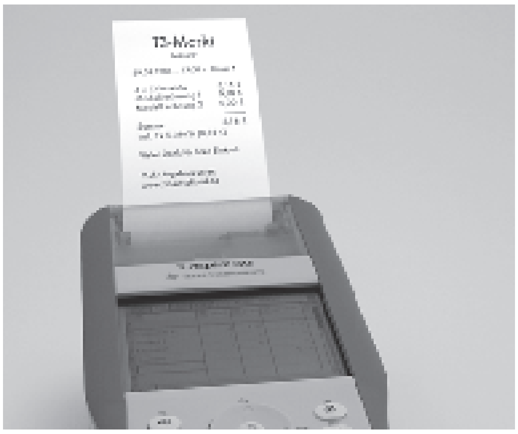
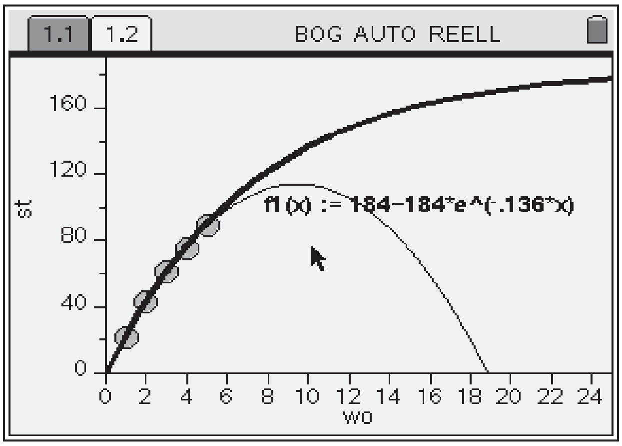
Vergleich verschiedener Modelle

Andreas Pallack, Soest



Welche Funktion beschreibt die Verkaufszahlen besser?



Steckbrief der Aufgabe

Sekundarstufe II (Analysis)
Dauer: 2-3 Unterrichtsstunden

Notwendige Voraussetzungen:
Schülerinnen und Schüler
- haben Kenntnisse der Differenzial- und Integralrechnung
- verfügen über elementare Modellierungskompetenzen

Prozessbezogene Kompetenzen, die mit dieser Einheit gefördert werden können:
Schülerinnen und Schüler
- modellieren eine Sachsituation
- vergleichen Modelle
- argumentieren mit Hilfe eines Modells

Inhaltsbezogene Kompetenzen, die diese Einheit verfolgt:
Schülerinnen und Schüler
- arbeiten mit einer Funktion beschränkten Wachstums
- vergleichen Summe und Integral

Rolle der Technologie (TI-Nspire™, TI-Nspire™ CAS)
- Visualisieren
- Berechnen

Mögliche Zugänge, die von der Technologie unterstützt werden:
- Graphisch: Nahezu sämtliche Argumente können auf der graphischen Repräsentation aufgebaut werden.
- Numerisch: Durch **Lists & Spreadsheet** ist eine Übersetzung in diskrete Daten jederzeit möglich.
- Algebraisch: Diskrete Daten werden durch Funktionsgleichungen beschrieben.

Empfehlung zur Unterrichtsorganisation:
Die Aufgabe ist angelehnt an Abituraufgaben aus dem Berufsbildenden Bereich. Entsprechend sollte die Aufgabe für Unterrichtszwecke umgearbeitet werden. Die Aufgabe kann in dieser Form zum Wiederholen und Üben eingesetzt werden.

Reduziert auf den Modellvergleich kann die Aufgabe auch genutzt werden, um Schülerinnen und Schüler für verschiedene Modellierungen ein- und derselben Sachsituation zu sensibilisieren. In diesem Fall sollte im Unterricht viel Platz für Eigenaktivität geschaffen werden. Es bietet sich dann die Arbeit in Gruppen mit anschließender Präsentation an.

Aufgabe:

Ein Supermarkt führt eine neue Zahnseide ein. In den ersten 5 Wochen ergeben sich folgende wöchentliche Verkaufszahlen:

Verkaufswoche	1	2	3	4	5
Verkaufte Stückzahl in dieser Woche	22	43	61	75	89

a) Bestimmen Sie die Gleichung einer Parabel, die diese Daten gut beschreibt. Zeichnen Sie die Parabel mit den Datenpaaren in ein Koordinatensystem ein.

