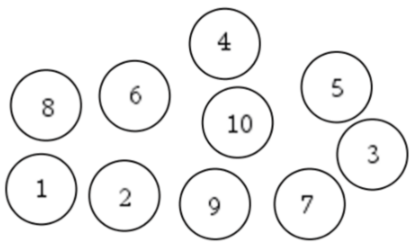
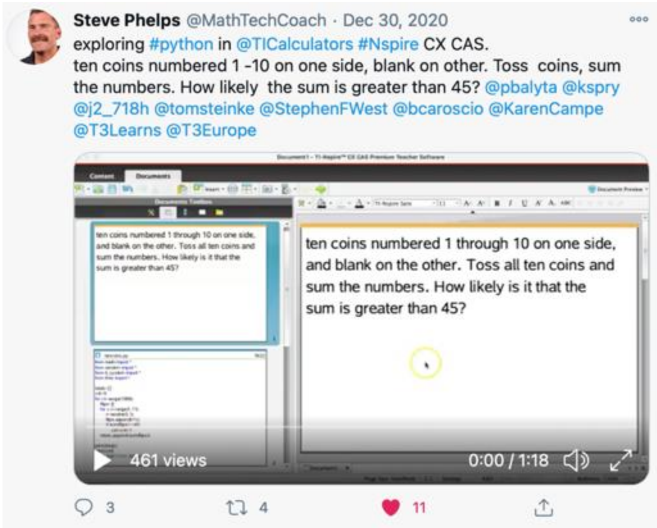
Das Problem der Zehn Münzen – eine Simulation mit Tabellenkalkulation

In ihrem Artikel „Das Problem der Zehn Münzen – Simulation mittels Programmierung mit Python/Basic“ gehen Hubert Langlotz und Sebastian Rauh auf ein Problem ein, das bei Twitter erschienen ist.

Ten Coins (idea S. Phelps via twitter):

Ten coins numbered 1 through 10 on one side and blank on the other. Toss all ten coins and sum the numbers. How likely is that the sum is grater than 45?[1]





Die beiden Kollegen nutzen für ihre Lösung eine Simulation mit der Programmiersprache Phyton bzw. Basic. Da ich nicht so ein Programmierexperte bin, hat mich der Artikel animiert, einen weiteren Lösungsweg mit Simulation zu versuchen, der ohne Programmierung auskommt und die Tabellenkalkulation nutzt. Auf die theoretische Lösung gehe ich nicht weiter ein, da dieses in dem Artikel der beiden Kollegen zu finden ist.

Hier nun zunächst die Problemstellung:

10 Münzen, auf der einen Seite leer und auf der anderen von 1 bis 10 nummeriert, werden geworfen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass man eine Summe größer gleich 45 erhält?

Mein Lösungsvorschlag bezieht sich auf eine Simulation mithilfe einer Tabellenkalkulation des TI-Nspire, in der Anwendung ***Lists&Spreadsheet***. Die Simulation ließe sich aber z. B. auch auf *Excel* übertragen.
Es wird angenommen, dass jede Münze mit der Wahrscheinlichkeit 0,5 entweder die leere Seite oder die Seite mit genau einer der Zahlen von 1 bis10 zeigt.
Kernidee ist die Simulation des Münzwurfes durch die Anweisung $=when(rand() \le 0.5, k, 0)$.
Die Variable k nimmt dabei die ganzen Zahlen von 1 bis 10 an.
Erklärung der Simulationsidee am Beispiel der Münze mit der Zahl 3:
$rand()$ erzeugt eine Zufallszahl aus dem Intervall (0; 1). Mit $rand() \le 0.5$ wird entschieden,

[1] https://twitter.com/MathTechCoach/status/1344339088678264832?s=20

ob die Zufallszahl aus dem Intervall (0; 0,5] kommt, das entspricht einer Wahrscheinlichkeit p = 0,5, also z. B. dem Ergebnis „Wappen“ bei einem Münzwurf mit einer idealen Münze (P(„Wappen“) = 0,5).

