind eindeutig nicht kollinear
-> Geraden können nicht parallel sein

g_1 und g_2 gleichsetzen

$r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}$ => keine Lösung

da die Geraden sich weder schneiden noch parallel sind, müssen sie Windschief zueinander sein

Schüler 2:

e) $g_1: \vec{x} = r \cdot (\vec{OC} - \vec{OA}) = r_1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$

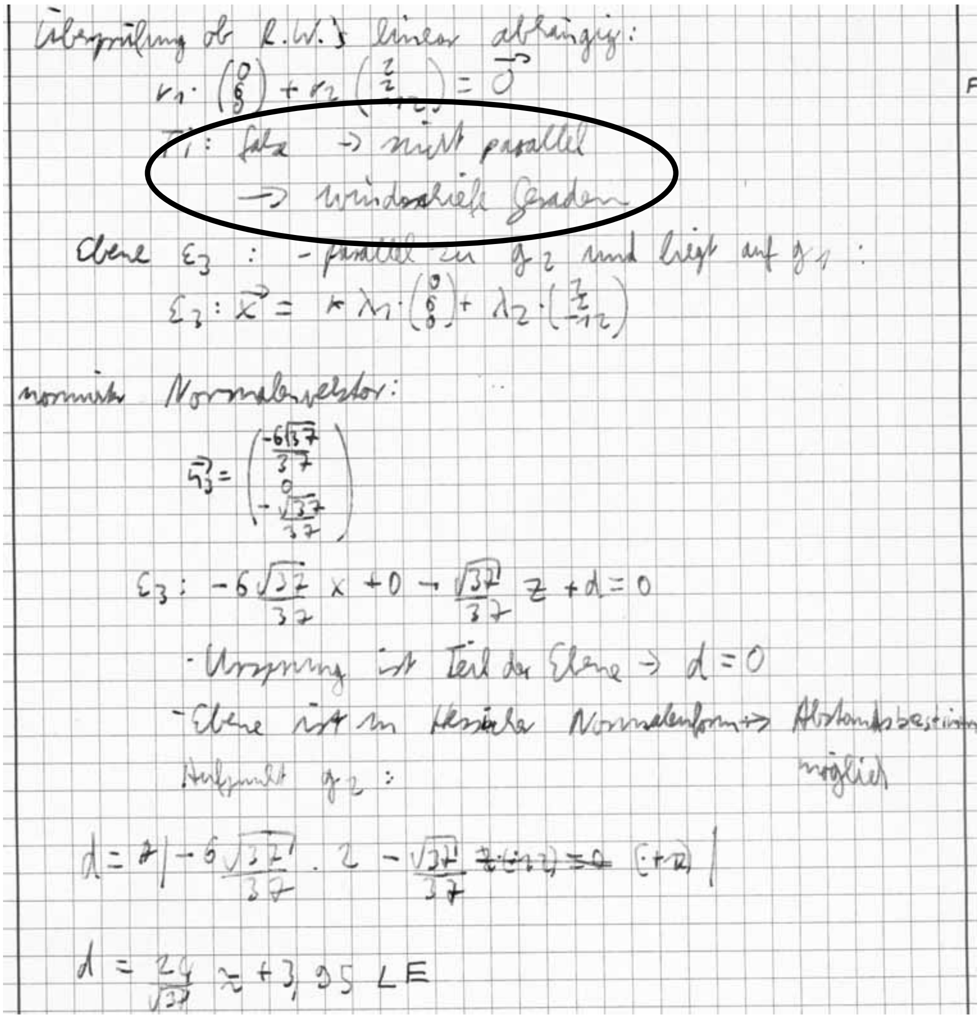
$g_2: \vec{x} = \vec{OS} + s_2 \cdot (\vec{OB} - \vec{OS}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 12 \end{pmatrix} + r_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -12 \end{pmatrix}$

Nachweis windschief g_1 g_2:
Untersuchung ob Schnittpunkt vorhanden ist:

$\vec{x}_{g_1} = \vec{x}_{g_2}$

TI: false → keine Schnittpunkte

Wurde wirklich etwas in den TI eingegeben?


Überprüfung ob R.V.'s linear abhängig:

$r_1 \cdot \begin{pmatrix}0\\8\\0\end{pmatrix} + r_2 \begin{pmatrix}2\\2\\-12\end{pmatrix} = \vec{0}$

TI: false → nicht parallel

→ windschiefe Geraden

Ebene ε_3: - parallel zu g_2 und liegt auf g_1:

$\varepsilon_3: \vec{x} = \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix}0\\8\\0\end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix}2\\2\\-12\end{pmatrix}$

normierter Normalenvektor:

$\vec{n_3} = \begin{pmatrix}-\frac{6\sqrt{37}}{37}\\0\\-\frac{\sqrt{37}}{37}\end{pmatrix}$

$\varepsilon_3: -6\frac{\sqrt{37}}{37}x + 0 - \frac{\sqrt{37}}{37}z + d = 0$

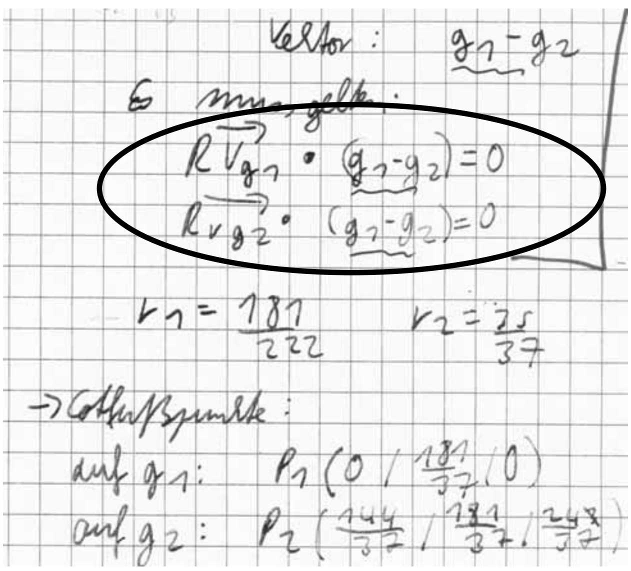
- Ursprung ist Teil der Ebene → $d = 0$
- Ebene ist in Hesse'scher Normalenform → Abstandsbestimmung möglich

Aufpunkt g_2:

$d = \left| -6\frac{\sqrt{37}}{37} \cdot 2 - \frac{\sqrt{37}}{37} \cancel{\cdot (-12) = 0} \; (-12) \right|$

$d = \frac{24}{\sqrt{37}} \approx 3,95$ LE

Die mathematische Form wird hier stark vernachlässigt. Die Differenz zweier Geraden wird gebildet, allerdings ist zu vermuten, dass der Schüler die Differenz der Richtungsvektoren meint. Wie gehen wir mit derartigen Formverstößen um?


Vektor: $g_1 - g_2$

⊥ muss gelten:

$\overrightarrow{RV_{g_1}} \circ (g_1 - g_2) = 0$

$\overrightarrow{RV_{g_2}} \circ (g_1 - g_2) = 0$

$r_1 = \frac{181}{222}$ $r_2 = \frac{25}{37}$

→ Lotfußpunkte:

auf g_1: $P_1(0 / \frac{181}{37} / 0)$

auf g_2: $P_2(\frac{144}{37} / \frac{181}{37} / \frac{248}{37})$

Zu 7:

Folgende Abituraufgabe aus Sachsen verdeutlicht im letzten Aufgabenpunkt (fett gedruckt hervorgehoben) eine mögliche Beschreibungsaufgabe *(Die vollständige Aufgabe befindet sich im Anhang.).*

Anlässlich eines Feiertages wird ein Gebäude durch zwei Laser L_1 und L_2 angestrahlt.

Jeweils im Rhythmus von einer Minute startet ein Computer den Bewegungs- und Farbablauf der beiden Laser zeitgleich neu. Diese Abschnitte werden im Folgenden als Sequenzen bezeichnet. Es stehen für jeden Laser nur die zwei Farben violett und gelb zur Verfügung. Der Computer legt die Reihenfolge jeweils zufällig fest, es ist also auch möglich, dass bei aufeinander folgenden Sequenzen die Farbe nicht wechselt.

2.4 Bei einer Einstellung des Computers tritt violettes Licht beim Laser L_2 mit der Wahrscheinlichkeit 0,35 auf.

Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, dass Laser L_2 bei 10 aufeinander folgenden Sequenzen häufiger gelb zeigt, als man erwarten kann.

(2 (BE))

2.5 Der Laser L_1 wird bei einer anderen Einstellung des Computers in 10 Stichproben mit jeweils 10 Sequenzen beobachtet und es wird notiert, bei wie vielen Sequenzen davon jeweils die Farbe violett auftrat.

Anzahl der Sequenzen mit violettem Licht in der Stichprobe	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Anzahl der Stichproben, für die das zutrifft	0	0	1	3	3	1	2	0	0	0	0

Begründen Sie, dass für das Ereignis „Laser L_1 zeigt violettes Licht“ auf der Grundlage der Stichproben eine Wahrscheinlichkeit von $\frac{2}{5}$ angenommen werden kann.

Der Zufallsversuch „Entscheidung für violettes oder gelbes Licht beim Laser L_1“ soll für 200 Sequenzen simuliert werden.

Beschreiben Sie, wie Sie diese Simulation mithilfe eines GTR, eines Computer-Algebra-Systems oder eines anderen Zufallsgenerators umsetzen können.

(4 BE)

Erwartungsbild

2.4 Ansatz für Wahrscheinlichkeit
Wahrscheinlichkeit: $P(Y \geq 7) \approx 0{,}5138$ (2 BE)

2.5 Begründung
z. B.: Es wurden 10 Stichproben mit je 10 Sequenzen, also insgesamt 100 Sequenzen beobachtet. Davon trat 40 Mal violettes Licht auf. Die Wahrscheinlichkeit für violettes Licht kann deshalb auf $\frac{2}{5}$ geschätzt werden. (2 BE)

Beschreibung

z. B.: Mit dem Zufallsgenerator werden 200 Zufallszahlen von 1 bis 5 ermittelt. Es gilt die Regel: Wurde eine 1 oder 2 ermittelt, so wird die Farbe violett zugeordnet, bei allen anderen Versuchsausgängen gelb. (2 BE)

(4 BE)

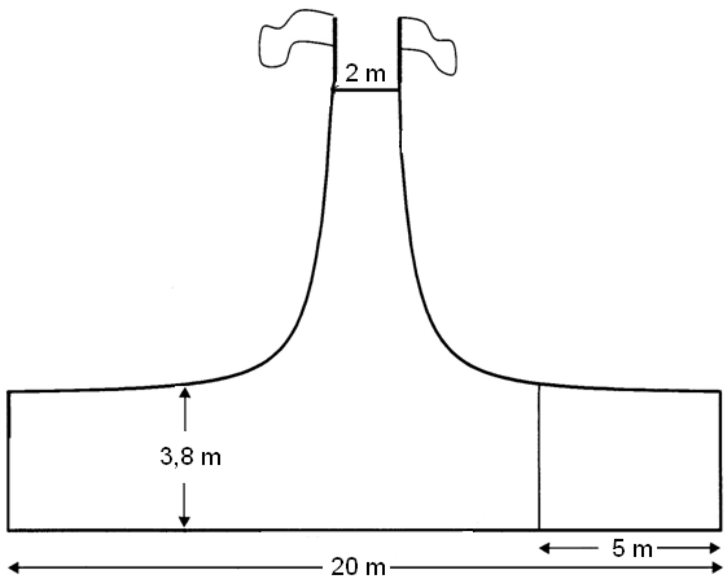
Zu 8:

Bereits eine Diskussion in kleinem Kreise zeigt, dass verschiedene Lehrkräfte verschiedene Auffassung davon haben, was unter „Berechne“, „Bestimme“ oder ganz allgemein unter einem „nachvollziehbaren Lösungsweg“ zu verstehen ist. Insofern ist es fraglich, ob eine ausführliche Operatorenliste hier hilfreich sein kann, es besteht sogar die Gefahr, dass diese zu negativen Auswirkungen führen kann. Wesentlich ist, dass es den Schülern stets klar ist, was von ihnen in den jeweiligen Aufgabenstellungen erwartet wird. Dies ist eine Fähigkeit, die aus dem Unterricht mit CAS erwächst und folglich in der Hand der Lehrkraft liegt, die im Idealfall die Prüfungsaufgaben auch korrigiert.

Folgende Aufgabe veranschaulicht dies:

Aufgabe 1

Gegeben ist der Querschnitt eines drehsymmetrischen Zirkuszelts. Das Zelt ist 11 m hoch und besitzt in dieser Höhe als Abschluss ein kreisförmiges Metallgitter von 2 m Durchmesser. Zur Sicherung der Stabilität befinden sich im Innern des Zelts Pfosten. Zwei davon sind im Querschnitt sichtbar. Sie ragen 3,8 m aus dem Boden heraus. Alle weiteren Angaben sind der Zeichnung zu entnehmen.



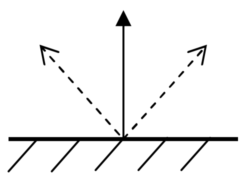
a) Der hyperbelförmige Teil des Querschnitts lässt sich durch eine Funktion f mit der Gleichung

$$f(x) = a + \frac{b}{x^2}$$

näherungsweise beschreiben.
Bestimmen Sie eine Funktionsgleichung.
Berechnen Sie die Gesamtfläche des Querschnitts. [Teilergebnis: a = 3,5; b = 7,5]

(6 VP)

b) Für eine Lichtshow ist in der Mitte der Zirkusarena ein Laser in den Boden eingelassen, der senkrecht nach oben zeigt und sich um bis zu 45° nach links und rechts schwenken lässt (siehe Skizze).
Untersuchen Sie, welcher Anteil der Querschnittsfläche von dem Laserstrahl überstrichen wird.



(6 VP)

c) Zum großen Finale der Vorstellung steigt ein kugelförmiger gasgefüllter Ballon mit dem Radius 1,3 m von der Mitte des Zeltbodens aus senkrecht nach oben.
In welcher Höhe berührt der Ballon das Zeltdach? Dokumentieren Sie Ihren Rechenweg.
(6 VP)

Kommentar: Bei direkten Fragen sollten zusätzlich Rechenwege oder Begründungen eingefordert werden.

Lösungen der Aufgabe 1

a) $f(x) = a + \frac{b}{x^2}$; $f(1) = 11$ und $f(5) = 3,8 \Rightarrow 11 = a + b$ und $3,8 = a + \frac{b}{25} \Rightarrow a = 3,5$ und $b = 7,5$

Die Gleichung der gesuchten Funktion lautet: $f(x) = 3,5 + \frac{7,5}{x^2}$.

$Q = 2 \cdot (11 + \int_1^{10} f(x)\,dx) = 98,5$

Die Querschnittsfläche hat den Inhalt 98,5 Flächeneinheiten.

b) Schnittpunkt des Graphen von $y = x$ mit dem Schaubild von $f(x)$

$x = f(x) \Leftrightarrow x^3 - 3,5x^2 - 7,5 = 0 \Leftrightarrow x_1 \approx 3,97$

$A_1 = 2(10,5 + \int_1^{3,97} (f(x) - x)dx) = 38,25$; $\frac{38,25}{98,5} \approx 0,389$

Die vom Laser überstrichene Fläche hat den Inhalt 38,25 Flächeneinheiten.
Ihr Anteil an der Gesamtfläche beträgt ca. 38,9%.

c) Die Normale an das Schaubild von f in $B(a \mid f(a) = 3,5 + \frac{7,5}{a^2})$ hat die Gleichung

$n(x) = \frac{a^3}{15}(x - a) + 3,5 + \frac{7,5}{a^2}$

Für den Mittelpunkt M der Kugel gilt $M\left(0 \,\middle|\, -\frac{a^4}{15} + 3,5 + \frac{7,5}{a^2}\right)$.

$d(B, M) = \sqrt{a^2 + \left(-\frac{a^4}{15}\right)^2} = 1,3$ liefert $a \approx 1,28$ und damit ist $B(1,28 \mid 8,02)$.

Der Ballon berührt in ca. 8 m Höhe das Zeltdach.

2.2 Gleiche Aufgabenstellung für CAS und NON-CAS

Teilnehmer: ***Volker Bock (ST), Ulrich Burger (Hessen), Gereon Dietz (HE), Rainer Heinrich (SN), Christian Kaßebaum (HB), Andreas Pallack (NW), Mario Poethke (MV), Ralf Prüter (BB), Christian Scheungrab (BY)***

Zielsetzung: *Beim Zentralabitur werden gelegentlich auch (fast) identische Aufgaben für die Bearbeitung mit CAS und ohne CAS gestellt. Ist das gerechtfertigt oder sollte man besser andere Modelle der Aufgabenkonstruktion verwenden?*

1 Situation

Der Einsatz eines CAS trägt unstrittig zur Entwicklung der Unterrichtskultur im Mathematikunterricht bei, insbesondere beim Entdeckenden Lernen, Experimentieren und Visualisieren. Insbesondere wird das inhaltliche Verständnis unterstützt. Ein CAS wirkt dabei als Katalysator der Veränderung dieser Unterrichtskultur. Ebenso klar ist aber auch die Einsicht, dass durch den bloßen Einsatz eines CAS allein diese gewünschten Veränderungen nicht nachhaltig erreicht werden können.
Es ist erkennbar, dass sich gegenwärtig in allen Bundesländern darum bemüht wird, diese Veränderungen zu erreichen und zwar unabhängig davon, welche technologischen Hilfsmittel eingesetzt werden.

In Prüfungssituationen gibt es Bundesländer, die nahezu identische CAS bzw. NON-CAS Aufgaben stellen und solche, die stringent unterschiedliche Prüfungsarbeiten entwickeln. Zunächst sollen in einer tabellarischen Übersicht mögliche Gründe aufgeführt werden, die für die Entscheidung zugunsten der einen oder anderen Variante Ausschlag gebend gewesen sein könnten.