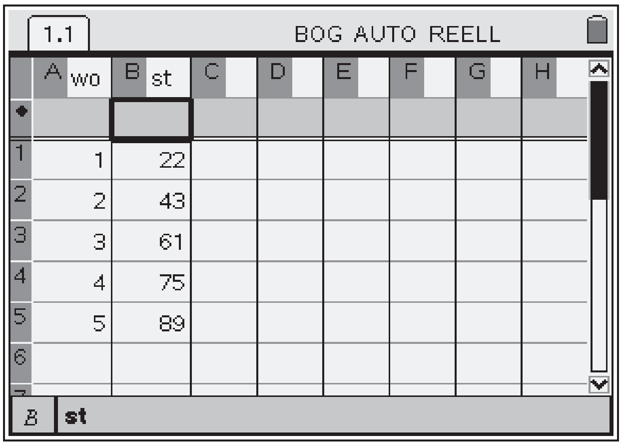
Die Funktion f mit $f(t)=184 - 184 \cdot e^{-0,136t}$ beschreibt modellhaft die Entwicklung der wöchentlichen Verkaufszahlen. Dabei ist t die Zeit in Wochen nach der Einführung, f(t) die verkaufte Stückzahl innerhalb der Woche t.

b) Zeichnen Sie das Schaubild von f in das Schaubild von Teilaufgabe a) ein. Vergleichen Sie die beiden Modelle.

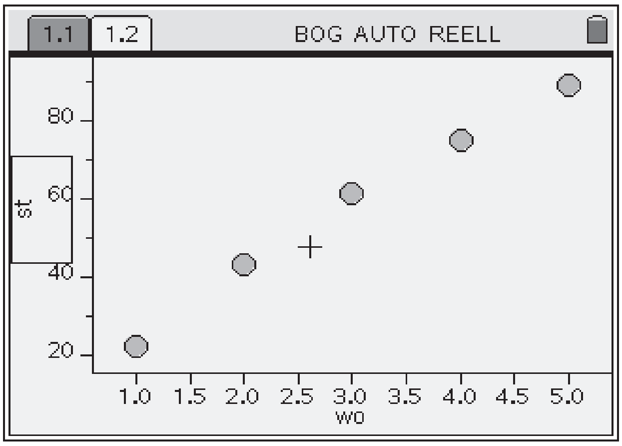
c) Mit welchen wöchentlichen Stückzahlen kann der Supermarkt langfristig rechnen? Bestimmen Sie näherungsweise, wie viele Packungen Zahnseide der Supermarkt in den ersten 52 Wochen insgesamt verkauft. Nach wie vielen Wochen sind insgesamt mehr als 15 000 Packungen verkauft?

d) Bestimmen Sie die momentane Änderungsrate in t = 1 und t = 25. Interpretieren Sie diese Ergebnisse.

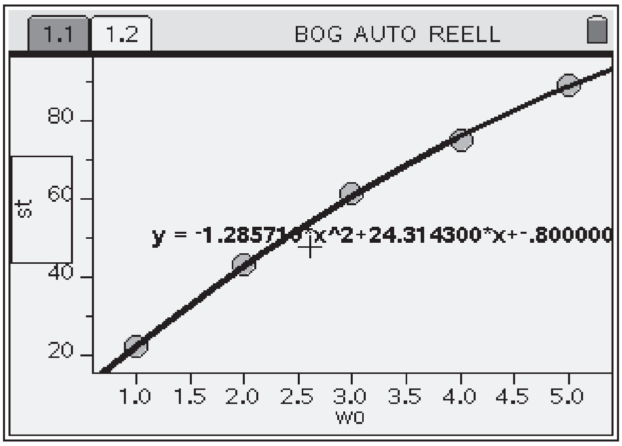
Teilaufgabe a)
Starten Sie die Applikation **Graphs & Geometry**. Geben Sie die Daten als Listen ein (Listen eingeben) und benennen Sie diese z. B. mit wo (für Woche) und st (für Stückzahl).