Wenn $rand()$ eine Zufallszahl aus dem Intervall (0; 0,5] erzeugt, dann gibt der Befehl $= when(rand() \leq 0.5, 3, 0)$ eine 3 zurück, sonst eine 0 (für leere Seite).
Nun wird zunächst das Vorgehen in der Zeile 1 der Tabellenkalkulation beschrieben:
Das im Beispiel erläuterte Vorgehen wird zehnmal durchgeführt, wobei die Variable k nacheinander die natürlichen Zahlen von 1 bis 10 zugewiesen bekommt (Spalten A bis J).
A1: $= when(rand() \leq 0.5, 1, 0)$
B1: $= when(rand() \leq 0.5, 2, 0)$
C1: $= when(rand() \leq 0.5, 3, 0)$
…
J1: $= when(rand() \leq 0.5, 10, 0)$

In der Zelle K1, wird die Summe der so erzeugten Zahlen mit der Anweisung $= sum(a1: j1)$ berechnet.
In der Zelle L1, wird mit der Anweisung $= when(k1 \geq 45, 1, 0)$ geprüft, ob die in Zelle K1 berechnete Summe größer oder gleich 45 ist. Wenn das der Fall ist, wird eine 1, sonst eine 0 zurückgegeben.
Die bisher eingetragenen Befehle aus der Zeile 1 werden mit menu *Daten-Füllen* als relative Zellbezüge nach unten kopiert, z. B. bis in die Zeile 1000.
Um die relative Häufigkeit der Fälle zu erhalten, bei denen in diesen 1000 Zeilen die Summe mindestens 45 ist, wird in Zelle M1 diese relative Häufigkeit berechnet mit $= \frac{sum(l1:l1000)}{1000.}$.
Der folgende Screenshot zeigt den Anfang der 1000zeiligen Tabelle:

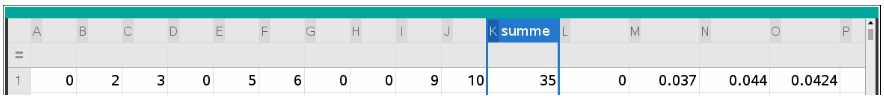
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
=																
1	0	2	0	4	0	0	0	8	9	10	33	0	0.04	0.044	0.0424	
2	0	2	0	0	5	6	7	0	0	10	30	0		0.038		
3	0	2	3	4	5	6	7	0	9	10	46	1		0.042		

Mit ctrl R lässt sich eine sofortige Neuberechnung der Simulationsdaten veranlassen.
In zehn Simulationen wurden von mir beispielhaft folgende relativen Häufigkeiten (rh) ermittelt.

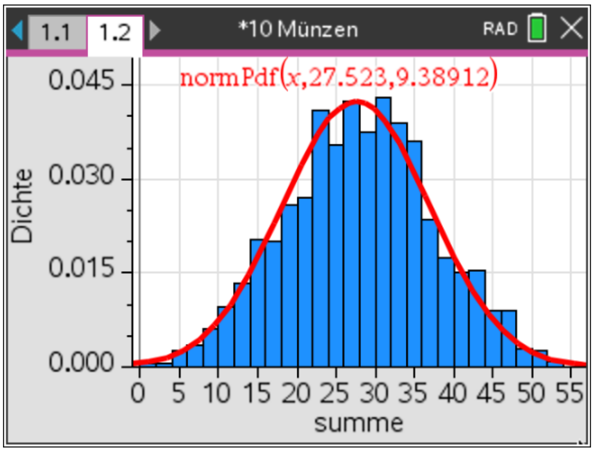
Nr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
rh	0,044	0,038	0,042	0,050	0,046	0,041	0,041	0,044	0,041	0,037