	Argumente für unterschiedliche Aufgabenstellungen	**Argumente gegen unterschiedliche Aufgabenstellungen**
Organisatorische Argumente	<u>Gerechtigkeit:</u> Diskussionen, ob diese oder jene Schüler eventuell Vor- oder Nachteile gehabt haben könnten, werden vermieden.	<u>Gerechtigkeit:</u> Die höhere Gerechtigkeit ist nur scheinbar, denn bei unterschiedlichen Aufgabenstellung können auch unterschiedliche Schwierigkeitsgrade auftreten (siehe Beispiel 1 aus 1.3.3, S. 11)
	<u>Rechtfertigung</u>: Wenn für den (finanziell teuren) Einsatz von CAS geworben wird, muss dieser auch in der Prüfung verwendet werden.	<u>Rechtfertigung:</u> Der Aufwand zur Erstellung unabhängiger Prüfungsaufgaben ist sehr groß.
	<u>Realitätsnähe:</u> Durch den Einsatz von CAS ist es besser möglich, realistischere Daten zu verwenden. Der Rechenaufwand tritt in den Hintergrund.	
	<u>Unterschiedliche Leistungsfähigkeit der Hilfsmittel</u>	

Inhaltliche Argumente		Ziele und Kompetenzen: Im Mathematikunterricht gibt es für alle Schüler die gleichen Zielsetzungen bei den zu behandelnden Inhalten und den zu entwickelnden Kompetenzen
	Typische Aufgaben: CAS-typische Anteile sind leichter realisierbar.	Typische Aufgaben: Jede Gruppe hat zwar spezifische Lösungsverfahren, bewältigt aber die gleichen mathematischen Probleme.
		Notwendigkeit: Es gibt kaum CAS-spezifische Mathematik, die in einer Abiturarbeit geprüft werden könnte.

Auffällig in dieser Übersicht ist, dass es aus mathematischer Sicht kaum einen Differenzierungsbedarf gibt, denn zentrale Prüfungen dienen der Überprüfung der im Mathematikunterricht erworbenen Kompetenzen. Prüfungsgegenstand sind die Inhalte und Methoden der Mathematik und nicht primär CAS. Hingegen gibt es gerade bei organisatorischen Argumenten ein Übergewicht für unterschiedliche Aufgabenstellungen, auch wenn das Argument des (zu) großen Aufwands bei der Aufgabenerstellung ein starkes Gewicht hat.
Die Sammlung von Argumenten verdeutlicht, dass es keine klare Tendenz für die Bevorzugung der einen oder anderen Variante gibt.

Bei den inhaltlichen Argumenten wurde aufgeführt, dass insbesondere die zu behandelnden Inhalte und die zu entwickelnden Methoden für alle Schüler die gleichen sind.
In Prüfungssituationen werden aber methodische Prozesse wie beispielsweise das Modellieren oder das Problemlösen traditionell weniger berücksichtigt. Das Ziel von Abiturprüfungen im Rahmen der Umsetzung der zu erwartenden nationalen Bildungsstandards ist aber der Nachweis von möglichst vielen Kompetenzen. Das betrifft sowohl die CAS als auch die NON-CAS-Population. Es kann deshalb nicht sein, dass bei Schülern ohne CAS eher traditionelle Elemente und Algorithmen und bei Schülern mit CAS beispielsweise eher Modellierungen geprüft werden. Bei einem solchen Vorgehen besteht die Gefahr, CAS-Abiturarbeiten aus formalen Gründen schwerer als NON-CAS-Abiturarbeiten zu gestalten (siehe Beispiel 1 aus 1.3.3, S.11).

Unabhängig davon, ob gleiche oder unterschiedliche Aufgaben gestellt werden, sollte die Gleichwertigkeit anhand der in den Aufgabenstellungen benötigten Kompetenzen verglichen werden. Das kann z. B. anhand des folgenden Rasters erfolgen:

Inhaltsbezogene Kompetenzen, z. B.	Funktionaler Zusammenhang	Approximation	Räumliches Strukturieren	Daten und Zufall	Messen	Algorithmen
Aufgabe mit CAS						
Aufgabe ohne CAS						

Prozessbezogene Kompetenzen, z. B.	Argumentieren	Problemlösen	Modellieren	Darstellungen verwenden	Symbole, Verfahren und Werkzeuge verwenden	Kommunizieren und Kooperieren
Aufgabe mit CAS						
Aufgabe ohne CAS						

Für die Einzelaufgaben können die Kompetenzen in den entsprechenden Spalten angekreuzt, ggf. auch gewichtet werden. Zielstellung sollte sein, innerhalb der gesamten Abiturarbeit ein ausgewogenes Verhältnis zwischen den prozessbezogenen mathematischen und den inhaltlichen mathematischen Kompetenzen zu erreichen. Gewisse Häufungen bzw. Fehlstellen können auftreten, sollten aber auch Anlass zur kritischen Betrachtung und ggf. Überarbeitung von Aufgaben(teilen) sein.

2 Aufgabenkultur

Entscheidender aber ist eine schrittweise Änderung der Aufgabenkultur nicht nur im Unterricht, sondern auch in Prüfungsaufgaben. Ziel ist die stärkere Wichtung von Elementen zur Prüfung des Kompetenzerwerbs bezogen auf die allgemeinen mathematischen Kompetenzen gegenüber stark algorithmisch-kalkülhaften Prüfungselementen.

Einige Beispiele für das Argumentieren, Beschreiben und Analysieren können dies verdeutlichen:

a) Wie verändert sich der Graph der Funktion $f(x) = e^{bx^2}$, wenn man b verändert? Beschreiben Sie, wie Sie die Fragestellung durch experimentelles Arbeiten, z. B. mit dem GTR untersuchen können.

b) Gibt es einen Punkt, den alle Graphen der Funktionsschar $f_p(x) = \sqrt{px - 4p + 5}$ gemeinsam haben? Beschreiben Sie, wie man zu einer begründeten Vermutung kommen kann.

c) Beschreiben Sie, wie Sie diese Simulation mithilfe eines GTR, eines Computer-Algebra-Systems oder eines anderen Zufallsgenerators umsetzen können.

Stärker als bisher üblich sollten Aufgabenstellungen Tätigkeiten berücksichtigen wie
- Begründen
- Beschreiben und erläutern
- Argumentieren
- Modellieren

Aufgaben sollten häufiger Inhalte unterschiedlicher mathematischer Teilgebiete vernetzen und in Sachzusammenhängen eingeordnet sein. Sie sollten stärker auf inhaltliches Verständnis abzielen.

Beispiel:

klassische Aufgabenstellung:
"Ermitteln Sie für eine gegebene Funktion die Wendestelle."

Im Sachzusammenhang:
"Ermitteln Sie die Stelle der Profillinie eines Skihanges, an dem der Hang das maximale Gefälle besitzt."

Der mathematische Inhalt beider Aufgabenstellungen ist derselbe, durch die Einbindung in einen Sachzusammenhang wächst allerdings der Anspruch der Aufgabenstellung für den Schüler, da er sich gedanklich in einem Modell bewegen muss. Außerdem werden bei eingekleideten Aufgaben höhere Forderungen an die Lesekompetenz der Schüler gestellt. Bei der Konzeption der Gesamtarbeit muss deshalb durch die Aufgabensteller berücksichtigt werden, dass der Schwierigkeitsgrad der Prüfungsarbeit insgesamt nicht unverhältnismäßig hoch wird.

Diese Forderungen an die Aufgabenkultur gelten sowohl für CAS als auch für NON-CAS Aufgaben.

Beispiel einer differenzierten Aufgabenstellung für die Variante *wissenschaftlicher Taschenrechner* (TR) und die Variante *grafikfähiger Taschenrechner* (GTR) oder CAS

Das Beispiel entstammt einer Prüfungsarbeit für das erhöhte Anforderungsniveau in Hessen

A Variante für wissenschaftlichen Taschenrechner

In einem Krankenhaus wurde für ein Medikament der zeitliche Verlauf der Wirkstoffkonzentration im Blut von Patienten untersucht. Dabei wurde das Medikament einem Teil der Patienten intravenös (durch direktes Spritzen in die Vene) und einem anderen Teil peroral (über den Mund) verabreicht.
Die nachfolgende Tabelle gibt die Messwerte eines Patienten der Gruppe mit *intravenöser* Verabreichung wieder.

Zeit t [h]	1,5	2,0	3,0	4,0	6,0	9,0	12,0	18,0	24,0
Konzentration [ng/ml]	41,2	34,9	32,4	24,8	16,6	10,0	5,2	2,5	0,5

Aufgaben

1. Die Datenpaare sind im beigefügten Material als Punkte im Koordinatensystem dargestellt. Ermitteln Sie anhand der beiden Punkte $(1{,}5 \mid 41{,}2)$ und $(24 \mid 0{,}5)$ eine Näherungsfunktion vom Typ $y = a \cdot e^{-k \cdot t}$, die den obigen Konzentrationsverlauf beschreibt, und skizzieren Sie den zugehörigen Graphen in das Koordinatensystem (Material).

(6 BE)

Bei der *peroralen* Verabreichung ergab sich für die *Änderungsrate* der Konzentration (in Nanogramm (ng) pro Milliliter pro Stunde) in Abhängigkeit von der Zeit t (in Stunden) folgender funktionaler Zusammenhang: $r(t) = 91{,}6 \cdot (-0{,}18 \cdot e^{-0{,}18t} + 0{,}52 \cdot e^{-0{,}52t})$.

(Im Material finden Sie den Graphen der Funktion r.)

2.1 Ermitteln Sie rechnerisch den Zeitpunkt, zu dem bei einem solchen Verlauf die Konzentration des Wirkstoffes am größten ist.
Berechnen Sie auch die Höhe der Konzentration zu diesem Zeitpunkt.

2.2 Skizzieren Sie in das Material 1 die zeitliche Entwicklung der Konzentration des Wirkstoffes im Blut und beschreiben Sie den Verlauf im Sachzusammenhang.

(15 BE)

Für die Wirkung des Medikamentes müssen mindestens 10 $\frac{\text{ng}}{\text{ml}}$ im Körper vorhanden sein.

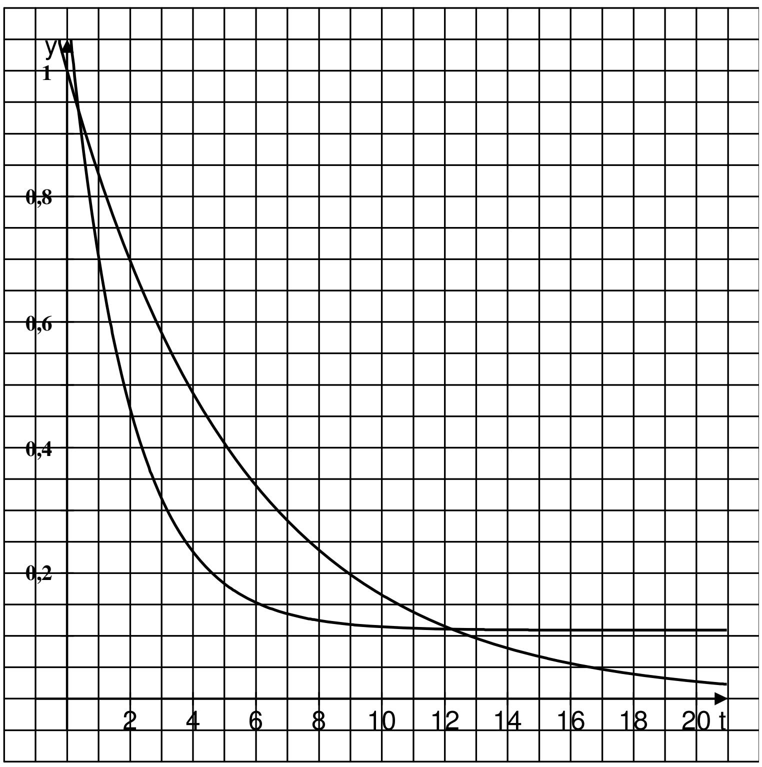
3.1 Erläutern Sie, welche Vor- bzw. Nachteile die beiden Verabreichungsarten unter Berücksichtigung dieses Gesichtspunktes aufweisen.
[Falls Ihnen eine Lösung der Aufgabe 2 nicht möglich ist, verwenden Sie zur Beantwortung für den peroralen Fall die Ersatzfunktion k mit
$k(x) = 100 \cdot e^{-0,2x} - 99 \cdot e^{-0,5x}$.]

3.2 Erläutern Sie die nachfolgend angegebenen Schritte. Geben Sie dabei auch an, was hiermit im Sachzusammenhang berechnet wird.

(1) $\int_0^t r(z)dz = 10$

(2) $e^{-0,18t} - e^{-0,52t} = 0,109$

(3)



(4) $t_1 \approx 0,4$, $t_2 \approx 12,2$

(11 BE)

Allgemein hat man ein Interesse daran, die Wirkstoffkonzentration im Blut nicht unter einen bestimmten Wert fallen zu lassen. Gleichzeitig darf sie in der Regel auch ein gewisses Maximum nicht überschreiten. Daher verabreicht man in bestimmten zeitlichen Abständen das Medikament erneut in gleicher Weise.

4.1 Weisen Sie nach, dass das Medikament bei intravenöser Verabreichung und einem oberen Grenzwert von $60\ \frac{\text{ng}}{\text{ml}}$ auf keinen Fall bereits nach 7,5 Stunden erneut (in gleicher Weise) verabreicht werden darf.

4.2 Entwickeln Sie eine funktionale Beschreibung für den Konzentrationsverlauf bei wiederholtem Einnehmen des Medikamentes (peroraler Fall) im Abstand von 8 Stunden innerhalb von 24 Stunden. (8 BE)

B Variante für grafikfähigen Taschenrechner oder CAS

In einem Krankenhaus wurde für ein Medikament der zeitliche Verlauf der Wirkstoffkonzentration im Blut von Patienten untersucht. Dabei wurde das Medikament einem Teil der Patienten intravenös (durch direktes Spritzen in die Vene) und einem anderen Teil peroral (über den Mund) verabreicht.
Die nachfolgende Tabelle gibt die Messwerte eines Patienten der Gruppe mit *intravenöser* Verabreichung wieder.

Zeit t [h]	1,5	2,0	3,0	4,0	6,0	9,0	12,0	18,0	24,0
Konzentration [ng/ml]	41,2	34,9	32,4	24,8	16,6	10,0	5,2	2,5	0,5

Aufgaben

1. Die Datenpaare sind im beigefügten Material als Punkte im Koordinatensystem dargestellt. Ermitteln Sie eine geeignete Näherungsfunktion, die den obigen Konzentrationsverlauf beschreibt, und skizzieren Sie den zugehörigen Graphen in das Koordinatensystem (Material). (6 BE)

Bei der *peroralen* Verabreichung ergab sich für die *Änderungsrate* der Konzentration (in Nanogramm (ng) pro Milliliter pro Stunde) in Abhängigkeit von der Zeit t (in Stunden) folgender funktionaler Zusammenhang: $r(t) = 91{,}6 \cdot (-0{,}18 \cdot e^{-0{,}18t} + 0{,}52 \cdot e^{-0{,}52t})$.

(Im Material finden Sie den Graphen der Funktion r.)

2.1 Ermitteln Sie rechnerisch den Zeitpunkt, zu dem bei einem solchen Verlauf die Konzentration des Wirkstoffes am größten ist.
Berechnen Sie auch die Höhe der Konzentration zu diesem Zeitpunkt.

2.2 Skizzieren Sie in das Material 1 die zeitliche Entwicklung der Konzentration des Wirkstoffes im Blut und beschreiben Sie den Verlauf im Sachzusammenhang.
(13 BE)

Für die Wirkung des Medikamentes müssen mindestens 10 $\frac{\text{ng}}{\text{ml}}$ im Körper vorhanden sein.

3.1 Erläutern Sie, welche Vor- bzw. Nachteile die beiden Verabreichungsarten unter Berücksichtigung dieses Gesichtspunktes aufweisen.
[Falls Ihnen eine Lösung der Aufgabe 2 nicht möglich ist, verwenden Sie zur Beantwortung für den peroralen Fall die Ersatzfunktion k mit
$k(x) = 100 \cdot e^{-0,2x} - 99 \cdot e^{-0,5x}$.]

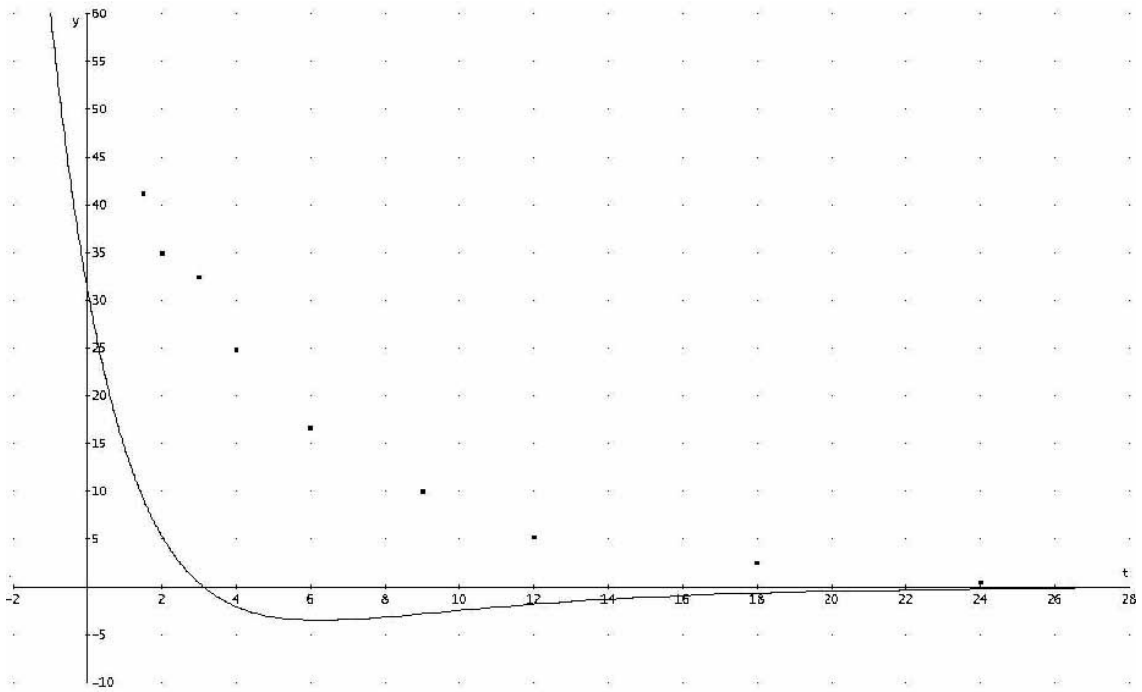
3.2 Bestimmen Sie für beide Verabreichungsarten diejenigen Zeitpunkte, für die die Medikamentenkonzentration 10 $\frac{\text{ng}}{\text{ml}}$ beträgt. (11 BE)

Allgemein hat man ein Interesse daran, die Wirkstoffkonzentration im Blut nicht unter einen bestimmten Wert fallen zu lassen. Gleichzeitig darf sie in der Regel auch ein gewisses Maximum nicht überschreiten. Daher verabreicht man in bestimmten zeitlichen Abständen das Medikament erneut in gleicher Weise.