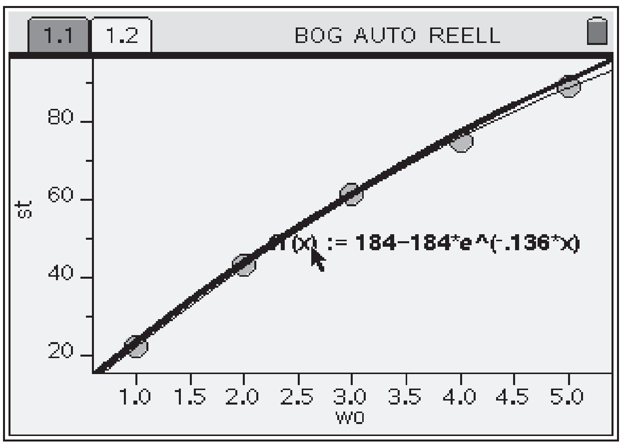
Öffnen Sie die Applikation **Data & Statistics** auf einer neuen Seite. Stellen Sie die Listen graphisch dar, indem sie die beiden Listenbezeichnungen als Diagrammvariablen wählen.



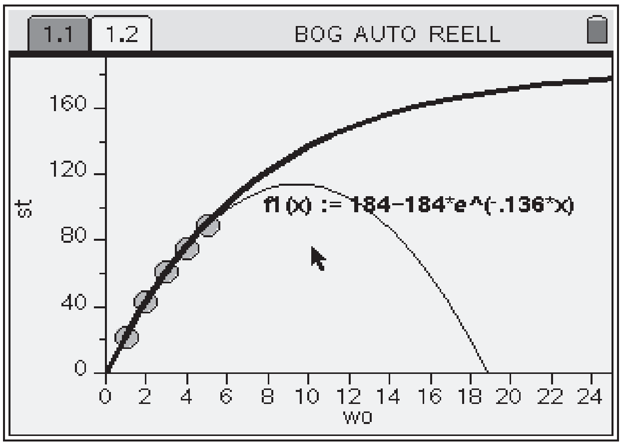
Führen Sie eine quadratische Regression durch. Der Graph der Regressionsfunktion wird dann dargestellt. Teilaufgabe a) ist damit erledigt.



Teilaufgabe b)
Zeichnen Sie die gegebene Funktion in das gleiche Koordinatensystem (Funktion zeichnen).



Passen Sie das Koordinatensystem so an, dass die Verläufe beider Graphen gut erkennbar sind.

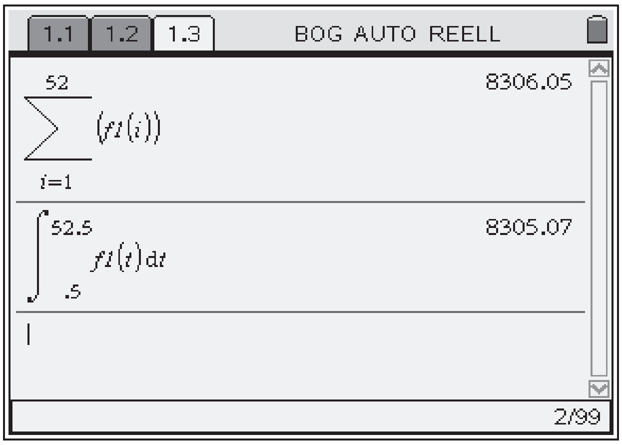


Das quadratische Modell beschreibt einen Verkaufsverlauf, der nach ungefähr 10 Wochen sein Maximum erreicht und mit der 19. Woche bei Null angekommen ist. Ab der 20. Woche werden sogar negative Verkaufszahlen erreicht: *Die Zahnseide wird also zurückgebracht?*