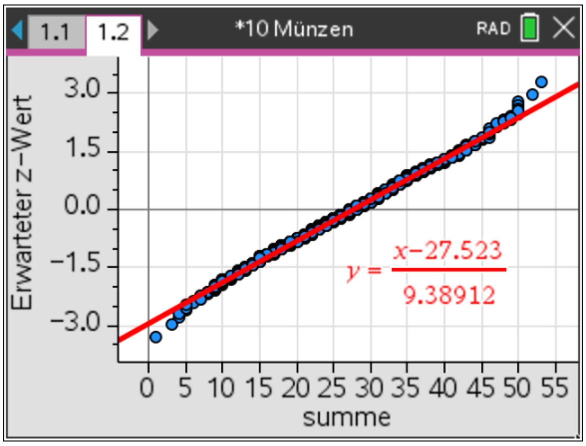
Dies ergibt einen Mittelwert von 0,0424. Das kann als Näherungswert für die gesuchte Wahrscheinlichkeit interpretiert werden.

Mögliche Vertiefungen/ Anschlussbetrachtungen:
Weitere statistische Untersuchungen bezüglich der Summe der auf diese Weise erzeugten Zufallszahlen lassen sich leicht realisieren. Man bezeichnet dazu die Spalte K mit einem Variablennamen, z. B. mit „summe“.

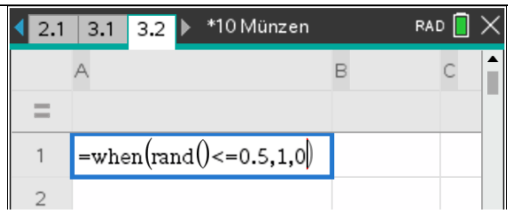
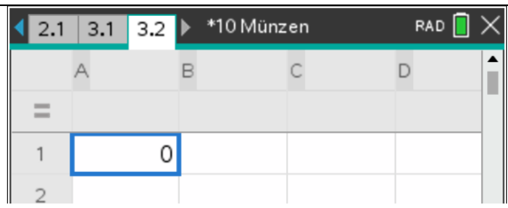


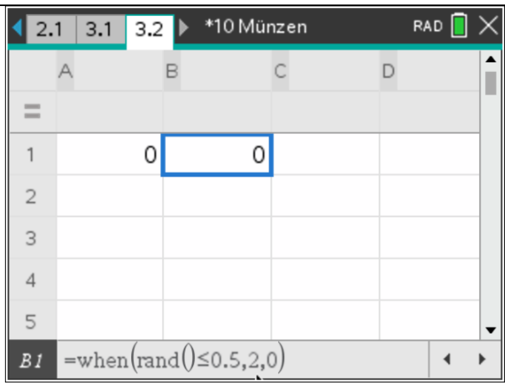
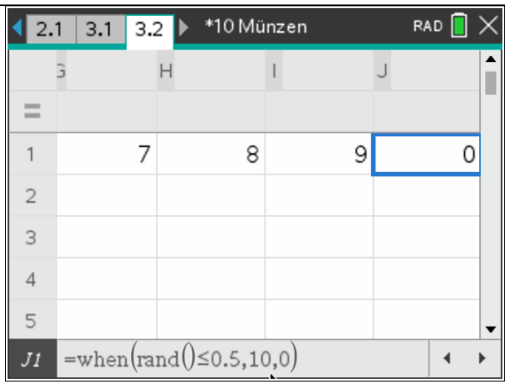
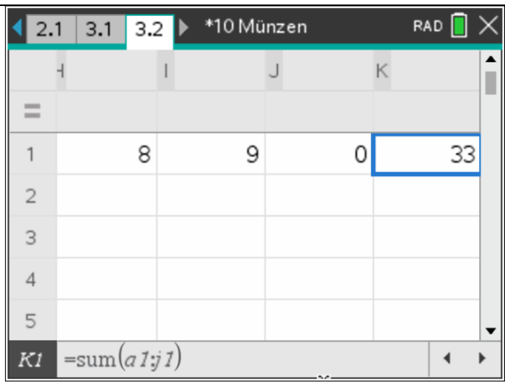
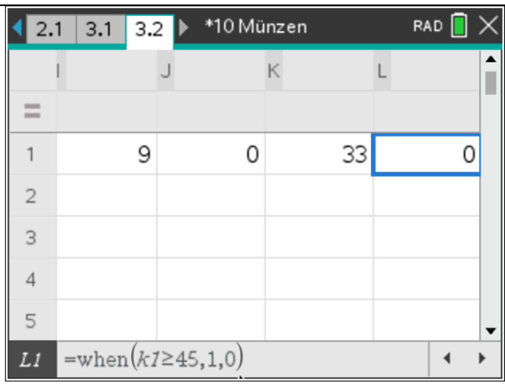
Stellt man nun in der Anwendung *Data&Statistics* die Daten von „Summe“ als Histogramm (Maßstab *Dichte*) dar, kann man gut eine näherungsweise Normalverteilung der Summen vermuten. Näherungswerte von Kenngrößen einer solchen Verteilung lassen sich z. B. unter menu *Analysieren-Normal PDF anzeigen* zusammen mit der Gaußschen Glockenkurve ablesen. Auch das Normalwahrscheinlichkeitsdiagramm unterstützt die Annahme einer Normalverteilung mit einem Erwartungswert von ca. 27,5 und einer Standardabweichung von rund 9,4 , denn die Werte liegen augenscheinlich recht gut auf der Geraden.

