Einführung in die Integralrechnung – ein möglicher Unterrichtsgang zum Hauptsatz

K.-H. Braun

Nachbar Mayer hat die ständigen Preiserhöhungen für das Leitungswasser satt. So bohrt er sich im späten Frühjahr in seinem Garten einen Brunnen und pumpt aus ihm täglich die maximal mögliche Wassermenge ab. Voller Verwunderung muss er erfahren, dass die „Schüttung" seines Brunnens keineswegs konstant ist und der trockene Sommer zu einer schnellen Abnahme beiträgt. Trotz der spät einsetzenden Niederschläge versiegt seine teure Anschaffung nach 100 Tagen, um kurzzeitig später erneut zu sprudeln. Der gute Vorsatz, die tägliche Schüttung zu notieren, verblasst sehr schnell im Alltag. So entstehen nur sporadischen Notierungen des Wasservolumens pro Tag in Form der folgenden Tabelle:

Tag	0	10	27	32	40
Liter/Tag	3000	2916	2462	2275	1944

Tag	51	68	90	100	120
Liter/Tag	1455	725	84	0	408

(1)
Erfassen Sie die Daten in den Listen `LX` und `LY` und visualisieren Sie diese in einem Datenplot.

(2)
Versuchen Sie das gesamte dem Brunnen entnommene Wasservolumen V näherungsweise bis zum Versiegen am 100. Tag zu bestimmen! Übertragen Sie hierzu zunächst die täglichen Änderungsraten in ein geeignetes Diagramm.
Können Sie nun mit zwei Zahlen V_U und V_O eine Abschätzung des Volumens $V_U < V < V_O$ vornehmen?

(3)
Für eine genauere Erfassung des gesamten Wasservolumens *V* werden weitere Daten benötigt! Versuchen Sie daher eine stetige Ausgleichskurve für die diskreten Tabellenwerte zu finden!
Welche mathematischen Modelle bieten sich an? Testen Sie verschiedene Möglichkeiten mit dem GTR und vergleichen Sie das Ergebnis mit dem Datenplot der Tabelle.

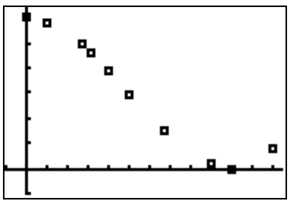


Abb. 1

Lösungshinweis: Mögliche Modellbildungen lassen sich durch Ausgleichsfunktionen mit dem TI-84 Plus erledigen ([STAT][▶] CALC**)** (Kursiv gedruckte Angaben sind optional und können u.U. auch entfallen)

- `CubicReg(Xliste, Yliste, `*`Häufigkeitsliste`*`, `*`RegGleichung`***)**
- `SinReg(`*`Iterationsanzahl`*`, Xliste, Yliste, `*`Periode`*`, `*`RegGleichung`*`)`
- `QuartReg(Xliste, Yliste, `*`Häufigkeitsliste`*`, `*`RegGleichung`***)**

Hinweis: Es gibt Situationen, in denen der GTR nur mit Angabe der Periode eine angepasste Sinus-Ausgleichsfunktion errechnen kann.

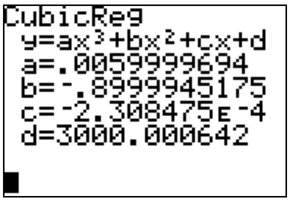


Abb. 2

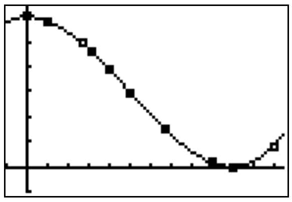


Abb.3

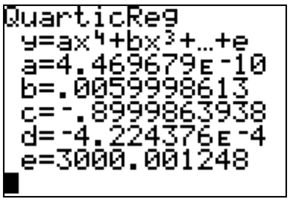


Abb. 4

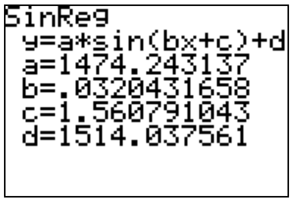


Abb. 5

Alle Modelle scheinen, grob qualitativ an der Graphik gemessen, gleich gut geeignet zu sein. Bei genauerer Untersuchung z.B. im `TABLE` - Menü erweisen sich die Polynomfunktionen exakter. Favorisiert werden soll hier die einfachere kubische Regression.