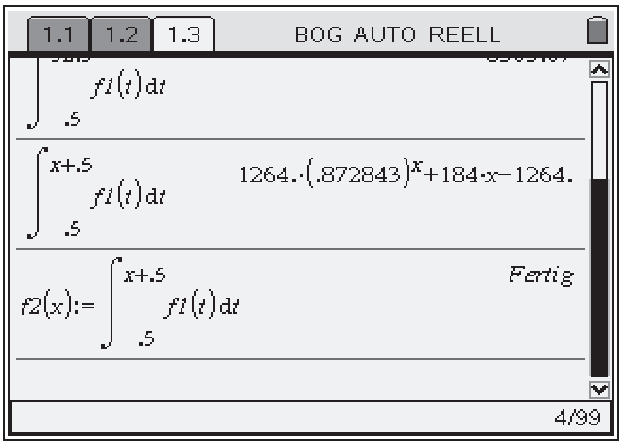
Das zweite vorgegebene Modell beschreibt Verkaufszahlen, die zu Beginn stark und dann immer schwächer ansteigen. Die Verkaufszahlen scheinen sich mittel- bis langfristig zu stabilisieren.

Mit Blick auf die Situation erscheint das zweite Modell angemessen.

Teilaufgabe c)
Entsprechend wird hier auch mit dem zweiten Modell weitergearbeitet. Wenn das Modell die Daten gut beschreibt, kann man die Verkaufszahlen nach 52 Wochen durch eine Summe berechnen ([ ] drücken und die Summe auswählen, um eine entsprechende Vorlage zu öffnen). Man erhält ungefähr 8 300 Stück. Die nächste Frage möchte ich mit einer Gleichung lösen. Deswegen wird alternativ zur Summe ein Integral berechnet. Um die diskreten Daten mit dem Intergral möglichst gut anzunähern, wurden als Grenzen 0,5 sowie 52,5 gewählt. Die Flächenanteile links und rechts vom Funktionswert in der jeweiligen Woche gleichen sich – wie die Rechnung zeigt – augenscheinlich weitgehend aus.



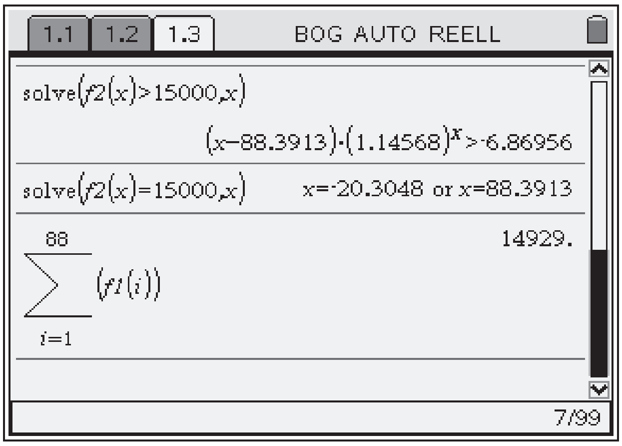
Hinweis: Diese Rechnungen sind nur mit TI-Nspire™ CAS möglich. Die Funktionen können aber auch mit Hilfe einer Tabellenkalkulation analysiert werden, was auch mit TI-Nspire™ funktioniert. Dieser Lösungsweg wird im Anschluss an die CAS-Lösung angerissen.



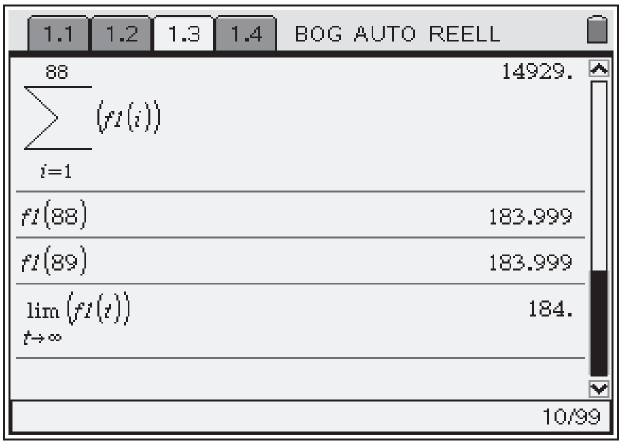
Die Verkaufszahl nach x Wochen berechnet sich gemäß der mit Hilfe des Integrals berechneten Funktion. Das Ergebnis wird unter dem Funktionsnamen f2 gespeichert (Funktion speichern).