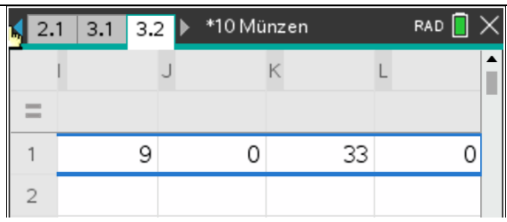
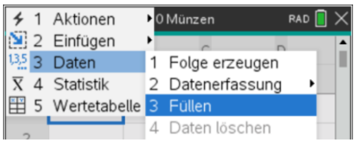
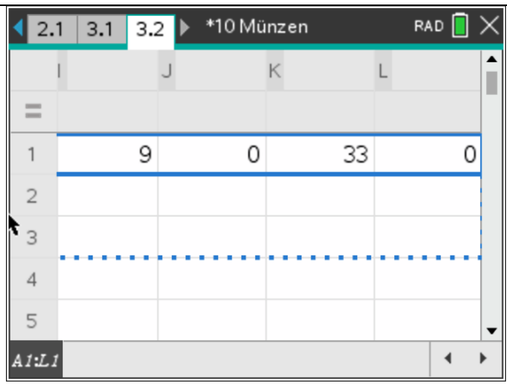
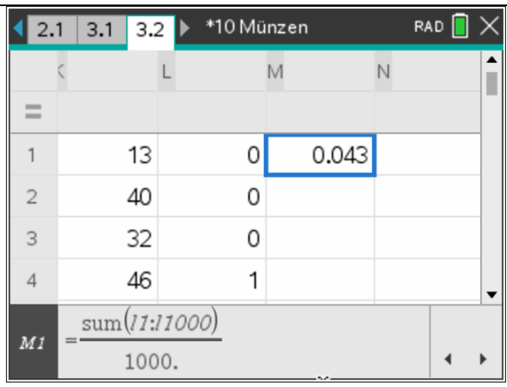
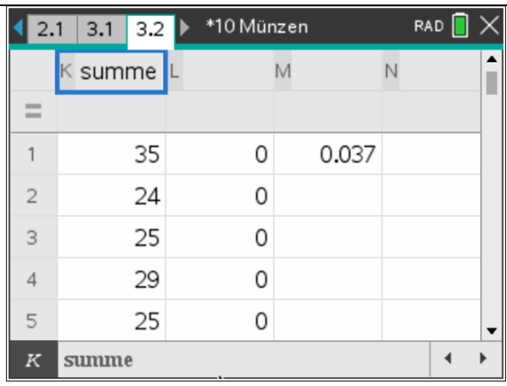