4.1 Weisen Sie nach, dass das Medikament bei intravenöser Verabreichung und einem oberen Grenzwert von 60 $\frac{\text{ng}}{\text{ml}}$ auf keinen Fall bereits nach 7,5 Stunden erneut (in gleicher Weise) verabreicht werden darf.

4.2 Entwickeln Sie eine funktionale Beschreibung für den Konzentrationsverlauf bei wiederholtem Einnehmen des Medikamentes (peroraler Fall) im Abstand von 8 Stunden innerhalb von 24 Stunden und skizzieren Sie den dazugehörigen Graphen.
(10 BE)

Material für beide Varianten



Beispiel partiell differenzierter Aufgabenstellung für die Variante *grafikfähiger Taschenrechner* (GTR) und die Variante CAS

Das Beispiel entstammt einer Prüfungsarbeit für das grundlegende Anforderungsniveau in Sachsen. Es beinhaltet einen hilfsmittelfreien Prüfungsteil A und einen Prüfungsteil B mit Hilfsmitteln.

Aufgabe *(der vollständige Aufgabentext befindet sich im Anhang)*

Jeden Winter zieht es viele Wintersportfreunde mit Ski und Snowboard an die kleinen und großen Skihänge der Wintersportgebiete im Erzgebirge.

Ein Teil des Graphen der Funktion f mit $f(x) = e^{\frac{1}{6}x-2}\left(\frac{7}{2}-\frac{1}{8}x\right)+5 \quad \left(x \in D_f\right)$ kann zur Beschreibung der Profillinie einer Skipiste zwischen den Punkten A und $B(0\,;f(0))$ verwendet werden. Die Funktionswerte geben die jeweilige Höhe über dem Meeresspiegel an.

Der Punkt A auf dem Graphen der Funktion f liegt so, dass seine y-Koordinate der größtmöglichen Höhe über dem Meeresspiegel entspricht.

Eine Einheit entspricht 100 m.

1.1 Bestimmen Sie den Definitionsbereich der Funktion f so, dass nur der Verlauf der Profillinie der Skipiste beschrieben wird.
Ermitteln Sie die Höhendifferenz der Skipiste.

(4 BE)

1.2 Bestimmen Sie die durchschnittliche Hangneigung der Profillinie zwischen den Punkten A und B in Prozent.
Hinweis: Eine Hangneigung von z. B. 40 % bedeutet, dass bei einer horizontalen Entfernung von 100 m ein Höhenunterschied von 40 m existiert.
Zur Charakterisierung von Skipisten nutzt man nicht die durchschnittliche, sondern die maximale Hangneigung.
Begründen Sie, dass dieses Vorgehen sinnvoll ist.

Entsprechend der maximalen Neigung eines Hanges unterscheidet man drei Schwierigkeitsgrade von Skipisten:

blau:	leicht (für Anfänger geeignet) mit einer maximalen Neigung unter 25 %
rot:	mittelschwer mit einer maximalen Neigung von 25 % bis 40 %
schwarz:	anspruchsvoll (nur für Könner) mit einer maximalen Neigung über 40 %

Ermitteln Sie den Schwierigkeitsgrad der Skipiste zwischen den Punkten A und B.

(6 BE)

Teilaufgabe 1.3 *(für Prüfungsteilnehmer, die ein CAS benutzen)*

1.3 Für ein Computerprogramm soll die Profillinie der Skipiste durch die Funktion $f_{a;b}$ *mit*

$f_{a;b}(x) = e^{\frac{1}{6}\cdot x-2}\cdot\left(\frac{7}{2}-a\cdot x\right)+b \quad \left(a, b \in R, a, b > 0; x \in D_{f_{a;b}}\right)$ *simuliert werden.*

Die Funktionswerte geben die jeweilige Höhe über dem Meeresspiegel an. Die Profillinie der Skipiste liegt zwischen den Punkten $P_{a;b}$ *und* $Q_{a;b}\left(0\,;f_{a;b}(0)\right)$. *Der Punkt* $P_{a;b}$ *ist der lokale Extrempunkt der Funktion* $f_{a;b}$.

Eine Einheit entspricht 100 m.

Erläutern Sie, welche Bedeutung der Parameter b bei der Simulation der Skipiste besitzt.

Ermitteln Sie die Werte der Parameter a und b so, dass die Bedingungen I und II erfüllt sind.

I *Der Punkt* $Q_{a;b}$ *liegt genau 300 m über dem Meeresspiegel.*

II Die Abszisse des Punktes, in dem die Profillinie die maximale Neigung besitzt, beträgt 200 m.

(6 BE)

Teilaufgabe 1.3 *(für Prüfungsteilnehmer, die kein CAS benutzen)*

1.3 *Für ein Computerprogramm soll die Profillinie der Skipiste zwischen den Punkten A und B durch eine ganzrationale Funktion g angenähert werden.*

Begründen Sie, dass diese Funktion mindestens dritten Grades sein sollte.

Ermitteln Sie eine Gleichung der Funktion g.

Bestimmen Sie im angegebenen Bereich die größtmögliche Differenz in den Höhen über dem Meeresspiegel zwischen der Funktion f und der Näherungsfunktion g.

(6 BE)

1.4 In einem viel besuchten Skigebiet gibt es einen Vierer-Sessel-Lift, der zu 72 % von Skifahrern genutzt wird. Der Rest sind Snowboarder. Jeder Vierer-Sessel sei voll besetzt.

Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse.
Ereignis A: Auf einem Vierer-Sessel fahren genau drei Skifahrer.
Ereignis B: Auf einem Vierer-Sessel fahren höchstens zwei Snowboarder.

Geben Sie an, wie viele Snowboarder man durchschnittlich auf 20 Vierer-Sesseln beobachten kann.

(4 BE)

Möglichkeiten der Differenzierung

Bei differenzierten Aufgabenstellungen, z. B. in einzelnen Teilaufgaben, kann neben vollständig getrennten Problemstellungen auch bereits eine Chancenanpassung durch Maßnahmen wie

- die Vorgabe von Teillösungen für NON-CAS,
- die unterschiedliche Verteilung der Bewertungseinheiten oder
- den zeitlichen Umfang der Aufgabenstellungen

erreicht werden.

2.3 Hilfsmittelfreie Teile als eigenständiger Prüfungsteil – ist das notwendig?

Teilnehmer: ***Torsten Glaser (NI), Bernhard Hummel (BW), Reinhard Landt (MV), Wolfgang Moldenhauer (TH), Jürgen Wagner (SN)***

Zielsetzung: *Einige Bundesländer setzen beim Zentralabitur einen separaten hilfsmittelfreien Teil ein. Andere verfolgen den Weg, Fragestellungen ohne Computereinsatz in CAS-Aufgaben zu integrieren. Welche Argumente sprechen für diese unterschiedlichen Wege? Welche Funktion haben solche hilfsmittelfreien Teile?*

Was soll mit technologiefreien Teilen erreicht werden? Mögliche Ziele sind:

- Überprüfung von Rechentechniken, z. B. Lösen von einfachen Gleichungen, Ableitungsregeln, einfache Integrationen etc.
  Dazu genügt i. a. die Aufforderung, Zwischenschritte bei der Rechnung anzugeben.

- Überprüfung der Kenntnis von grundlegenden Verfahren, z. B. näherungsweise Berechnung eines Integrals über Summation von Rechteckflächen oder Erläuterung vorgegebener Berechnungen. Ebenso können Verfahren ohne Rechnung erläutert werden, z. B.: Ermitteln Sie eine Ausgleichsfunktion zu den vorgegebenen Daten und erläutern Sie das zu Grunde liegende Verfahren der „kleinsten Quadrate".

- Überprüfung des Verständnisses von Zusammenhängen, z. B. Skizzierung einer Ableitungsfunktion, wenn nur der Graph der Funktion gegeben ist und umgekehrt.

Erfahrungen mit separaten hilfsmittelfreien Teilen

Separate hilfsmittelfreie Teile werden seit 2004 in Baden-Württemberg (BW) und seit 2007 in Mecklenburg-Vorpommern (MV) im schriftlichen Zentralabitur eingesetzt. In beiden Ländern sind diese hilfsmittelfreien Teile Pflichtaufgaben und zwar in BW im Kernkompetenzfach Mathematik mit 4 Stunden und in MV sowohl im erhöhten als auch im grundlegenden Anforderungsniveau mit jeweils 4 Stunden.
In BW besteht dieser Teil aus ca. 8 unabhängigen Aufgaben, die grundlegendes Wissen und Können abverlangen. Es wird davon ausgegangen, dass die Schüler diese Aufgabenteile selbstständig trainieren. Die Aufgaben sind, jährlich wiederkehrend, nachfolgenden Kategorien zugeordnet:

- Elementares Differenzieren und Integrieren
- Lösen von Gleichungen
- Umgang mit Funktionen und deren Graphen
- Lösen einfacher geometrischer Probleme
- Mathematisches Argumentieren

In diesem Aufgabenteil können derzeitig 26 von insgesamt 60 Verrechnungspunkten (VP) maximal erworben werden. Man benötigt also aus den anderen zwei Aufgabenteilen noch einen zusätzlichen VP um 5 Notenpunkte zu erzielen. Die Schüler erhalten alle drei Aufgabenteile zu Beginn der Prüfung und beginnen mit der Bearbeitung des hilfsmittelfreien Teiles. Die Schüler entscheiden selbst, wann sie ihre Lösung des hilfsmittelfreien Teils endgültig abgeben. Anschließend bearbeiten sie die anderen zwei Aufgabenteile mit den jeweils zugelassenen Hilfsmitteln. Als Richtzeit für die Bearbeitung des hilfsmittelfreien Teils sind 80 Minuten von insgesamt 240 Minuten vorgesehen. Die Aufgabenteile des hilfsmittelfreien

Teils enthalten im Anforderungsbereich I etwa 16 VP und im Anforderungsbereich II (je nach Einstufung) etwa 10 VP. Die restlichen VP aus dem Anforderungsbereich I für die angepeilten 35 bis 40% aus den EPA kann der Schüler aus den anderen zwei Aufgabenteilen erhalten. Der Erfüllungsgrad des hilfsmittelfreien Teils liegt bei ca. 68%.

Ziele und Aufgabenbeispiele aus MV findet man unter www.mathe-mv.de. Der hilfsmittelfreie Teil wird nach 45 Minuten von 240 im grundlegenden Anforderungsbereich (gA) bzw. 300 im erhöhten Anforderungsbereich (eA) eingesammelt. Dabei können 15 Bewertungseinheiten (BE) von 65 BE im gA bzw. 85 BE im eA maximal erzielt werden. Im Anschluss wählen alle Schüler zwei Aufgabe aus drei aus den Sachbereichen Analysis, Analytische Geometrie/Lineare Algebra, Stochastik aus. Zusätzlich erhalten die Schüler im eA drei weitere Aufgaben der genannten Sachbereiche, aus denen sie eine auswählen. Die Aufgaben des hilfsmittelfreien Teils enthalten die gleichen Kategorien wie in BW sowie zusätzlich das Lösen einfacher Stochastikaufgaben.

Sachsen (SN) und Thüringen (TH) planen die Einführung hilfsmittelfreier Teile 2010 bzw. 2012. In Niedersachsen (NI) und Hessen (HE) werden keine separaten hilfsmittelfreien Teile abverlangt und sie sind bisher auch nicht geplant. In NI finden die Kurse auf beiden Anforderungsniveaus vierstündig statt. In TH wird das Kernfach Mathematik ab 2009 im Klassenverband in 4 Stunden auf eA unterrichtet. SN unterscheidet in Grundkursfach mit 4 Stunden und Leistungskursfach mit 5 Stunden.

Erfahrungen mit integriertem hilfsmittelfreien Teil

Andere Bundesländer wie zum Beispiel Hessen oder Niedersachsen verfolgen die Strategie, hilfsmittelfreie Aufgabenteile in die Abituraufgabe zu integrieren. Ziel ist es zu vermeiden, dass der Einsatz von Technologien (GTR, CAS) dazu führt, dass die Schüler elementares Verständnis von Mathematik nicht mehr beherrschen. Deshalb sollten gewisse Kompetenzen ständig verfügbar sein. Eine Möglichkeit besteht darin, Aufgabenteile zu integrieren, für deren Lösung kein Technologieeinsatz zielführend ist.
Hilfsmittelfreie Teile können ggf. aus einzelnen kleineren, thematisch unabhängigen Aufgabenteilen bestehen.

Beispielaufgaben BW (aus dem Abitur Haupttermin 2008)

Aufgabe 1

Bilden Sie die Ableitung der Funktion f mit $f(x) = \frac{x^2}{1+3x^2}$
und fassen Sie so weit wie möglich zusammen. (2 VP)

Aufgabe 2

Bestimmen Sie diejenige Stammfunktion der Funktion f mit $f(x) = -2\sin\left(3x\right)+4$,
die an der Stelle 0 den Wert 1 hat. (2 VP)

Aufgabe 3

Lösen Sie die Gleichung $x^2 - 1 = \frac{2}{x^2}$ $(x \neq 0)$. (3 VP)

Aufgabe 4

Das Schaubild einer ganzrationalen Funktion zweiten Grades geht durch die Punkte $P(1 \mid -6)$ und $N(3 \mid 0)$. In N hat das Schaubild die Steigung 5.
Bestimmen Sie eine Funktionsgleichung. (4 VP)

Aufgabe 5

Gegeben sind die Funktionen f_1, f_2 und f_3 mit

$$f_1(x) = \frac{4x}{x+a}, \quad f_2(x) = bx - x^2, \quad f_3(x) = 4 - c \cdot e^{-0,5x}$$

sowie vier Schaubilder (die Asymptoten sind eingezeichnet):

Schaubild 1

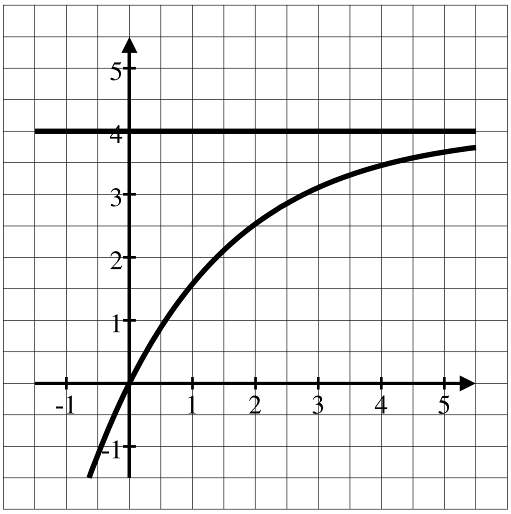


Schaubild 2

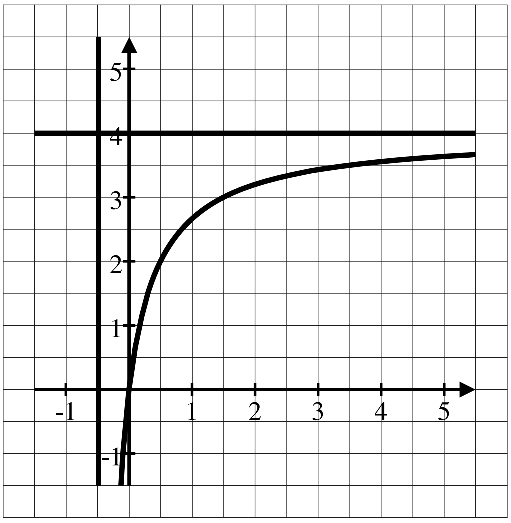


Schaubild 3

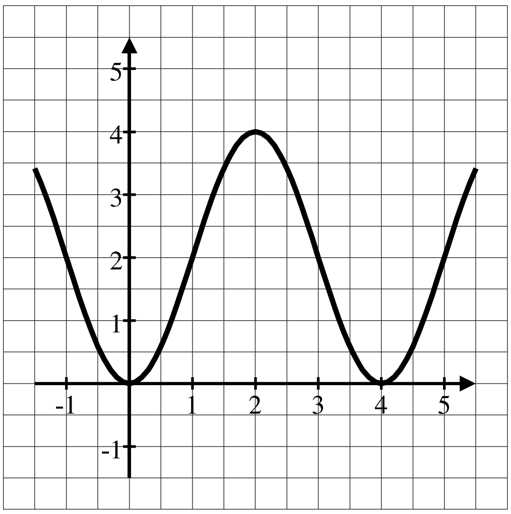
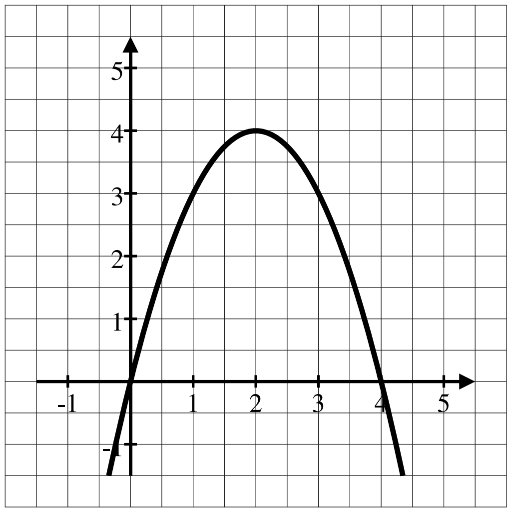


Schaubild 4



Zu jeder der drei Funktionen gehört eines der Schaubilder.

a) Ordnen Sie jeder Funktion das passende Schaubild zu und begründen Sie Ihre Entscheidung.

b) Geben Sie die Werte für a und c an. (5 VP)

Aufgabe 6

Gegeben sind der Punkt P(0 | 5 | 6) und die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $t \in \mathbb{R}$.