Das CAS kann die Ungleichung nicht exakt lösen. Die zugehörige Gleichung kann aber näherungsweise gelöst werden (Gleichungen lösen).

Da das Integral nur näherungsweise die Modellwerte summiert, wird das Ergebnis nochmals mit einer Summe überprüft. Nach 88 Wochen ist die Verkaufszahl noch nicht erreicht. Die Antwort ist also, dass die gesuchte Verkaufszahl gemäß (des Modells) nach 89 Wochen erreicht wird.

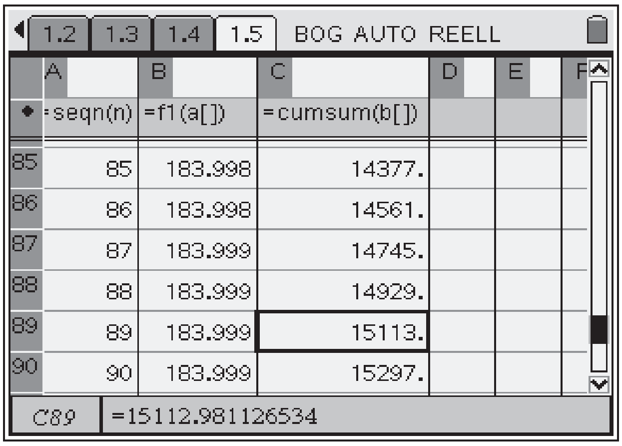


Noch offen ist die Frage, wie sich die Verkaufszahlen langfristig entwickeln. Einsetzen der Zahlen 88 und 89 illustriert, dass sich die Verkaufszahlen zu diesem Zeitpunkt bereits stabilisiert haben. Die Berechnung des Grenzwerts ([lim(f1(t),t,∞)], das ∞ erhält man unter [ctrl, π]) bestätigt, dass die Verkaufszahlen sich langfristig bei 184 Stück stabilisieren und dass 184 eine obere Grenze ist.

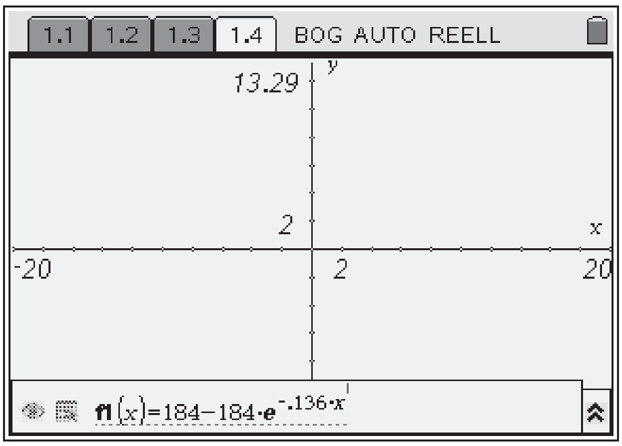


Mit TI-Nspire[TM] (ohne CAS) kann die Aufgabe z. B. mit Hilfe von **Lists & Spreadsheets** gelöst werden. Geben Sie die Spaltenformeln wie nebenstehend ein. Der entsprechende Wert (>15 000) muss dann noch in Spalte C gesucht werden. Natürlich kommt man zum gleichen Ergebnis: Nach 89 Wochen wurden mehr als 15 000 Stück verkauft.

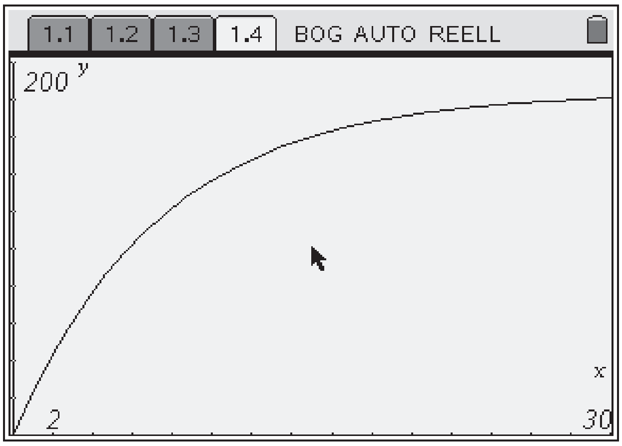
Auch das langfristige Verhalten lässt sich mit Hilfe der Tabelle analysieren. Man erhält ebenfalls 184 als Grenzwert.