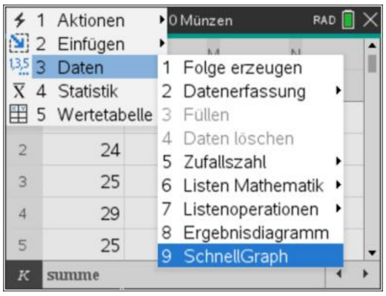
Technische Hinweise:

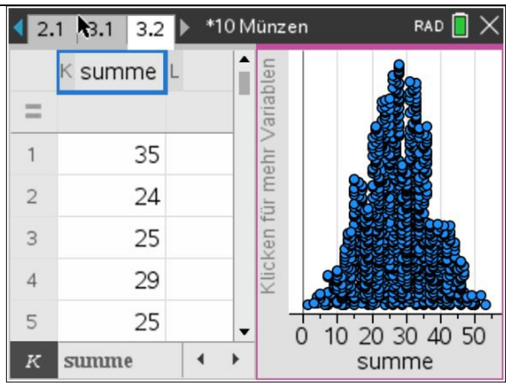
Anweisung $=when(rand()\leq 0.5,1,0)$ in Zelle A1 eingeben und mit enter bestätigen. (Gleichheitszeichen vorn nicht vergessen!).	
Anweisung mit enter bestätigen. Es erscheint eine 0 oder eine 1, je nachdem, welche Zufallszahl der Zufallsgenerator auf die Anweisung $rand()\leq 0.5$ zurückgibt.	

Die Anweisung aus A1 mit ctrl C kopieren und mit ctrl V in B1 einfügen. Anschließend die Zahl „1“ durch eine 2 ersetzen und diese Änderung mit enter bestätigen.	
Nacheinander nun mit ctrl V in C1 bis J1 die gleiche Anweisung einfügen, aber die Zahl „1“ durch 3, 4 , …, 9, 10 ersetzen und diese Änderung jeweils mit enter bestätigen.	
In die Zelle K1 die Anweisung $=sum(a1:j1)$ eintragen und mit enter bestätigen. (Gleichheitszeichen vorn nicht vergessen!).	
In die Zelle L1 die Anweisung $=when(k1\geq 45,1,0)$ eintragen und mit enter bestätigen. (Gleichheitszeichen vorn nicht vergessen!).	

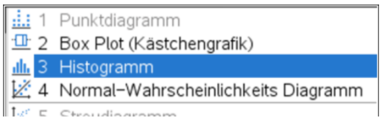
Mit [⇧shift] und Kursortaste rechts ▶ die Zellen A1 bis L1 markieren.	
[menu] *Daten – Füllen* wählen. Mit der Kursortaste ▼ nach unten den gestrichelten Rahmen bis in die Zeile 1000 verlängern. 	
In Zelle M1 die Anweisung $=\dfrac{sum(l1:l1000)}{1000.}$ eintragen und mit [enter] bestätigen. (Gleichheitszeichen vorn nicht vergessen!). Der Dezimalpunkt hinter dem Nenner 1000 bewirkt, dass die relative Häufigkeit als Dezimalzahl ausgegeben wird.	
Mit [ctrl] [R] lässt sich eine sofortige Neuberechnung der Simulationsdaten veranlassen.	
Die Spalte K wird im oberen Feld mit der Variablen *summe* bezeichnet.	

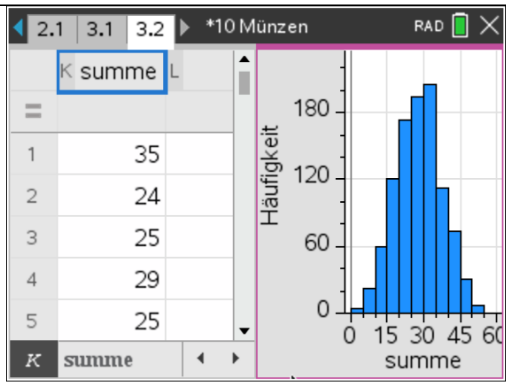
menu *Daten – Schnellgraph* wählen.