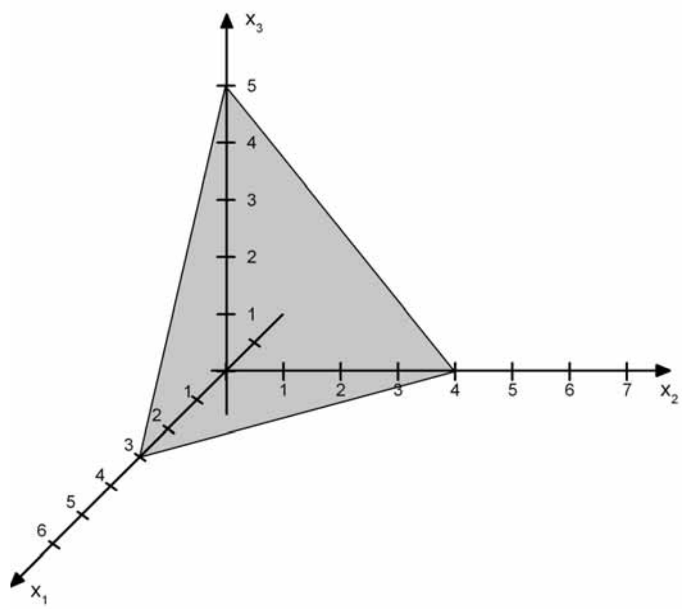
Bestimmen Sie den Abstand des Punktes P von der Geraden g. (3 VP)

Aufgabe 7

Untersuchen Sie, ob die Gerade

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \\ 11 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 3 \\ 12 \\ -20 \end{pmatrix}; r \in \mathbb{R}$$

parallel zu der in der Abbildung dargestellten Ebene verläuft.



(3 VP)

Aufgabe 8

Gegeben sind die Grundfläche ABCD sowie die Spitze S einer Pyramide. Beschreiben Sie, wie man mit Hilfe der Vektorrechnung überprüfen kann, ob es sich um eine senkrechte Pyramide mit quadratischer Grundfläche handelt. (4 VP)

Beispielaufgaben MV (aus Abitur 2008)

Dieses Arbeitsblatt ist vollständig und ohne Zuhilfenahme von Tafelwerk und Taschenrechner zu bearbeiten. Das Arbeitsblatt wird nach einer Bearbeitungszeit von genau 45 Minuten eingesammelt.

1 Analysis

1.1 Gegeben ist die Funktion f mit der Gleichung

$$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 3x^2 + 5 \text{ mit } x \in R .$$

Berechnen Sie die Koordinaten des Wendepunktes des Graphen von f.

1.2 Gegeben ist die Funktion h mit der Gleichung

$$h(x) = \frac{x^2 - 49}{x - 7} \text{ mit } x \in D_h .$$

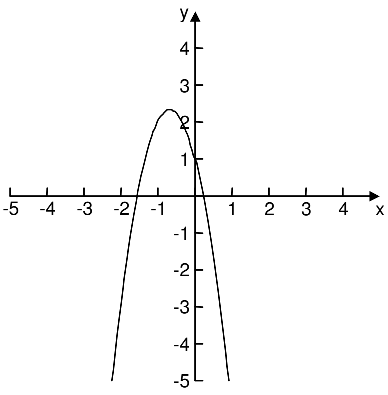
Geben Sie die Nullstelle von h an.

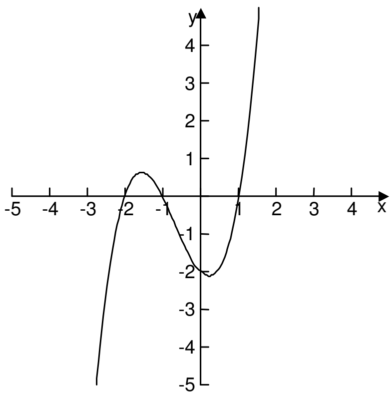
1.3 Gegeben ist die Funktion f durch

$$f(x) = (x - 2)(x + 2) \text{ mit } x \in \mathbb{R} .$$

- Ermitteln Sie die Ableitungsfunktion f' von f.
- Berechnen Sie $\int_0^1 f(x)\,dx$.

1.4 In den Abbildungen sind die Graphen einer ganzrationalen Funktion f, der zugehörigen Ableitungsfunktion f' und einer weiteren Funktion g dargestellt.





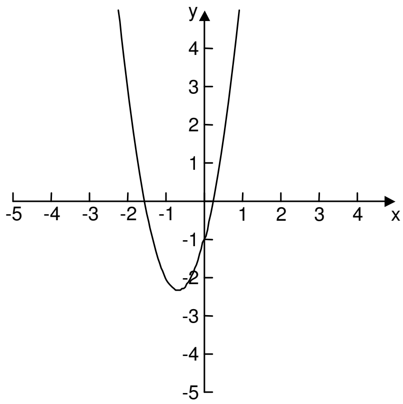


Abbildung 1 Abbildung 2 Abbildung 3

Ordnen Sie den Abbildungen die Funktionen f und f' zu und begründen Sie Ihre Entscheidung.

1.5 Gegeben ist eine Funktion f mit folgenden Eigenschaften:

- Eine Polstelle von f ist 2.
- $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 3$
- Eine Nullstelle von f ist −1.

Skizzieren Sie den Graphen einer Funktion f mit diesen Eigenschaften.

2 Analytische Geometrie

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Eckpunkte eines ebenen Vierecks ABCD gegeben:
A(4 | 1 | 2), B(2 | 3 | 2), C(2 | 1 | 4), D(4 | −1 | 4).

2.1 - Begründen Sie, dass es sich bei dem Viereck um ein Parallelogramm handelt.
- Prüfen Sie, ob dieses Viereck sogar ein Rechteck ist.
- Ermitteln Sie die Koordinaten des Diagonalenschnittpunktes.

2.2 Gegeben ist ein weiterer Punkt E(3 | 2 | 1).
Untersuchen Sie, ob E auf der Viereckseite $\overline{AB}$ liegt.

3 Stochastik

Eine Firma stellt an jedem Arbeitstag (Montag bis Freitag) gleich viele Handys her. Die regelmäßig durchgeführte Gütekontrolle ergibt, dass jeweils die am Montag hergestellten Handys mit einer Wahrscheinlichkeit von 10 % fehlerhaft sind.
An den anderen Arbeitstagen (Dienstag bis Freitag) liegt die Fehlerquote in der Produktion jeweils bei 5 %. Der Produktion einer Woche wird zufällig ein Handy entnommen.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:

A – Das entnommene Handy ist fehlerfrei und wurde am Montag produziert.
B – Das entnommene Handy ist fehlerfrei.

In Planung:

Beispiele SN (aus Handreichung Abiturähnliche Musteraufgaben)

Die Prüfungsarbeit besteht aus den Teilen A und B, die innerhalb von 270 Minuten zu bearbeiten sind und für die insgesamt 60 BE erreichbar sind. Ein Teil der Aufgaben im Teil A ist auf dem Aufgabenblatt zu lösen. Für die Bearbeitung der Aufgaben im Teil A sind ausschließlich folgende Hilfsmittel zugelassen: Wörterbuch der deutschen Rechtschreibung, Zeichengeräte und Zeichenhilfsmittel. Im Teil A sind 15 BE zu erreichen. Alle Materialen zum Teil A werden 60 Minuten nach Arbeitsbeginn eingesammelt.

Teil A

Tragen Sie die Antworten zu den Aufgaben 1 und 2 auf dem vorliegenden Aufgabenblatt ein, und verwenden Sie für die Antworten zu den Aufgaben 3 und 4 das bereitliegende Papier für die Reinschrift.

1 In den Aufgaben 1.1 bis 1.5 ist von den jeweils fünf Auswahlmöglichkeiten genau eine Antwort richtig. Kreuzen Sie das jeweilige Feld an.

1.1 Welche Steigung besitzt die Tangente an den Graphen der Funktion f mit $f(x) = \sqrt{2x} \quad (x \in D_f)$ an der Stelle a ihres Definitionsbereichs?

☐	☐	☐	☐	☐
$\frac{2}{3} \cdot \sqrt{2 \cdot a^3}$	$\frac{2}{\sqrt{2 \cdot a}}$	$\frac{1}{\sqrt{2 \cdot a}}$	$\frac{4}{\sqrt{2 \cdot a}}$	$-\frac{1}{\sqrt{2 \cdot a}}$

1.2 Welcher der angegebenen Funktionsterme charakterisiert eine Stammfunktion der Funktion g mit $g(x) = \frac{1}{7-3x}$ $\left(x \in D_g\right)$?

☐	☐	☐	☐	☐
$-\frac{3}{7-3\cdot x}$	$-\frac{1}{3}\cdot\ln(7-3\cdot x)$	$-3\cdot\ln\lvert 7-3\cdot x\rvert$	$\frac{3}{(7-3\cdot x)^2}$	$-\frac{1}{3}\cdot\ln\lvert 7-3\cdot x\rvert$

1.3 Die erste Ableitung einer Funktion h ist an einer Stelle s ihres Definitionsbereichs negativ. Welche der Aussagen ist unter dieser Voraussetzung wahr?

☐ Der Graph von h ist achsialsymmetrisch zu x = s.

☐ h hat an der Stelle s ein lokales Maximum.

☐ Die Tangente an den Graphen von h an der Stelle s ist monoton fallend.

☐ s ist eine negative Nullstelle von h.

☐ s ist eine Wendestelle von h.

1.4 Bei einem Turnier mit 8 Mannschaften spielt jede Mannschaft gegen jede andere ohne Rückrunde.

Wie groß ist die Gesamtanzahl der Spiele?

☐	☐	☐	☐	☐
16	28	49	56	64

1.5 Gegeben ist die Strecke $\overline{AB}$ mit $A(7;-4)$ und $B(-3;-5)$. Der Punkt T teilt diese Strecke so, dass $\overline{AT}:\overline{TB} = 3:2$ gilt.

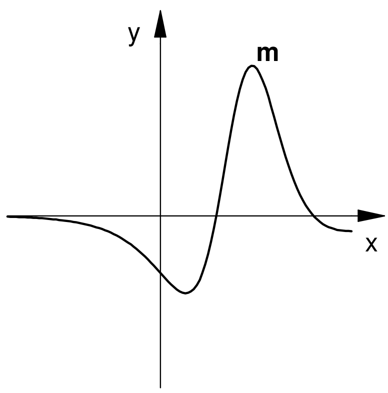
Welche Koordinaten hat der Punkt T?

☐	☐	☐	☐	☐
$T(1;-4,6)$	$T(3;-4,4)$	$T(1;-4,4)$	$T(-10;-1)$	$T(3;-4,6)$

Für Aufgabe 1 (5 BE)

2 Skizzieren Sie zum vorgegebenen Graphen einer Funktion m in dasselbe Koordinatensystem den Graphen einer zugehörigen Stammfunktion M im dargestellten Intervall.

Begründen Sie den Verlauf des Graphen der Stammfunktion an markanten Stellen.



(4 BE)

3 Verbindet man jeden Mittelpunkt einer Seitenfläche des Würfels ABCDEFGH mit den vier Mittelpunkten der benachbarten Seitenflächen, dann erhält man den Körper IJKLMN, wobei I und N Mittelpunkte gegenüberliegender Seitenflächen sind.

Weisen Sie nach, dass der Winkel zwischen den Kanten $\overline{JI}$ und $\overline{JN}$ ein rechter Winkel ist.

(3 BE)

4 Ein Glücksrad besitzt genau zwei Sektoren, die durch einen roten bzw. blauen Anstrich unterschieden werden. Für einen Einsatz von 4 € wird das Rad genau dreimal gedreht.

Wird dreimal die Farbe rot ermittelt, dann erhält der Spieler 8 €;
wird dreimal die Farbe blau ermittelt, dann erhält der Spieler 4 €;
wird einmal die Farbe rot und zweimal blau ermittelt, dann erhält der Spieler 7 €.
In allen anderen Fällen wird nichts ausgezahlt.

Ermitteln Sie die Größe des Zentriwinkels des Sektors mit rotem Anstrich so, dass ein faires Spiel entsteht.

(3 BE)

Beispielaufgabe TH:

Das derzeitige schriftliche Zentralabitur im Grund- und Leistungsfach in Thüringen besteht aus drei Teilen. Der Prüfungsteilnehmer wählt aus zwei Analysisaufgaben (A1, A2) eine Aufgabe und zusätzlich entweder die Aufgabe aus der Analytischen Geometrie / Linearen Algebra (B1) oder die Aufgabe aus der Stochastik (B2). Ferner bearbeitet er die Pflichtaufgabe C. Von insgesamt 60 BE sind in der Analysis 30 BE, in B1 oder B2 jeweils 20 BE und in C schließlich 10 BE erzielbar.
Der derzeitige C-Teil lässt sich problemlos in einen hilfsmittelfreien Teil umarbeiten.
Dazu ein Beispiel aus dem Haupttermin 2007, Grundfach, das vierstündig unterrichtet wird, wobei die CAS - Variante und die NON – CAS - Variante identisch waren (Natürlich kann man auch eine entsprechende Aufgabe aus dem Leistungsfach anführen, muss dann aber erwähnen, dass das Leistungsfach sechsstündig unterrichtet wird.).

Aufgabe C

a) In einer Nährlösung verdoppelt sich die Anzahl der Bakterien innerhalb einer halben Stunde.
Nach wie vielen Stunden hat sich die Anzahl der Bakterien vertausendfacht? 2 (BE)

b) Gegeben sind die Funktionen f durch $f(x) = e^x$ und g durch $g(x) = e^{x+2} - 1$.
Wie lässt sich der Graph von g aus dem Graphen von f gewinnen? 2 (BE)

c) Gegeben sind die Vektoren $\vec{a}_t = \begin{pmatrix} t \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{b}_t = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t \end{pmatrix}$ mit $t > 0$.

Bestimmen Sie den Wert für t so, dass beide Vektoren einen Winkel von 60° einschließen!

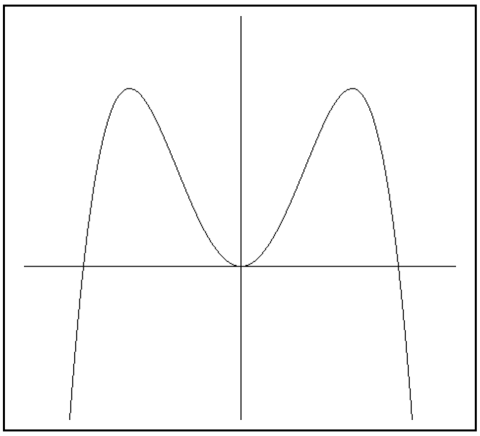
Wie groß ist in diesem Fall der Inhalt der von $\vec{a}_t$ und $\vec{b}_t$ aufgespannten Parallelogrammfläche? 3 (BE)

d) Ein idealer Würfel wird zweimal geworfen.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:
A:= „Mindestens eine Sechs wird gewürfelt.“
B:= „Es wird zweimal die gleiche Zahl gewürfelt.“
C:= „Die Augensumme ist eine Primzahl.“ 3 (BE)

Um diesen C-Teil in eine hilfsmittelfreie Aufgabe zu überführen, ist eine Umarbeitung nicht erforderlich, denn $2^{10} = 1024$ ist im Teil a) im Kopf ausführbar oder aus der Informatik bekannt.

Beispielaufgaben HE (aus verschiedene Abiturjahrgängen), die hilfsmittelfreien Teile sind in den Aufgaben integriert

Beispiel 1
Aufgabenteile, die ohne Technologie bearbeitet werden, sind kursiv gedruckt.



Der Teil a. besteht aus einer „Steckbriefaufgabe“, die als Ergebnis die Funktion f(x) liefert (siehe Abb.).

b. *Die Abbildung zeigt den Graphen der Funktion f mit* $f(x) = -3{,}75\, x^4 + 15\, x^2$.
Beschreiben und begründen Sie den Verlauf dieses Graphen mithilfe des Funktionsterms.

Bestätigen Sie die charakteristischen Punkte durch Rechnung.

c. Berechnung eines Volumenintegrals

d. Beschreiben und erklären Sie, was in den Schritten 1 bis 5 berechnet wird.
Welche Eigenschaften hat der so berechnete Rotationskörper?

Man will einen Rotationskörper erzeugen, der mit ebener Grundfläche versehen „kippelfrei“ stehen kann.
Zur Vorbereitung rechnet man wie folgt:

1. $V(k) = \pi \int_k^{k+1} (f(x))^2\, dx$, $0 \le k \le 1$
2. $V'(k) = 0 \;\Rightarrow\; k \approx 0{,}82$
3. $V''(0{,}82) \approx -2763$
4. $V(0{,}82) \approx 518{,}25$
5. $A = \pi\, [f(0{,}82)]^2 \approx 223{,}65$

Beispiel 2

Im ersten Teil der Aufgabe werden Messdaten zum Wachstum des Baumdurchmessers gegeben. Diese müssen mit verschiedenen Funktionen modelliert werden.