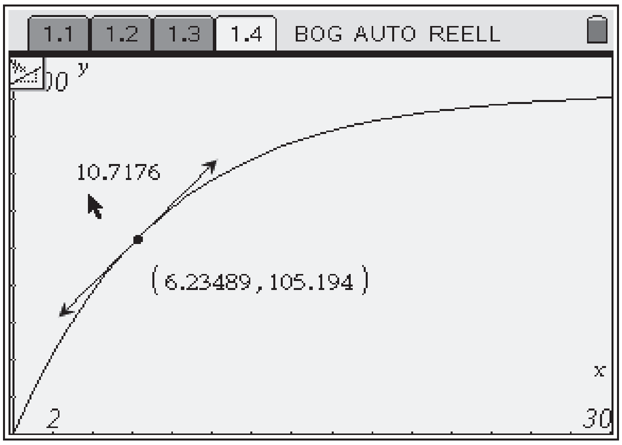
Teilaufgabe d)
Die Änderungsraten werden in **Graphs & Geometry** bestimmt. Natürlich könnten dafür auch die Ableitungen berechnet werden. Öffnen Sie eine neue Seite mit der Applikation **Graphs & Geometry**. In der Eingabezeile wählen Sie die Funktion f1 aus. Diese wird aus den vorherigen Seiten übernommen, da innerhalb eines Problems auf sämtliche Variablen zugegriffen werden kann. Nach Drücken von [enter] wird der Graph gezeichnet.



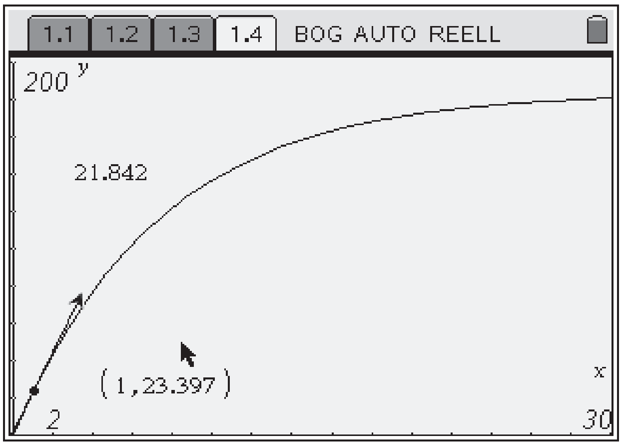
Stellen Sie die Koordinatenachsen so ein, dass die Funktionswerte an den Stellen 1 und 25 abgelesen werden können.



Konstruieren Sie eine Tangente an den Graphen und bestimmen Sie so die Ableitung (Funktion ableiten: graphisch). Bestimmen Sie zusätzlich die Koordinaten des Punktes, an dem die Tangente angelegt wird (Koordinaten bestimmen).

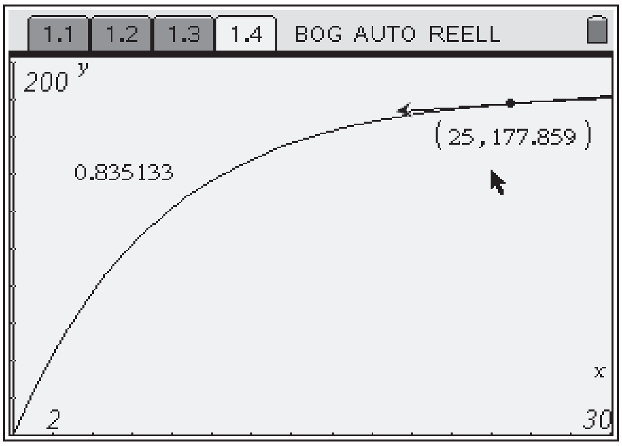


Drücken Sie [esc], um die bisherigen Aktionen zu beenden. Mit einem Doppelklick [,] auf die x-Koordinate kann der x-Wert durch Eingabe über die Tastatur gewählt werden. Geben Sie zuerst die 1 ein. Man erhält eine Steigung (momentane Änderungsrate) von ungefähr 21,84. Alternativ kann der Punkt auch auf die Stellen gezogen werden. Dabei trifft der Punkt aber in der Regel die gewünschten Koordinaten nicht genau.