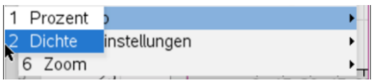


menu *Plot-Typ – Histogramm* wählen.



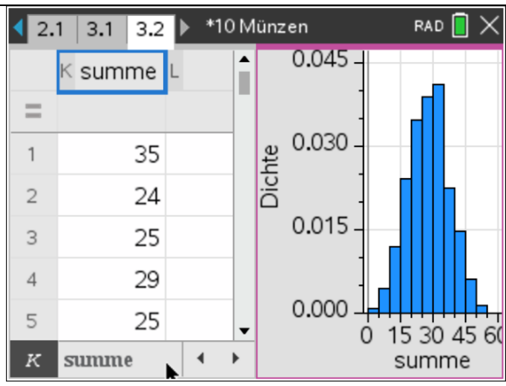


ctrl menu *Maßstab – Dichte* wählen.

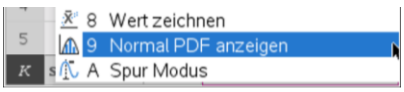


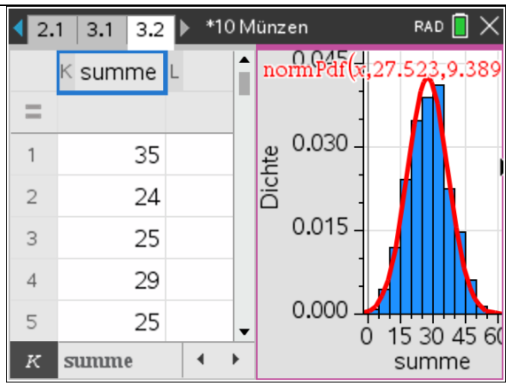
In einem Histogramm mit dem Maßstab Dichte repräsentiert der Flächeninhalt einer Rechtecksäule die zum jeweiligen Intervall (Säulenbreite) zugehörige relative Häufigkeit.

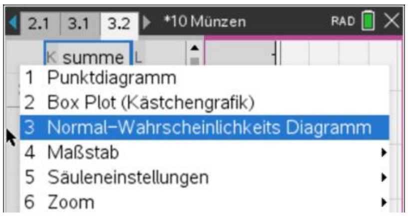
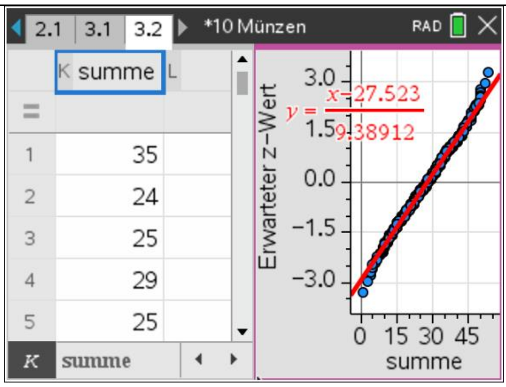
$$Dichte = \frac{relative\ Häufigkeit}{Säulenbreite}$$



menu *Analysieren – Normal-PDF anzeigen* wählen.





ctrl menu *Normal-Wahrscheinlichkeits Diagramm* wählen.  *„Je besser die Daten einer Normalverteilung unterliegen, desto näher liegen beim Normalwahrscheinlichkeitsdiagramm die Punkte bei (im Idealfall sogar auf) der eingezeichneten Geraden.“* *Beat Eicke „Mathematikrezepte“, S. 117*	

Autor:
Dr. Wilfried Zappe

Info:
Wilfried Zappe unterrichtete Mathematik an der Goetheschule Ilmenau