Die Funktion $d(t) = \dfrac{5}{100 \cdot e^{-0.05 \cdot t} + 4}$ für $t \in [0;\ 200]$ ist ein anderes Modell, um das Wachstum des Baumdurchmessers zu beschreiben. *Beurteilen Sie dieses Modell – insgesamt und hinsichtlich der Messdaten.*

Zu welchem Zeitpunkt hatte nach diesem Modell der Baum eine Dicke von 1m?
Wann wächst der Baum nach diesem Modell am schnellsten und wie schnell wächst er dann? Begründen Sie Ihre Angaben.

Welcher Graph gehört zur Ableitungsfunktion d'(t)? Begründen Sie Ihre Zuordnung und geben Sie dabei auch Gründe an, warum die anderen Graphen ausscheiden müssen.

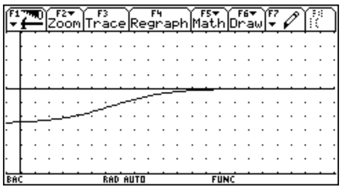


Bild 1

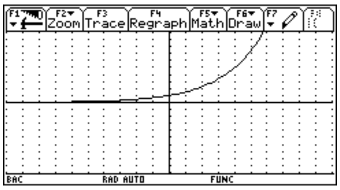


Bild 2

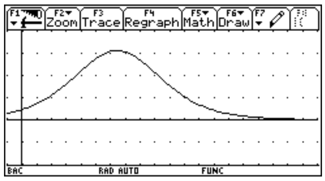


Bild 3

Beispiel 3

a. 12% der Kinder im Grundschulalter benutzen zum Schreiben die linke Hand.
In einer Klasse 3 der Grundschule Biedenkopf sind 25 Schüler.
Erklären Sie, welche Bedeutung in diesem Fall die folgende Rechnung hat.
Machen Sie auch Aussagen zur Bedeutung der einzelnen Faktoren im Sachzusammenhang.

$$\binom{25}{4} \cdot (0{,}12)^4 \cdot (0{,}88)^{21} \approx 0{,}179$$

b. Weitere Aufgabenteile mit CAS

Beispiel 4

Erläuterungen und Grafik zum Begriff „LORENZ-Funktion“ werden im Vorspann gegeben.

1. Bestimmung einer konketen Funktion aus gegeben Daten.

2. *Begründen Sie folgende Eigenschaften aller LORENZ-Funktionen f aus dem Sachzusammenhang:*
   - Der Definitionsbereich ist [0 ; 1] und es gilt f(0) = 0 und f(1) = 1.
   - Sie haben im Inneren des Intervalls [0;1] keine negativen Funktionswerte.
   - Sie sind im Inneren des Intervalls [0;1] monoton wachsend und linksgekrümmt.

   Beschreiben Sie die LORENZ-Kurve für eine gleichmäßige Vermögensverteilung.
   Weisen Sie ohne Nutzung des Rechners nach, dass durch die Funktionsgleichung $b(x) = 2 \cdot 1{,}5^x - 2$ *eine LORENZ-Funktion definiert ist.*

3. bis 5. Weitere Aufgabenteile mit CAS

2.4 Vision: Länderübergreifendes Curriculum, das die Möglichkeiten von CAS einbezieht

Teilnehmer: ***Dieter Eichhorn (SL), Vera Reineke (NI), Helmut Springstein (HH), Sibylle Stachniss-Carp (HE), Stefan Uhlmann (NW)***

Zielsetzung: *Eine Ausrichtung auf Kompetenzentwicklung erfolgt in fast allen Bundesländern. Dabei stellt sich die Frage, ob die aktuellen Curricula die Möglichkeiten von CAS angemessen berücksichtigen. Wie sollte sich das Curriculum verändern, damit CAS zur Förderung dieser Kompetenzen sinnvoll eingesetzt werden kann? Ergeben sich dadurch auch neue inhaltliche Schwerpunktsetzungen?*

Vorbemerkung:
In diesem Workshop haben wir uns im Wesentlichen darauf beschränkt, bisherige Lehrplaninhalte daraufhin zu prüfen, inwiefern diese Inhalte, eventuell mit anderen inhaltlichen Schwerpunktsetzungen, auch und insbesondere für ein CAS-Curriculum tragfähig sind. Aus zeitlichen Gründen haben wir es nur zu einem sehr kleinen Teil geschafft, uns anschließend um Visionen, d. h. um zusätzliche, durch die Möglichkeit der Benutzung eines CAS intendierte Inhalte zu kümmern.
Insbesondere fehlt ein Vorschlag, wie Curricula für 4-stündige Kurse auf erhöhtem bzw. grundständigem Niveau aussehen könnten.
Auch wenn insgesamt ein Curriculum angestrebt wird, in dem Aspekte von Analysis, Linearer Algebra und Analytischer Geometrie sowie von Stochastik untereinander verbunden unterrichtet werden, haben wir der besseren Übersichtlichkeit halber die Themengebiete getrennt aufgeführt.
Weiterhin haben wir nicht versucht, die Unterschiede von einem GTR- und einem CAS-Curriculum herauszuarbeiten. Für uns war die (ständige) Verfügbarkeit eines CAS Grundlage.
Wir sind uns der Schwierigkeiten bewusst, die ein modernes CAS-Curriculum beim Übergang von der Schule zur Hochschule mit sich bringt. Ohne die Thematik zu vertiefen, kann man sagen, dass Schüler ein allgemeinbildendes Abitur ablegen und nicht (mehr) primär für ein Studium der Mathematik, sei es als Haupt- oder Nebenfach, ausgebildet werden. Letztendlich ist von Hochschul- wie von Schulseite zu klären, mit welchen veränderten Fähigkeiten die Schüler die Schule verlassen und wie damit im Studium umgegangen wird.

Analysis

verzichtbar, bzw. weniger stark akzentuieren	
Folgen	Auf die systematische, mathematisch strenge Untersuchung von Grenzprozessen u. a. mit ε - δ Betrachtungen sollte verzichtet werden. Folgen sollten kein eigenes Thema sein, sondern intuitiv im Sachzusammenhang benutzt werden. Folgen bieten sich z. B. bei Wachstumsprozessen gerade zu an. Mithilfe einer Tabellenkalkulation und den dazugehörenden Graphen kann man diese Vorgänge gut veranschaulichen.
Grenzwerte	Ein intuitiver Grenzwertbegriff reicht. Das Konzept sollte nur an passenden Stellen (Differentenquotient, beschränktes Wachstum...) anschaulich gemacht werden. Es wäre zu überlegen, inwieweit ein Kurs auf erhöhtem Niveau hier stärker in die Tiefe gehen sollte.

Stetigkeit	Auch hier reicht ein intuitiver Stetigkeitsbegriff. Unstetigkeitsstellen sind entweder offensichtlich (bei zusammengesetzten Funktionen) oder sie sind so weit hergeholt, dass Schüler wenig Sinn damit verbinden.
Funktionsuntersuchungen	Der Funktionsbegriff ist einer der zentralen Begriffe für den Mathematikunterricht. Auf keinen Fall darf und kann auf ihn verzichtet werden. Aber die Behandlung einzelner Funktionsklassen (gebrochenrationale Funktionen, periodische Funktionen …) und deren Besonderheiten sollte nicht isoliert voneinander geschehen. Die Priorität liegt mehr in der Vermittlung eines großen Spektrums an Funktionsklassenwissen denn in einer exakten bzw. systematischen Kategorisierung von Eigenschaften. Das Lernen über Funktionskassen sollte möglichst in Sachzusammenhängen erfolgen und kein Vorratslernen sein. In einem Kurs auf erhöhtem Niveau kann in einigen ausgewählten Fällen stärker in das Detail gegangen werden.
Vollständige Induktion	Die vollständige Induktion hat keine Anwendung im restlichen Unterricht. Sie trägt kaum etwas dazu bei, entsprechende Formeln (Gesetzmäßigkeiten) zu finden, sondern sichert diese allenfalls (mathematisch) ab.
<u>stärker vertiefen bzw. anders akzentuieren</u>	
Funktionsbegriff	Der Funktionsbegriff ist einer der zentralen Begriffe im Mathematikunterricht. Mithilfe eines CAS kann und muss der Zusammenhang zwischen den verschiedenen Repräsentationsformen Graph, Tabelle und Gleichung stärker verdeutlicht und damit das Verständnis des Funktionsbegriffes vertieft werden. Variation von Funktionsgraphen (mithilfe von Parametern – auch auf grundlegendem Niveau) geben einen tieferen Einblick in Besonderheiten von Funktionsklassen, ohne dass auf die „alten Kochrezepte" zur Untersuchung von Funktionsscharen zurückgegriffen werden sollte.
Ableitungsbegriff	Ein sinnvoller Einstieg erfolgt über durchschnittliche Steigungen und Änderungsraten. Dieser Einstieg kann und sollte ausführlicher als in einem Unterricht ohne Benutzung eines CAS behandelt werden, um Grundvorstellungen zu stärken. Der Tangentenbegriff (also die Steigung) und insbesondere das graphisches Differenzieren darf nicht vernachlässigt werden. Eine Beschränkung nur auf eine Funktionsklasse ist nicht sinnvoll. Die Differenzenquotientenfunktion reicht für viele Anwendungen aus und sollte als Vorstufe für die Ableitungsfunktion entsprechend gewürdigt werden. Nach dem sinnvollen didaktischen Prinzip der Umkehrung sollten auch Differenzengleichungen und deren Lösungen bearbeitet werden.

Ableitungsregeln	Insbesondere für Ableitungsregeln erscheint eine Beschränkung auf nur eine Funktionsklasse als nicht sinnvoll. Damit könnte der Vorstellung von der Ableitung als “Oben eins weniger und als Faktor davor“ entgegengewirkt werden. Ein sinnvoller Einstieg könnte das Entdecken der Ableitungsregeln mithilfe eines CAS sein. Die Kenntnis der Produkt-, Quotienten-, Kettenregel ist nach wie vor wichtig, aber eher in dem Sinne, dass nicht komponentenweise abgeleitet werden darf: Struktur geht vor Kalkül.
Integralbegriff	Empfehlenswert ist der Einstieg über Rekonstruktion der Änderungsrate (von der Änderung zum Bestand, die Wirkung wird untersucht). Von der Existenz des Integrals einer Funktion kann ausgegangen werden. Der bisherige Nachweis der Existenz des Integrals über Grenzwerte von Ober – und Untersummen fällt weg. Eine nicht integrierbare Funktion wie z. B. das Standard-Beispiel die „Dirichlet-Funktion“ (f(x) = 0 falls x rational, f(x) = 1 sonst) liegt völlig außerhalb des Erfahrungsschatzes von Schülern. Der wichtige Summationsgedanke, der in der Integration steckt, wird in der numerischen Integration behandelt.
Integrationsregeln	Struktur geht vor Kalkül, eigene Entdeckungen von Regeln mittels eines CAS sollten ermöglicht werden.
Partielle Integration, Integration durch Substitution	Es macht keinen Sinn (mehr) möglichst viele Integrale mit den verschiedensten Kniffen zu bestimmen. Das machen die CAS-Rechner viel besser. Auch Mathematiker haben sich bei den diversen Integrationsproblemen schon immer auch Tafelwerke verlassen. Wichtig sind aber die Grundkonzepte: • Komponentenweise Integration von Produkten von Funktionen ist nicht erlaubt. • Die Hintereinanderausführung von Funktionen verändert Gewichtungen – warum lässt sich lineare Substitution relativ einfach handhaben, z. B. quadratische Substitution aber nicht? • Zu welchen Termen kann man (einfach) Stammfunktionen bilden? Ohne eine Kalkülüberfrachtung kann man grundlegende Ideen besser vermitteln.
Modellierung realitätsnaher Prozesse	• Wachstumsprozesse bieten sich an, exponentielles, beschränktes und logistisches Wachstum haben hohen Realitätsbezug. Komplexe Zusammenhänge (Funktionsterme) können mit einem „Rechenknecht“ sachgerecht bearbeitet werden.

- Periodische Prozesse sollten behandelt werden.
- Trassierungsaufgaben sind anschaulich und fördern die Einsicht, dass mathematische Überlegungen auch realitätsnah sind. Es muss aber auch deutlich gemacht werden, dass die Modellierung einer Straße durch eine (mathematische) Linie nicht authentisch ist. Eine Ergänzung mit „ breiteren“ Straßen könnte den Modellierungsprozess (den mehrfachen Durchlauf des Modellierungskreislaufes) verdeutlichen.

Durch ein CAS kann man noch besser auf ein Vorratslernen verzichten. Man kann Probleme im Kontext der Aufgabe lösen. Vertiefungen können und sollen bei Bedarf erfolgen (Leistungskurs).

Funktions- bzw. Kurvenscharen

Mit Parametern experimentieren (sie variieren) gibt vertiefte Einsichten in die Bedeutung von Sachzusammenhängen. Dieses ist auch in einem Grundkurs möglich und sinnvoll. Eine theoretische Vertiefung kann und sollte im Leistungskurs erfolgen

<u>neue Inhalte</u>

Regression

Zur Untersuchung von Realdaten eignet sich die Regression: Mit welchem Funktionstyp lassen sich die Daten am besten beschreiben? Mit welchem Funktionstyp lassen sich am besten Vorhersagen erzielen? Die Regression kann zunächst als „black box“ benutzt werden, sie sollte aber im Verlauf des Unterrichts zumindest teilweise transparent gemacht werden. Exemplarisch kann die Idee der besten Approximation von der Summe der Abstände über die die Summe der Abstandsbeträge zu der Summe der Abstandsquadrate verdeutlicht werden.

Lineare Algebra / Analytische Geometrie

<u>verzichtbar, bzw. weniger stark akzentuieren</u>

Reine „Hieb- und Stichaufgaben“ ohne irgendeinen Kontext sind nicht sinnvoll.

<u>stärker vertiefen bzw. anders akzentuieren</u>

Gleichungssysteme

Auch hier gilt: Die Struktur ist wichtiger als das Kalkül, aber einfache Gleichungssysteme sollten noch händisch gelöst werden können. Die Kenntnis des Gauß-Algorithmus und eine Reflexion über die Anzahl der Lösungen sowie die geometrische Bedeutung der Lösungsmenge ist wichtiger als den Algorithmus konkret durchführen zu können.
Veränderungen einer Ausgangsproblematik können durch Parametervariationen erreicht und mit der symbolischen Rechenfähigkeit des CAS bearbeitet werden.

Modellieren	Das CAS dient als Rechenknecht - auch um eine Zeitersparnis zu erreichen. Mithilfe eines CAS können komplexere und realitätsnähere Probleme bearbeitet werden, ohne dass der Arbeitsaufwand für die Schüler zu umfangreich wird. Ein Schwergewicht sollte auf der Interpretation der Ergebnisse liegen.
Strukturieren	Mit einem CAS ist es möglich, Strukturen so klar heraus zu arbeiten, dass Schüler besser den Überblick behalten können. So kann z. B. eine Gerade durch die Punkte C und D immer durch $g:\vec{x} = C + k(\overrightarrow{D - C})$ beschrieben werden ohne die konkrete Komponentendarstellung zu benutzen. Variationen gestalten sich dadurch einfacher.
<u>neue Inhalte</u> **Matrizen** **(für einige Bundesländer)**	Potenzen von Matrizen lassen sich (fast) beliebig berechnen (und nicht nur die von geringer Ordnung). Durch eigenes Experimentieren sind Entdeckungen möglich, z. B. über Wachstumsvorgänge, die durch Übergangsmatrizen beschrieben werden können. Parameter kommen durch veränderte Umweltbedingungen ins Spiel und können mit einem CAS sinnvoll bearbeitet werden. Auch Materialverknüpfungen können betrachtet werden, und somit werden Schüler mit realitätsnahen Problemen konfrontiert. Abbildungen stellen eine gute Verknüpfung von Matrizenrechnung und Analytischer Geometrie dar.

Stochastik

<u>Verzichtbar</u> **Kombinatorik**	außer $\binom{n}{k}$ Modellierungen kommen im Allgemeinen mit Baumdiagrammen (und Vierfeldertafeln) aus. Lediglich die Anzahl der Pfade, die zu einem Ereignis gehören, sind wichtig.
<u>stärker vertiefen bzw. anders akzentuieren</u> **Bedingte Wahrscheinlichkeiten (insbesondere des Satz von Bayes)**	Mit einem CAS ist man in der Lage, umfangreichere Parametervariationen (Spezifität, Sensitivität und Prävalenz) z. B. beim Testen auf seltene Krankheiten, durchzuführen. Rechenintensive Berechnungen mit dem Satz von Bayes bei vielen Alternativen lassen sich nun angemessen durchführen.
Gruppenanalyse	Es werden nicht einzelne Proben untersucht sondern Gruppen vorn Proben. Wie muss die Verteilung sein, damit sich Gruppenanalysen lohnen?

Verteilungen aller Art	Tabellen werden überflüssig. Das CAS kann für alle Verteilungen alle Ereigniswahrscheinlichkeiten berechnen. Insbesondere stetige Verteilungen brauchen nicht näherungsweise berechnet werden.
Signifikanztests	σ-Umgebungen und Tafelwerke werden überflüssig. Berechnungen mit dem CAS treten an die Stelle und lassen sich auch grafisch veranschaulichen.
Konfidenzintervalle	Konfidenzintervalle können auch ohne große Formelkenntnis experimentell ermittelt werden.
<u>neue Inhalte:</u>	
Operationscharakteristik	Fehler 2. Art und die dazugehörigen Graphen sind leicht erstellbar und tragen zu einer angemessenen Interpretation bei.
Stochastische Matrizen	Markow - Ketten können mit CAS angemessen bearbeitet werden.
Simulationen	Mit Simulationen können (experimentelle) Erfahrungen gesammelt werden, sodass Hypothesen (vor einer theoretischen) Behandlung überprüft werden können.