Den zweiten Wert erhält man durch Eingabe von 25. Die momentane Änderungsrate beträgt hier ungefähr 0,84.

Das bedeutet, dass sich zu Beginn (in der ersten Woche) die Verkaufszahlen massiv verändern. Sie steigen von der ersten zur zweiten Woche um mehr als 20 Stück. Nach 25 Wochen sind nur noch leichte Anstiege (ungefähr eine Packung mehr pro Woche) zu verzeichnen.



Die Aufgabe zum Verkauf von Zahnseide steht exemplarisch für eine ganze Klasse von Aufgaben: An die Realität angelehnte, eingekleidete Aufgaben.

Der mangelnde Realitätsbezug zeigt sich unter anderem durch:
- die Bildung eines Modells auf der Basis nur weniger Zahlen,
- die Verwendung kleiner Verkaufszahlen, die im Normalfall großen Schwankungen unterliegen sowie
- dem Ausblenden von Verkaufsschwankungen in Gänze bei der Arbeit mit dem Modell.

Eine solche Analyse würde man wohl unter marktwirtschaftlichen Gesichtspunkten nicht durchführen. Trotzdem ermöglicht diese Aufgabe die Plausibilität von Modellen zu untersuchen, und zwar in einem für Schülerinnen und Schülern überschaubaren und gut kontrollierbaren Fall.

Die Aufgabe ist deswegen durchaus geeignet, um zu überprüfen, ob Schülerinnen und Schüler mit vorgegebenen Modellen arbeiten und diese im gegebenen Sachkontext interpretieren können. Um die Aufgabe auch im Unterricht gewinnbringend bearbeiten zu können, sollten nur Teilaufgaben behandelt und diese zusätzlich geöffnet werden, um die Pluralität von Lösungswegen zu begünstigen.

Aufbauend auf Diskussionen zu solchen Aufgaben sollten im Unterricht auch echte Prognosen (wie z. B. die Entwicklung des Ölpreises) behandelt werden, um zu zeigen, dass die Bildung eines Modells in starkem Maße durch seine Annahmen geprägt ist. Dazu ein Beispiel:

Zur Drucklegung dieses Heftes überstieg der Ölpreis pro Barrel erstmals die 100 $ Grenze. Noch vor einigen Monaten wurde mit fallenden Ölpreisen gerechnet, weswegen viele Privathaushalte mit dem Kauf von Heizöl für den Wintermonate warteten. Nun müssen sie sich mit dem teuren Öl (um die 75 Cent pro Liter) eindecken. In den Medien findet man nun Schlagzeilen wie „Öl bald bei 200 $“. Ähnlich häufig (nur nicht unter so großen Schlagzeilen) findet man aber auch gegensätzliche Deutungen. Hier wird mit einer baldigen Rezession, also einem Abschwung in der Wirtschaft, gerechnet, was zu fallenden Ölpreisen führen würde. Darüber hinaus spielt z. B. die Stärke des € eine nicht zu vernachlässigende Rolle bei der Entwicklung des Ölpreises in Deutschland. Was sollten man also Verbrauchern raten: Jetzt möglichst viel kaufen oder nur wenig kaufen und auf fallende Preise hoffen?

Solche komplexen Sachsituation könne zwar im Mathematikunterricht nicht umfassend behandelt werden, jedoch finden Schülerinnen und Schüler bei der (wenn auch nur oberflächlichen) Diskussion solcher realen Entwicklungen Prinzipien und Methoden wieder, die sie im kleinen Rahmen kennen gelernt haben. Entsprechend werden die Lernenden eine andere, kritischere Perspektive auf Modelle entwickeln, die ihnen z. B. in den Medien als wahr vorgestellt werden.