2.5 Anwendungsaufgaben und mathematischer Gehalt

Teilnehmer: ***Martin Bellstädt (TH), Wolfgang Köpp (BB), Susanne Malinowski (SH), Ulla Schmidt (NW)***

Zielsetzung: Schon mit Grafikrechnern lassen sich Anwendungsaufgaben oft ohne tiefere Analysiskenntnisse angemessen lösen. Die Tendenz, im Wesentlichen diesen Aufgabentyp in der Abiturprüfung zu stellen, birgt die Gefahr in sich, dass klassische mathematische Inhalte verloren gehen. Wie können wir vorbeugen – was ist letztendlich eine „gute" CAS-Aufgabe?

Vorteile eines CAS [6] erschließen sich aus dem Unterricht und nicht aus Prüfungsaufgaben.

Resultat eines CAS Einsatzes:
Schüler werden in den allgemein mathematischen Kompetenzen (Modellieren, Problem lösen, Argumentieren, Kommunizieren, Umgang mit digitalen Werkzeugen, Darstellungswechsel) gestärkt. Auf bestimmte algorithmische Kompetenzen kann verzichtet werden.
Dies wird erreicht z.B. durch:

- Mehr Zeit für allgemein mathematische Kompetenzen durch Entlastung von Routineaufgaben. (CAS als Rechenknecht)

[6] Die Argumentation für CAS gilt teilweise auch für den Einsatz eines GTR

- CAS kann als Modellierungshilfe verwendet werden, speziell: Diskrete Daten, die in der Praxis erhoben wurden, lassen sich durch verschiedene stetige Funktionstypen modellieren. (Fächerübergreifend)
- In der Stochastik kann mit realen Daten gerechnet werden.
- Experimentelle Zugänge zu neuen Begriffen werden ermöglicht.
- Begriffe und Zusammenhänge können in verschiedenen Darstellungsarten (numerisch tabellarisch, graphisch oder symbolisch) effektiv wiedergegeben werden.

Forderung: Klausuraufgaben sollen stärker kompetenzorientiert ausgerichtet werden.
Aber: Nicht alle Kompetenzen können in Abituraufgaben überprüft werden. Nicht alle Aufgabenteile erfordern den CAS-Einsatz.

Kontexte:
„Anwendungsaufgaben“ sind in der Regel keine echten Anwendungen. Sie können nicht die Praxis in Wirtschaft und Industrie in der Schule 1 zu 1 abbilden. Dennoch können die Schüler die Vorgehensweise zur Erstellung eines brauchbaren Modells erlernen.
Kontexte dienen zur Motivation und sind eine Vorstellungshilfe. Sie fördern die Lesekompetenz.
Kontexte sollen nah an der Vorstellungswelt der Schüler und relativ authentisch stehen. In einer Prüfungsaufgabe muss nicht erst der Kontext durchdrungen werden.
In der Prüfungsaufgabe muss der Kontext Ernst genommen werden und mit der Aufgabenstellung verwoben sein. Er darf nicht nur Einkleidung der mathematischen Aufgaben sein.

Problem:
Anwendungsaufgaben in Kontexten erfordern in der Regel keine exakten Lösungen. Im Allgemeinen sind Näherungswerte ausreichend, die auch grafisch oder tabellarisch gewonnen werden können. Damit besteht die Gefahr, dass traditionelle Inhalte der Differenzial- und Integralrechung in den Hintergrund treten bzw. verloren gehen. Es muss die Frage gestellt werden, ob dies intendiert ist oder als „Kollateralschaden“ in Kauf genommen wird. Zudem ist ein CAS für diese Aufgabenformate i. a. nicht zwingend notwendig.

Daher sollten für eine „gute“ CAS-Aufgabe nicht alle Aufgabenteile so angelegt sein, dass sie ausschließlich tabellarisch oder graphisch gelöst werden können.
Zusätzlich können durch die Verwendung von Termen Strukturen deutlich gemacht werden, Parameter ermöglichen Verallgemeinerungen und Fallunterscheidungen. Mit Termen gelingt der Übergang vom Diskreten zum Kontinuierlichen.

3 Welche Chancen bietet ein CAS auf dem Weg zum Mathematik-Abitur?

Im Rahmen der aktuellen bildungspolitischen Diskussion und des Bemühens um die Umsetzung von Bildungsstandards in einem kompetenzorientierten Unterricht bezieht T^3 (Teachers Teaching with Technology) hiermit Stellung zum Einsatz von **C**omputer-**A**lgebra-**S**ystemen (CAS) im Mathematikunterricht.
Diese Stellungnahme wurde von der T^3-Themengruppe „Zentralabitur mit CAS" anhand von Abituraufgaben aus verschiedenen Bundesländer erarbeitet und berücksichtigt Ergebnisse der bundesweiten Tagung am 27.- 29.11.2008 in Bad Berka (Thillm).

Mathematiklernen mit CAS
Die Bedeutung von CAS für das Lernen von Mathematik ist in den letzten Jahren stetig gewachsen. Der Einsatz eines CAS fördert die erwünschte Schwerpunktverlagerung des Mathematikunterrichts – weg von der Kalkülorientierung hin zu mehr Verstehensorientierung und einer stärkeren Einbeziehung von Modellierungsaufgaben und mathematischem Experimentieren. Es wird – noch stärker als beim Einsatz anderer Taschenrechner – die Weiterentwicklung einer offenen Unterrichtskultur und des individualisierten Lernens unterstützt. (Ingelmann / Bruder, 2008; Barzel 2007, u. a.).

Dabei wird das CAS insbesondere genutzt, um

- realitätsnahe Problemstellungen zu bearbeiten und dabei größere Datenmengen zu verarbeiten (Unterstützung von Modellierungsprozessen),
- algebraische Ausdrücke und Verfahren zu strukturieren und zu analysieren,
- Vermutungen aufzustellen und den Zugang zu Lösungsverfahren experimentell zu gewinnen,
- eigene Lösungen zu kontrollieren, z. B. bei algebraischen Umformungen,
- Problemlösekompetenz zu entwickeln durch die Möglichkeit, vielfältige Lösungswege zu nutzen.

CAS beim Problemlösen
Beim Arbeiten mit grafikfähigen Rechnern lernen die Schüler verschiedene Zugänge zur Lösung eines Problems kennen. CAS unterstützt neben grafischen, numerischen und tabellarischen Lösungsansätzen zusätzlich symbolisch-algebraische Wege. Dadurch können mathematische Fragestellungen flexibel auf mehreren unterschiedlichen Wegen bearbeitet werden. Die Vernetzung von mathematischen Themengebieten und Methoden wird gefördert.

Ein CAS kann außerdem dazu dienen, „Stolpersteine" im Kalkül zu umgehen. Es ermöglicht die Konzentration auf die Interpretation mathematischer Zusammenhänge und Schlussfolgerungen. Der Problemlöseprozess wird weniger stark durch Rechenfehler gestört.

Bei einer Verallgemeinerung von konkreten Kontexten und der Beurteilung von Vermutungen geht es häufig um die Frage: "Ist das immer so?". Dafür müssen notwendig Terme verarbeitet werden, die numerische Ebene eines grafikfähigen Rechners wird hier durch das CAS ergänzt.

Erfahrungen haben gezeigt, dass Schüler, die über mehrere Jahre hinweg Mathematik mit CAS betreiben, ein tieferes Verständnis für mathematische Zusammenhänge entwickeln und flexibler und sicherer mit Parametern und Variablen umgehen. Die Nutzung selbst erstellter und vorgegebener Software-Bausteine unterstützt diese Fähigkeiten.

Die Erkennung und Interpretation von Termen sowie die Beurteilung unterschiedlicher Lösungswege wird durch ein CAS unterstützt.

CAS in schriftlichen Leistungskontrollen und Prüfungen

Durch die Umsetzung der Bildungsstandards verändert sich der Unterricht, egal ob Technologie eingesetzt wird oder nicht. Aus diesem veränderten Unterricht resultiert auch eine Schwerpunktverlagerung bei schriftlichen Überprüfungen. An die Stelle von Aufgaben zur Überprüfung von Kalkülfertigkeiten treten zunehmend solche, zu deren Bearbeitung Kompetenzen wie Modellieren, Argumentieren, Beurteilen von Lösungswegen nötig sind. Bei Verfügbarkeit eines CAS im Unterricht und in der Prüfung können diese Schwerpunktverlagerungen effizienter umgesetzt werden.

Geeignete CAS-Aufgaben für Prüfungen

Aufgaben in Lernsituationen unterscheiden sich von Prüfungsaufgaben unter anderem durch ihren Grad an Offenheit. In der Praxis stellt sich häufig die Frage, was geeignete CAS-Aufgaben für die Prüfung auszeichnet.

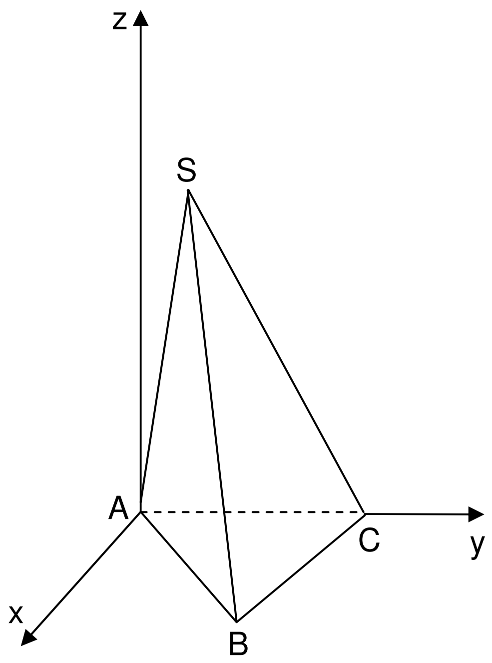
Eine CAS-Aufgabe für die Prüfung sollte Herausforderungen bieten, bei denen das Verständnis von Zusammenhängen im Vordergrund steht und bei denen die Arbeit mit Termen tragfähige, verallgemeinerbare Einsichten liefert. Es sollte eine gewisse Offenheit gegeben sein – abgestuft nach dem Leistungsniveau der Prüfungsgruppe. Unterschiedliche Lösungsansätze sollten möglich sein. In der Aufgabenstellung sollte das Abarbeiten von Routinen vermieden sowie mathematische Argumentation und Reflexion ausdrücklich eingefordert werden.

Diese Forderungen müssen technologieunabhängig an alle Prüfungsaufgaben in Mathematik gestellt werden, sie sind jedoch mit CAS besser zu realisieren. Angemessener CAS-Einsatz fördert daher maßgeblich den Erwerb der aus den EPA und den Bildungsstandards abgeleiteten Kompetenzen.

4 Anhang

1. Beispielaufgabe für 2.1, Teil 6 (TH)

Gegeben seien die Punkte $A(0;0;0)$, $B(4;5;0)$, $C(0;6;0)$ und $S(2;3;12)$. Diese Punkte sind die Eckpunkte einer dreiseitigen Pyramide.



(Skizze nicht maßstabgerecht)

a) Zeigen Sie, dass die Mittelpunkte der Kanten $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{SC}$ und $\overline{AS}$ ein Parallelogramm, jedoch kein Rechteck bilden! **3 (BE)**

b) Die Gerade g_1 verläuft durch die Punkte A und C, die Gerade g_2 enthält die Punkte S und B. Weisen Sie nach, dass die Geraden windschief sind! Berechnen Sie den Abstand dieser beiden Geraden! **4 (BE)**

Ergänzung im CAS - Abitur:

Bestimmen Sie die Koordinaten mindestens eines Lotfußpunktes dieser kürzesten Verbindung beider Geraden!

Beispiellösung zu Aufgabenteil a) - ohne Verwendung des CAS–Systems

1 $M_1 = M_{AB} :\Rightarrow M_1\left(\frac{0+4}{2};\frac{0+5}{2};\frac{0+0}{2}\right) \Rightarrow M_1\left(2;\frac{5}{2};\ 0\right)$

Der Mittelpunkt einer Strecke wird aus dem arithmetischen Mittel der Koordinaten der Endpunkte dieser Strecke berechnet.

2 $M_2 = M_{BC} :\Rightarrow M_2\left(\frac{4+0}{2};\frac{5+6}{2};\frac{0+0}{2}\right) \Rightarrow M_2\left(2;\frac{11}{2};0\right)$

3 $M_3 = M_{SC}: \Rightarrow M_3\left(\frac{2+0}{2};\frac{3+6}{2};\frac{12+0}{2}\right) \Rightarrow M_3\left(1;\frac{9}{2};6\right)$

4 $M_4 = M_{AS}: \Rightarrow M_4\left(\frac{0+2}{2};\frac{0+3}{2};\frac{0+12}{2}\right) \Rightarrow M_4\left(1;\frac{3}{2};6\right)$.

Nachweis Parallelogramm

5 $\overrightarrow{M_{AB}M_{BC}} = \begin{pmatrix} 2-2 \\ \frac{11}{2}-\frac{5}{2} \\ 0-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\qquad \overrightarrow{M_{AS}M_{SC}} = \begin{pmatrix} 1-1 \\ \frac{9}{2}-\frac{3}{2} \\ 6-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

6 $\overrightarrow{M_{AB}M_{BC}} = \overrightarrow{M_{AS}M_{SC}}$

7 Somit besitzt das Viereck $M_{AB}M_{BC}M_{SC}M_{AS}$ ein Paar paralleler und gleichlanger Seiten und ist damit ein Parallelogramm**.**

Der Nachweis ist auch elementargeometrisch möglich:
Nachweis kein Rechteck

8 $\overrightarrow{M_{AB}M_{AS}} = \begin{pmatrix} 1-2 \\ \frac{3}{2}-\frac{5}{2} \\ 6-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}$

9 $\overrightarrow{M_{AB}M_{BC}} \circ \overrightarrow{M_{AB}M_{AS}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix} = -3 \neq 0$

10 Damit schließen die Seiten $\overline{M_{AB}M_{BC}}$ und $\overline{M_{AB}M_{AS}}$ keinen rechten Winkel ein. Also handelt es sich nicht um ein Rechteck.

Lösung zu Aufgabenteil a) – mit Nutzung des CAS – Systems

1 $\overrightarrow{OM_1} = \frac{1}{2}\cdot\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{5}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ $\qquad \overrightarrow{OM_2} = \frac{1}{2}\cdot\left(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{11}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$

2 $\overrightarrow{OM_3} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OS}+\overrightarrow{OC}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{9}{2} \\ 6 \end{pmatrix}$ $\qquad \overrightarrow{OM_4} = \frac{1}{2}\cdot\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OS}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{2} \\ 5 \end{pmatrix}$

Nachweis Parallelogramm

3 $\overrightarrow{M_{AB}M_{BC}} = \overrightarrow{OM_{BC}} - \overrightarrow{OM_{AB}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\qquad \overrightarrow{M_{AS}M_{SC}} = \overrightarrow{OM_{SC}} - \overrightarrow{OM_{AS}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

1 4 $\overrightarrow{M_{AB}M_{BC}} = \overrightarrow{M_{AS}M_{SC}}$

5 Somit besitzt das Viereck $M_{AB}M_{BC}M_{SC}M_{AS}$ ein paar paralleler und gleichlanger Seiten und ist damit ein Parallelogramm.

Nachweis kein Rechteck

6 $\overrightarrow{M_{AB}M_{AS}} = \overrightarrow{OM_{AS}} - \overrightarrow{OM_{AB}} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}$

7 $\overline{M_{AB}M_{BC}} \circ \overline{M_{AB}M_{AS}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix} = -3 \neq 0$

8 Damit schließen die Seiten $\overline{M_{AB}M_{BC}}$ und $\overline{M_{AB}M_{AS}}$ keinen rechten Winkel ein. Also handelt es sich nicht um ein Rechteck.

Auch hier ist der elementargeometrische Weg beschreitbar.

Lösung zu Aufgabenteil b) - ohne Verwendung des CAS-Systems

1. $g_1 = g(AC) \quad \vec{x} = \overrightarrow{OA} + \lambda \cdot \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \lambda \in R$

2. $g_2 = g(SB) \quad \vec{x} = \overrightarrow{OB} + \eta \cdot \overrightarrow{SB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + \eta \cdot \begin{pmatrix} 4-2 \\ 5-3 \\ 0-12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + \eta \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix} \quad \eta, \mu \in R$

3. $\overrightarrow{AC} \overset{?}{=} \sigma \cdot \overrightarrow{SB} \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \overset{?}{=} \sigma \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} 0 = \sigma_x \\ 6 = \sigma_y \\ 0 = \sigma_z \end{matrix} \qquad \Rightarrow \sigma_x = 0 \neq 6 = \sigma_y$

4. Die beiden Richtungsvektoren sind also nicht parallel. Demzufolge können die beiden Geraden nur windschief sein oder sie schneiden sich.

5. Gleichsetzen der Geradengleichungen: $\lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix}$

6. $\begin{aligned} I:&\quad 0 = 4 + \mu \quad \Rightarrow \mu = -4 \\ II:&\quad 6\lambda = 5 + \mu \\ III:&\quad 0 = -6\mu \quad \Rightarrow \mu = 0 \end{aligned}$

7. Es gibt somit kein reelles μ, dass alle drei Gleichungen erfüllt. Das Gleichungssystem ist also nicht lösbar, demzufolge sind die Geraden g_1 und g_2 windschief.

Der Nachweis ist auch elementargeometrisch möglich:

Abstand der windschiefen Geraden:

8. Hilfsebene ε: $\quad \vec{x} = \overrightarrow{OA} + \lambda \cdot \overrightarrow{AC} + \mu \cdot \overrightarrow{SB} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix}$

9. I: $\quad x = 0 \cdot \lambda + 1 \cdot \mu \quad \Rightarrow \quad \mu = x$
   II: $\quad y = 6 \cdot \lambda + 1 \cdot \mu \qquad$ II': $\quad y = 6 \cdot \lambda + x$
   III: $\quad z = 0 \cdot \lambda - 6 \cdot \mu \qquad$ III': $\quad z = 0 \cdot \lambda - 6 \cdot x \Rightarrow \quad 6x + z = 0$

10. ε in Koordinatenform $\quad \varepsilon : 6x + z = 0$

11. $\vec{n}_\varepsilon = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad |\vec{n}_\varepsilon| = \sqrt{6^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{37}$

12. HNF: $\quad \frac{6x + z}{\sqrt{37}} = 0$

13. $d(g_1;g_2)=\left|\frac{6x_B+z_B}{\sqrt{37}}\right|=\left|\frac{6\cdot 4+0}{\sqrt{37}}\right|=\frac{24}{\sqrt{37}}=\frac{24\cdot\sqrt{37}}{37}\approx 3{,}95\ LE$

Lösung zu Aufgabenteil b) - mit Verwendung des CAS – Systems

1. $g_1=g(AC)$ $\quad\vec{x}=\overrightarrow{OA}+\lambda\cdot\overrightarrow{AC}=\lambda\cdot\begin{pmatrix}0\\6\\0\end{pmatrix}$ $\quad\lambda\in R$

2. $g_2=g(SB)$ $\quad\vec{x}=\overrightarrow{OB}+\eta\cdot\overrightarrow{SB}=\begin{pmatrix}4\\5\\0\end{pmatrix}+\eta\cdot\begin{pmatrix}2\\2\\-12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\5\\0\end{pmatrix}+\mu\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\-6\end{pmatrix}$ $\quad\eta,\ \mu\in R$

3. $\overrightarrow{AC}\overset{?}{=}\sigma\cdot\overrightarrow{SB}$ $\quad\begin{pmatrix}0\\6\\0\end{pmatrix}\overset{?}{=}\sigma\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\-6\end{pmatrix}$ $\quad\begin{matrix}0=\sigma_x\\ \Rightarrow 6=\sigma_y\\ 0=\sigma_z\end{matrix}$ $\quad\Rightarrow\sigma_x=0\neq 6=\sigma_y$

4. Die beiden Richtungsvektoren sind also nicht parallel. Demzufolge können die beiden Geraden nur windschief sein oder sie schneiden sich.

5. Gleichsetzen der Geradengleichungen: $\lambda\cdot\begin{pmatrix}0\\6\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\5\\0\end{pmatrix}+\mu\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\-6\end{pmatrix}$

6.
$$\begin{aligned} I:&\quad 0=4+\mu &&\Rightarrow\mu=-4\\ II:&\quad 6\lambda=5+\mu &&\\ III:&\quad 0=-6\mu &&\Rightarrow\mu=0\end{aligned}$$

7. Es gibt somit kein reelles μ, dass alle drei Gleichungen erfüllt. Das Gleichungssystem ist also nicht lösbar, demzufolge sind die Geraden g_1 und g_2 windschief.

Hier ist auch der elementargeometrische Weg beschreitbar.

Abstand der windschiefen Geraden und Bestimmung eines Lotfußpunktes:

8. G sei der Lotfußpunkt auf der Geraden g_1 und H sei der Lotfußpunkt auf der Geraden g_2

9. $\overline{OG}=\lambda\cdot\begin{pmatrix}0\\6\\0\end{pmatrix}$ und $\overline{OH}=\begin{pmatrix}4\\5\\0\end{pmatrix}+\mu\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\-6\end{pmatrix}$ mit $\lambda,\mu\in R$

10. $\overline{HG}=\begin{pmatrix}-4-\mu\\6\lambda-5-\mu\\6\mu\end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{HG}$ ist orthogonal zu g_1 und zu g_2

11. $\overrightarrow{HG}\circ\overrightarrow{AC}=0$ und $\overrightarrow{HG}\circ\overrightarrow{SB}=0$

12. Lösungen des Gleichungssystems: $\lambda=\frac{181}{222}$ und $\mu=-\frac{4}{37}$

13. $d(g_1;g_2)=\left|\overrightarrow{HG}\right|=\left|\begin{pmatrix}-\frac{144}{37}\\0\\-\frac{24}{37}\end{pmatrix}\right|=\frac{24\cdot\sqrt{37}}{37}LE$

14. Lotfußpunkte: $G_1(0;\ \frac{181}{37};\ 0)$ $\quad H(\frac{144}{37};\ \frac{181}{37};\ \frac{24}{37})$

2. Beispielaufgabe für 2.1, Teil 7 (SN)

In Riad (Saudi-Arabien) wurde 2001 das Kingdom-Center fertig gestellt. Es beinhaltet außer Appartements, einem Luxushotel und Büros auch zahlreiche Geschäfte.

Die Grundfläche liegt in der x-y-Ebene eines gedachten kartesischen Koordinatensystems (eine Einheit entspricht 1 Meter). Sie wird durch eine Ellipse begrenzt, deren Mittelpunkt sich im Koordinatenursprung befindet und deren Achsen auf den Koordinatenachsen liegen.

Besonderes Merkmal des Gebäudes ist eine Öffnung, die oben durch eine Brücke mit Aussichtsplattform geschlossen ist. Der gekrümmte Teil dieser Öffnung hat in der x-z-Ebene die Form einer Parabel.

2.1 Eine Gleichung der Parabel in der x-z-Ebene lautet $z = 0{,}11x^2 + 186$ $\left(x \in \mathbb{R}\,, -32{,}5 \le x \le 32{,}5\right)$.

Geben Sie die Höhe des Scheitelpunktes dieser Parabel über der Grundfläche des Gebäudes sowie Näherungswerte für die Höhe des Gebäudes und die Länge der Brücke an.

(3 BE)

2.2 Zu einem bestimmten Zeitpunkt treffen Sonnenstrahlen mit dem Richtungsvektor $\vec{s} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -15 \end{pmatrix}$ auf das Gebäude.

Ermitteln Sie eine Gleichung der parabelförmigen Schattenbegrenzung der Öffnung auf der Erdoberfläche.

Bestimmen Sie die Größe des Flächeninhaltes der Öffnung innerhalb der Schattenfläche.

<u>Hinweis:</u> Nehmen Sie die Erdoberfläche vereinfacht als unbebaute Ebene an und vernachlässigen Sie den Schatten der Brücke.

(6 BE)

2.3 Anlässlich eines Feiertages wird das Gebäude durch zwei Laser L_1 und L_2 angestrahlt, die sich in den Punkten $P_{L_1}(0; 45; 20)$ und $P_{L_2}(0; -55; 0)$ befinden. Laser L_1 bewegt den Lichtstrahl in der Ebene E_1: $(-65a + 1300)y - 2925z = -2925a$, Laser L_2 in der Ebene E_2: $-65ay + 3575z = 3575a$. Der Wert a wird durch einen Computer gesteuert. Ermitteln Sie alle Werte a, für die L_1 die Öffnung der Parabel überstreicht.

<u>Hinweis:</u> Der Laser ist so aufgestellt, dass nur die parabelförmige Begrenzung in der x-z-Ebene berücksichtigt werden muss.

Der Wert a wird auf 200 eingestellt. In der Schnittgerade der Ebenen E_1 und E_2 treten besondere Lichteffekte auf.
Geben Sie eine Gleichung der Schnittgeraden und den Schnittwinkel der Ebenen an.

(5 BE)

Jeweils im Rhythmus von einer Minute startet ein Computer den Bewegungs- und Farbablauf der beiden Laser zeitgleich neu. Diese Abschnitte werden im Folgenden als Sequenzen bezeichnet. Es stehen für jeden Laser nur die zwei Farben violett und gelb zur Verfügung. Der Computer legt die Reihenfolge jeweils zufällig fest, es ist also auch möglich, dass bei aufeinander folgenden Sequenzen die Farbe nicht wechselt.

2.4 Bei einer Einstellung des Computers tritt violettes Licht beim Laser L_2 mit der Wahrscheinlichkeit 0,35 auf.

Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, dass Laser L_2 bei 10 aufeinander folgenden Sequenzen häufiger gelb zeigt, als man erwarten kann.

(2 BE)

2.5 Der Laser L_1 wird bei einer anderen Einstellung des Computers in 10 Stichproben mit jeweils 10 Sequenzen beobachtet und es wird notiert, bei wie vielen Sequenzen davon jeweils die Farbe violett auftrat.

Anzahl der Sequenzen mit violettem Licht in der Stichprobe	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Anzahl der Stichproben, für die das zutrifft	0	0	1	3	3	1	2	0	0	0	0

Begründen Sie, dass für das Ereignis „Laser L_1 zeigt violettes Licht" auf der Grundlage der Stichproben eine Wahrscheinlichkeit von $\frac{2}{5}$ angenommen werden kann.

Der Zufallsversuch „Entscheidung für violettes oder gelbes Licht beim Laser L_1" soll für 200 Sequenzen simuliert werden.

Beschreiben Sie, wie Sie diese Simulation mithilfe eines GTR, eines Computer-Algebra-Systems oder eines anderen Zufallsgenerators umsetzen können.

(4 BE)

Erwartungsbild

2.1 Höhe des Scheitelpunktes über der Grundfläche: 186 m
Höhe des Gebäudes: ≈ 302 m
Länge der Brücke: ≈ 65 m (3 BE)

2.2 Gleichung einer Projektionsgeraden
Koordinaten der Projektionspunkte (2 BE)
Gleichung der Parabel: z. B. $y = 0{,}04x^2 + 62{,}0 \quad (x \in R, -32{,}5 \le x \le 32{,}5)$
Ansatz für Flächeninhalt
Flächeninhalt in Abhängigkeit von der Gleichung der Parabel: z. B. 1600 m^2 (6 BE)

2.3 Lösungsidee und Modell

Intervall für Werte a: z. B. $186 < a < 302$ (2 BE)

eine Gleichung der Schnittgeraden: z. B. $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 200 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbb{R})$

Größe des Schnittwinkels α: $\alpha \approx 29{,}4°$ (5 BE)

2.4 Ansatz für Wahrscheinlichkeit

Wahrscheinlichkeit: $P(Y \geq 7) \approx 0{,}5138$ (2 BE)

2.5 Begründung

z. B.: Es wurden 10 Stichproben mit je 10 Sequenzen, also insgesamt 100 Sequenzen beobachtet. Davon trat 40 Mal violettes Licht auf. Die Wahrscheinlichkeit für violettes Licht kann deshalb auf $\frac{2}{5}$ geschätzt werden. (2 BE)

Beschreibung

z. B.: Mit dem Zufallsgenerator werden 200 Zufallszahlen von 1 bis 5 ermittelt. Es gilt die Regel: Wurde eine 1 oder 2 ermittelt, so wird die Farbe violett zugeordnet, bei allen anderen Versuchsausgängen gelb. (2 BE)

(4 BE)

3. Beispielaufgabe für 2.2, partiell differenzierende Aufgabenstellung für die Variante GTR und CAS (SN)

Allgemeine Arbeitshinweise

Die Prüfungsarbeit besteht aus den Teilen A und B, die innerhalb von **240 Minuten** zu bearbeiten sind.

Teil A: Ein Teil der Aufgaben im Teil A ist auf dem **Aufgabenblatt** zu lösen.

Für die Bearbeitung der Aufgaben im Teil A sind ausschließlich folgende Hilfsmittel zugelassen:

- Wörterbuch der deutschen Rechtschreibung,
- Zeichengeräte und Zeichenhilfsmittel.

Im Teil A sind **20 BE** (Bewertungseinheiten) zu erreichen.

Alle Materialen zum Teil A werden 60 Minuten nach Arbeitsbeginn eingesammelt.

Teil B: Für die Bearbeitung der Aufgaben im Teil B sind nach dem Einsammeln von Teil A folgende **Hilfsmittel** zugelassen:

- grafikfähiger, programmierbarer Taschenrechner mit oder ohne Computer-Algebra-System (CAS) bzw. ein CAS auf der Grundlage einer anderen Plattform,
- Tabellen- und Formelsammlung,
- Lehrbücher und Unterrichtsmaterialien,
- im Teil A zugelassene Hilfsmittel.

Im Teil B sind **40 BE** zu erreichen.

Geben Sie auf dem Deckblatt der Arbeit den verwendeten Typ des Taschenrechners an.

Die **Lösungsdarstellung** muss nachvollziehbar sein und in einwandfreier Form erfolgen.

Prüfungsinhalt

Teil A

Tragen Sie die Antworten zu den Aufgaben 1 und 2 auf dem vorliegenden Aufgabenblatt ein, und verwenden Sie für die Antworten zu den Aufgaben 3 bis 6 das bereitliegende Papier für die Reinschrift.

1 In den Aufgaben 1.1 bis 1.5 ist von den jeweils fünf Auswahlmöglichkeiten genau eine Antwort richtig. Kreuzen Sie das jeweilige Feld an.

1.1 Die Tangente an den Graphen einer ganzrationalen Funktion besitzt an der Stelle $x = -3$ den Anstieg $-\frac{7}{3}$. Jede Senkrechte zu dieser Tangente hat die Steigung

☐	☐	☐	☐	☐
$-\frac{1}{3}$	$-\frac{3}{7}$	$\frac{7}{3}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{1}{3}$

1.2 Der Graph der Funktion f mit $f(x)=\frac{5}{x+10}$ $(x \in D_f)$ besitzt Asymptoten mit den Gleichungen

☐	☐	☐	☐	☐
$x=0$ $y=-10$	$x=5$ $y=-10$	$x=-10$ $y=5$	$x=-10$ $y=0$	$x=5$ $y=0$

1.3 Für wie viele Werte b schließt der Graph der Funktion g mit $g(x)=x^2+2\cdot x+1$ $(x \in D_g)$ mit der x-Achse und der Geraden $x=b$ $(b \in \mathbb{R})$ eine Fläche vom Inhalt 9 ein?

☐	☐	☐	☐	☐
null	genau einen	höchstens einen	genau zwei	mindestens zwei

1.4 Die Geraden g und h mit

$$g: \vec{x}=\begin{pmatrix}0\\8\\0\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}-2\\-2\\3\end{pmatrix} \quad (s \in \mathbb{R}) \text{ und } h: \vec{x}=\begin{pmatrix}-6\\6\\3\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}2\\-2\\3\end{pmatrix} \quad (t \in \mathbb{R})$$

☐	☐	☐	☐	☐
verlaufen parallel	schneiden sich senkrecht	schneiden sich nicht senkrecht	verlaufen windschief	sind identisch

1.5 Ein reguläres Tetraeder beschriftet mit den Zahlen 1 bis 4 wird genau zweimal geworfen. Die unten liegende Zahl gilt als geworfen.

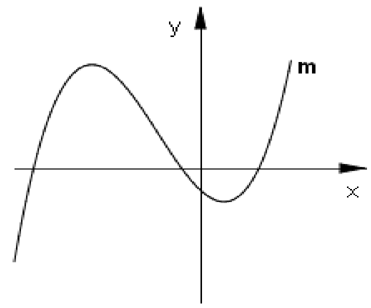
Die Wahrscheinlichkeit für „Es wurde mindestens einmal die 3 geworfen“ beträgt

☐	☐	☐	☐	☐
$\frac{7}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{12}{16}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{1}{16}$

Für Aufgabe 1 (5 BE)

2. Skizzieren Sie zum vorgegebenen Graphen einer Funktion m in dasselbe Koordinatensystem den Graphen der zugehörigen Ableitungsfunktion m’ im dargestellten Intervall.

Begründen Sie den Verlauf des Graphen der Ableitungsfunktion an markanten Stellen.



(4 BE)

3 Gegeben sind die Funktion f mit $f(x)=2e^x(2x+1)$ $(x \in D_f)$ sowie die Funktion g mit $g(x)=-\frac{2}{x}+\frac{3}{4x^2}$ $(x \in D_g)$.

Ermitteln Sie die Gleichung der ersten Ableitungsfunktion der Funktion f sowie eine Gleichung einer Stammfunktion der Funktion g. (4 BE)

4 Peter hat in einem Computer-Algebra-System (CAS) die Funktion $a(r, h) = \pi \cdot r^2 \cdot h$ definiert.
Welcher mathematische Sachverhalt wird durch die Funktion a beschrieben?

Geben Sie an, welchen Wert das CAS bei der Eingabe $\frac{1}{3}a(5, 6)$ ausgibt und interpretieren Sie dessen Bedeutung.

(3 BE)

5 Auf einer Spindel befinden sich genau acht CD-Rohlinge, von denen genau zwei unbrauchbar sind. Der Spindel werden nacheinander genau zwei Rohlinge ohne Zurücklegen entnommen.
Berechnen Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit beide Rohlinge brauchbar sind.

Ermitteln Sie, wie viele Rohlinge man im Mittel der Spindel entnehmen muss, bis man einen brauchbaren gefunden hat.

(4 BE)

Teil B
Aufgabe 1

Jeden Winter zieht es viele Wintersportfreunde mit Ski und Snowboard an die kleinen und großen Skihänge der Wintersportgebiete im Erzgebirge.

Ein Teil des Graphen der Funktion f mit $f(x) = e^{\frac{1}{6}x-2}\left(\frac{7}{2} - \frac{1}{8}x\right) + 5 \quad (x \in D_f)$ kann zur Beschreibung der Profillinie einer Skipiste zwischen den Punkten A und $B(0; f(0))$ verwendet werden. Die Funktionswerte geben die jeweilige Höhe über dem Meeresspiegel an.

Der Punkt A auf dem Graphen der Funktion f liegt so, dass seine y-Koordinate der größtmöglichen Höhe über dem Meeresspiegel entspricht.

Eine Einheit entspricht 100 m.

1.1 Bestimmen Sie den Definitionsbereich der Funktion f so, dass nur der Verlauf der Profillinie der Skipiste beschrieben wird.

Ermitteln Sie die Höhendifferenz der Skipiste.

(4 BE)

1.2 Bestimmen Sie die durchschnittliche Hangneigung der Profillinie zwischen den Punkten A und B in Prozent.

<u>Hinweis:</u> Eine Hangneigung von z. B. 40 % bedeutet, dass bei einer horizontalen Entfernung von 100 m ein Höhenunterschied von 40 m existiert.

Zur Charakterisierung von Skipisten nutzt man nicht die durchschnittliche, sondern die maximale Hangneigung.

Begründen Sie, dass dieses Vorgehen sinnvoll ist.

Entsprechend der maximalen Neigung eines Hanges unterscheidet man drei Schwierigkeitsgrade von Skipisten:

blau:	leicht (für Anfänger geeignet) mit einer maximalen Neigung unter 25 %
rot:	mittelschwer mit einer maximalen Neigung von 25 % bis 40 %
schwarz:	anspruchsvoll (nur für Könner) mit einer maximalen Neigung über 40 %

Ermitteln Sie den Schwierigkeitsgrad der Skipiste zwischen den Punkten A und B.

(6 BE)

Teilaufgabe 1.3 (für Prüfungsteilnehmer, die ein CAS benutzen)

1.3 Für ein Computerprogramm soll die Profillinie der Skipiste durch die Funktion $f_{a;b}$ *mit*

$f_{a;b}(x) = e^{\frac{1}{6}\cdot x-2} \cdot \left(\frac{7}{2} - a \cdot x\right) + b \quad \left(a, b \in R, a, b > 0; x \in D_{f_{a;b}}\right)$ *simuliert werden.*

Die Funktionswerte geben die jeweilige Höhe über dem Meeresspiegel an. Die Profillinie der Skipiste liegt zwischen den Punkten $P_{a;b}$ *und* $Q_{a;b}\left(0; f_{a;b}(0)\right)$. *Der Punkt* $P_{a;b}$ *ist der lokale Extrempunkt der Funktion* $f_{a;b}$.

Eine Einheit entspricht 100 m.

Erläutern Sie, welche Bedeutung der Parameter b bei der Simulation der Skipiste besitzt.

Ermitteln Sie die Werte der Parameter a und b so, dass die Bedingungen I und II erfüllt sind.

I *Der Punkt* $Q_{a;b}$ *liegt genau 300 m über dem Meeresspiegel.*

II Die Abszisse des Punktes, in dem die Profillinie die maximale Neigung besitzt, beträgt 200 m.

(6 BE)

Teilaufgabe 1.3 (für Prüfungsteilnehmer, die kein CAS benutzen)

1.3 Für ein Computerprogramm soll die Profillinie der Skipiste zwischen den Punkten A und B durch eine ganzrationale Funktion g angenähert werden.

Begründen Sie, dass diese Funktion mindestens dritten Grades sein sollte.

Ermitteln Sie eine Gleichung der Funktion g.

Bestimmen Sie im angegebenen Bereich die größtmögliche Differenz in den Höhen über dem Meeresspiegel zwischen der Funktion f und der Näherungsfunktion g.

(6 BE)

1.4 In einem viel besuchten Skigebiet gibt es einen Vierer-Sessel-Lift, der zu 72 % von Skifahrern genutzt wird. Der Rest sind Snowboarder. Jeder Vierer-Sessel sei voll besetzt.

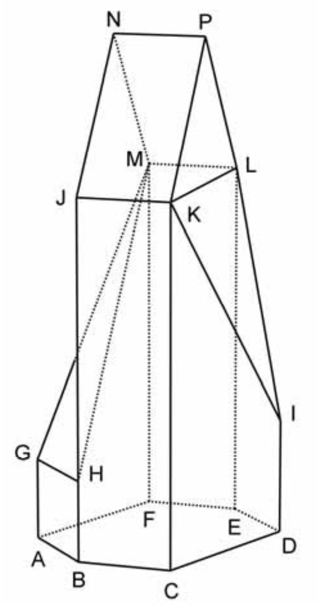
Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse.
Ereignis A: Auf einem Vierer-Sessel fahren genau drei Skifahrer.
Ereignis B: Auf einem Vierer-Sessel fahren höchstens zwei Snowboarder.

Geben Sie an, wie viele Snowboarder man durchschnittlich auf 20 Vierer-Sesseln beobachten kann. (4 BE)

Aufgabe 2 (SN)

Dallas in Texas ist für seine futuristisch gestalteten Hochhäuser berühmt. Eines der bekanntesten ist das 1986 fertig gestellte Fountain Place Building. Ziel des Architekten war es, ein Gebäude zu schaffen, dass von jedem Standort aus und zu jedem Zeitpunkt unterschiedlich aussehen soll. Das Gebäude ist vollständig mit verspiegeltem Glas verkleidet, so dass in Abhängigkeit der Lichtverhältnisse die Farbwirkung mehrmals täglich wechselt.

Ansicht von Westen



Ansicht von Osten

(Abbildung nicht maßstäblich)

Die geometrische Grundform besteht aus einem Quader mit aufgesetztem Prisma. In Richtung Westen und in Richtung Osten sind jeweils verschiedene dreiseitige Prismen mit angesetzten Pyramiden angebracht (siehe Abbildung).

Die Eckpunkte der sechseckigen Grundfläche sind allesamt Eckpunkte eines regulären Achtecks, das so in der x-y-Ebene eines gedachten kartesischen Koordinatensystems (eine Einheit entspricht 1 Meter) liegt, dass sich der Mittelpunkt dieses Achtecks im Koordinatenursprung befindet. Der Dachfirst $\overline{NP}$ verläuft parallel zur Seite $\overline{BC}$ des Achtecks, sein Mittelpunkt liegt senkrecht über dem Koordinatenursprung.

Von den Eckpunkten des Gebäudes sind folgende Koordinaten bekannt:

C (0 ; -41,5 ; 0), D (41,5 ; 0 ; 0), G (-41,5 ; 0 ; 35), H (-29,4 ; -29,4; 35), I (41,5 ; 0 ; 50),
K (0 ; -41,5 ; 155,5), L (29,4 ; 29,4 ; 155,5) und M (0 ; 41,5 ; 155,5).

2.1 Die Spitze M der im linken Bild sichtbaren Pyramide endet in 71 % der Gesamthöhe des Gebäudes.

Geben Sie die Gesamthöhe des Gebäudes an.

(1 BE)

2.2 Zeichnen Sie die Draufsicht des Gebäudes maßstäblich.

Geben Sie die Koordinaten der nicht vorgegebenen Eckpunkte an.

(4 BE)

2.3 Weisen Sie nach, dass es vier Eckpunkte der Grundfläche gibt, die ein Quadrat aufspannen.

(2 BE)

2.4 Zeigen Sie, dass $-7\,479{,}950x + 3101{,}700y - 1722{,}250z = -396\,530{,}425$ eine Gleichung der Ebene E_{KLI} ist.

Prüfen Sie, ob die Ebenen E_{GHM} und E_{KLI} zueinander orthogonal sind.

(5 BE)

2.5 In einem früheren Planungsentwurf plante der Architekt, die Spitze der Pyramide nach Osten in die Grundrissebene zu legen, d. h., der Punkt I würde mit dem Punkt D zusammenfallen.

Ermitteln Sie den Schnittwinkel der Ebenen E_{KLI} und E_{KLD}.

Das Glas der „schräg liegenden Flächen“ KLI bzw. KLD muss besonderen Qualitätsansprüchen genügen und ist deshalb besonders teuer.

Ermitteln Sie, um wie viel Prozent die realisierte Variante gegenüber der ursprünglich geplanten Variante kostengünstiger ist.

<u>Hinweis:</u> Die Kosten für die zur Grundfläche senkrechten Wände bleiben unberücksichtigt.

(6 BE)

2.6 Nach dem Durchzug eines Hurrikans im Jahre 2004 musste eine Fläche von $20\,m^2$ der Glashülle ersetzt werden. Dafür wurden quadratische Glasscheiben mit einem Flächeninhalt von $0{,}25\,m^2$ verwendet.

Bei den Glaserarbeiten wurde mit einem Verschnitt von 10 % gerechnet. Die Ausschusswahrscheinlichkeit der Glasscheiben betrug 0,005.

Ermitteln Sie, wie viele Glasscheiben mindestens bestellt werden mussten, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 0,99 eine für die Reparatur ausreichende Menge an Glasscheiben vorhanden war.

(2 BE)

5 Literatur

Barzel, B., Hußmann, St.: *Denken in Funktionen zwischen Graph, Term und Tabelle - Rechnereinsatz auf neuen Wegen*. In: Büchter/ Humenberger/ Hußmann/ Prediger (Hg.) (2006): Realitätsnaher Mathematikunterricht – vom Fach aus und für die Praxis. Hildesheim: Franzbecker. S.158-169, 2007.

Connors E. & Snook, C.: *The effects of handheld CAS on student achievement in a first year college core calculus sequence*. The International Journal of Computer Algebra in Mathematics Education, 8(2), 99 – 114, 2001.

Drijvers, P.: *Algebra on Screen, on Paper and in the Mind*. In J. Fey, A. Cuoco, C. Kieran, L. McMullin & R.M. Zbiek (Eds.), Computer Algebra Systems in secondary school mathematics education (pp. 241-267). Reston, VA., 2002.

Drijvers, P., & Trouche, L.: *From artifacts to instruments: A theoretical framework behind the orchestra metaphor*. In G. W. Blume & M. K. Heid (Eds.), Research on technology and the teaching and learning of mathematics: Vol. 2. Cases and perspectives (pp. 363-392). Charlotte, NC: Information Age, 2008.

Flynn, P., Berenson, L., Stacey, K.: *Pushing the pen or pushing the button: a catalyst for debate over future goals for mathematics proficiency in the CAS-age*. Australian Senior Mathematics Journal, 16(2), 7-19, 2002.

Guin, D., Ruthven, K., & Trouche, L. (Eds.): *The didactical challenge of symbolic calculators: turning a computational device into a mathematical instrument*. New York: Springer, 2005.

Heinrich, R.: *CAS and calculation competence of students*. In: Proceedings of the TIME-2008-Conference, Buffelspoort, South-Africa, 2008 – bk teachware- Schriftenreihe Nr. SR-61, 2008.

Herget, W., Heugl, H., Kutzler, B., Lehmann, E., *Indispensable Manual Calculation Skills in a CAS-environment*. Ohio Journal of School Mathematics 42, 13–20, 2000.

Heugl, H.: *New emphasis of fundamental algebraic competence and its influence in exam situation*. ACDCA Proceedings Portoroz, 2000.

Ingelmann, M., Bruder, R.: *CAS-Einsatz in der Sekundarstufe I*. In: Beiträge zum Mathematikunterricht. Hildesheim: Franzbecker, 2008.

Laborde, C. (Ed): *The use of new technologies as a vehicle for restructuring teachers' mathematics*. Dordrecht, Kluwer Academic, 2001.

Lehmann, E., *Nachhaltige CAS – Konzepte für den Unterricht*, Leh-Soft; Berlin ,2007

Meagher, M.: *Learning in a Computer Algebra System (CAS) environment*. In McDougall, D.E. & Ross, J.A. (Eds.), Proceedings of the 26th meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (pp. 1457-1463).Toronto: OISE/UT, 2004.

Moldenhauer, W., et al.: *Abiturprüfung Mathematik mit CAS*. Thillm, Reihe Materialien, Heft 125, Bad Berka, 2006.

Pallack, A.: *Die gute CAS-Aufgabe für die Prüfung*. Beiträge zum Mathematikunterricht 2007, Franzbecker, Hildesheim, 2008.

Pierce, R., Stacey, K.: *Algebraic Insight: The algebra needed to use CAS*. Mathematics Teacher 95 (8), 622-627, 2002.

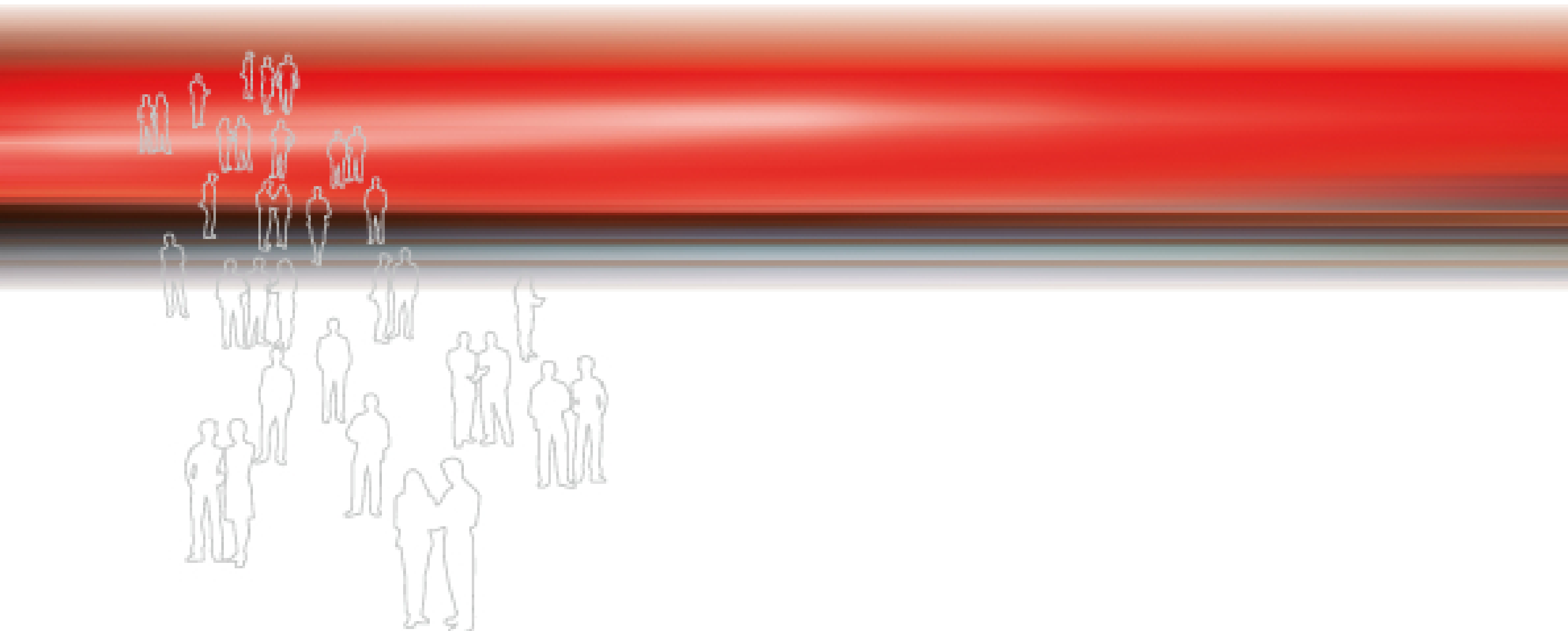
Schmidt, K., Köhler, A., Moldenhauer, W.: *Introducing a Computer Algebra System in Mathematics Education – Empirical Evidence from Germany*. The International Journal for Technology in Mathematics Education Vol.16 no.1, pp. 11-26, 2009.

Zbiek, R., Heid, K., Blume, G., & Dick, Th.: *Research on Technology in Mathematics Education – A Perspective of Constructs*. In F. Lester jr. (Ed.), Second handbook of research on mathematics teaching and learning (pp. 1169-1207). Charlotte, NC: Information Age, 2007.

6 Teilnehmer

Name	Vorname	Land	E-Mail-Adresse
Bellstädt	Martin	TH	m.bellstedt@t-online.de
Bichler	Ewald	BY	e.bichler@web.de
Bock	Volker	ST	Volker.Bock@lisa.mk.sachsen-anhalt.de
Böhlke	Steffen	SN	steffen.boehlke@sbad.smk.sachsen.de
Burger	Ulrich	HE	uliburger@iesy.net
Dietz	Gereon	HE	gereon.dietz@iq.hessen.de
Eichhorn	Dieter	SL	DEich2408@aol.com
Erens	Ralf	BW	erens.ralf@t3deutschland.de
Glaser	Torsten	NI	Torsten.Glaser@mk.niedersachsen.de
Griebel	Stephan	TI	s-griebel@ti.com
Heinrich, Dr.	Rainer	SN	rainer.heinrich@smk.sachsen.de
Hummel	Bernhard	BW	bernhard-hummel@web.de
Kaßebaum	Christian	HB	kassebaumchris@arcor.de
Köpp	Wolfgang	BB	w.koepp@gmx.de
Laakmann	Heinz	NW	hlaakmann@t-online.de
Landt	Reinhard	MV	r.landt@lisa-mv.de
Langlotz, Dr.	Hubert	TH	langlotz-mosbach@t-online.de
Lehmann, Dr.	Eberhard	BE	mirza@snafu.de
Lorenz	Peter	MV	p.lorenz@bm.mv-regierung.de
Malinowski	Susanne	SH	susanne.malinowski@vr-web.de
Moldenhauer, Dr.	Wolfgang	TH	Wolfgang.Moldenhauer@thillm.thueringen.de
Pallack, Dr.	Andreas	NW	andreas@pallack.de
Poethke	Mario	MV	MPoethke@aol.com
Prüter	Ralf	BB	Ralf.prueter@web.de
Reineke	Vera	NI	Vera.Reineke@mk.niedersachsen.de
Ritschel	Dirk	TI	d-ritschel@ti.com
Scheungrab	Christian	BY	Christian.scheungrab@isb.bayern.de
Schmidt	Ulla	NW	ulla.schmidt@cityweb.de
Springstein	Helmut	HH	Helmut.Springstein@Hamburg.de
Stachniss-Carp, Dr.	Sibylle	HE	S.Stachnisscarp@googlemail.com
Uhlmann	Stefan	NW	stefan.uhlmann@msw.nrw.de
Wagner	Jürgen	SN	juergen.wagner@sbi.smk.sachsen.de

Der T³-Themengruppe „Zentralabitur mit CAS“ gehören an:
Ewald Bichler (BY), Dieter Eichhorn (SL), Ralf Erens (BW), Rainer Heinrich (SN), Heinz Laakmann (NW), Hubert Langlotz (TH), Eberhard Lehmann (BE), Mario Poethke (MV), Ulla Schmidt (NW), Helmut Springstein (HH), Sibylle Stachniss-Carp (HE) und Hans-Dieter Sten-ten-Langenbach (NI).



Zentralabitur mit CAS
Stand und Perspektiven

Ergebnisse der Ländertagung 27. bis 29.11.2008 Bad Berka

T³ DEUTSCHLAND

www.t3deutschland.de

Texas Instruments

education.ti.com/deutschland

Weitere Materialien finden Sie unter:
www.ti-unterrichtsmaterialien.net