(4)
In Anlehnung an die Berechnung des Wasservolumens in (2) soll nun die Fläche unter der Randfunktion im Intervall [0;100] durch Rechteckstreifen genauer angenähert werden. Wir beschränken uns zunächst bewusst auf den <u>streng monoton fallenden Bereich</u> der Randfunktion für $x \in [0;100]$. Es sollen *n* Streifen gleicher Breite im Sinne der <u>Untersumme</u> V_U verwendet werden. Veranschaulichen Sie den Vorgang in der Graphik aus (2) zunächst für $n=10$.

Lösungshinweis: Bei einer Zerlegung des Intervalls $[0;b] = [0;100]$ in n Teilintervall ergibt sich die Breite $\Delta x = b/n$. Die Folge der Teilflächen für die Untersumme ist gegeben durch:

$$\left\langle f(\Delta x)\cdot\Delta x;\ f(2\cdot\Delta x)\cdot\Delta x;\ .....\ ;f(10\cdot\Delta x)\cdot\Delta x)\right\rangle$$

$$=\left\langle f(k\cdot\Delta x)\cdot\Delta x\right\rangle \ \ \text{für}\ \ k=1,...,n$$

Eine Folge definiert sich im GTR mittels `seq(` aus dem `[LIST]-OPS` – Menü ([2nd][STAT][▶]). Der Befehl
`seq(Ausdruck, Laufvariable, Beginn, Ende,` *`Schrittweite`*`)`
erzeugt eine Liste, die in einer beliebigen Liste abgespeichert werden kann. Erzeugen Sie, nach der Festlegung der Grenze `100→B` und der Anzahl der Intervalle `10→N` mittels [STO▶] Taste, im HBS die Anweisung

```
seq(Y1(B/N·K)·(B/N),K,1,N,1) → L1
```

und betrachte die Folge der unteren Teilflächen in der Liste L1:

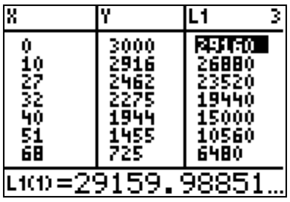


Abb. 6

Bei der vorliegenden monoton fallenden Randfunktion *f* werden auch die Flächeninhalte der Rechteckstreifen stets kleiner.

Die Summe der Folgenglieder (die Summe der unteren Rechteckinhalte) liefert nun eine Näherung für die Gesamtfläche (also der Gesamtwassermenge) unter der Randfunktion f. Für <u>monoton fallende</u> Randfunktionen gilt:

$$USUM(n) = \sum_{k=1}^{n} f(k \cdot \Delta x) \cdot \Delta x$$
$$= \sum_{k=1}^{n} f\left(k \cdot \frac{b}{n}\right) \cdot \frac{b}{n}$$

Diese Summierung lässt sich mit dem TI-84 Plus mittels `sum(Liste, Start, Ende)` aus dem `[LIST]-MATH` – Menü (2nd STAT ▸ ▸) ausführen (kursive Argumente optional). Um die Übersicht zu behalten, definieren wir eine Liste `LN` für die Anzahl *n* der Rechteckstreifen und eine Liste **L**`USUM` für die Untersumme und berechnen:

`sum(seq(Y1(B/N·K)·(B/N),K,1,N,1)→LUSUM(1)`

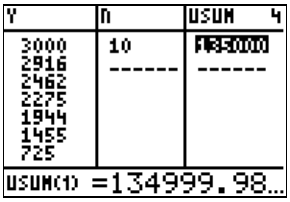


Abb. 7

In der Hoffnung, dass eine feinere Unterteilung in äquidistante Rechteckstreifen auch eine genauere Annäherung an den Flächeninhalt liefert, erweitern wir die Liste **L**`N={10,20,30,40,60,80,100,150,200,250}`. Wird nun die Streifenanzahl 20 in die Variable `N` geladen, `20→N`, und anschließend im HBS

`sum(seq(Y1(B/N·K)·(B/N),K,1,N,1)→LUSUM(2)`

aufgerufen, so entsteht in USUM(2) eine genauere Näherung für die Wassermenge. Die Eingabe wird durch Mehrfachbetätigung von [ENTRY] (2nd ENTER) und anschließendem Ändern von **L**`USUM(1)` in **L**`USUM(2)` vereinfacht.

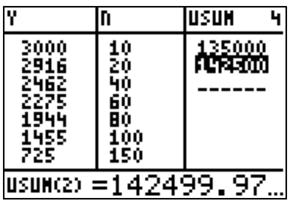


Abb. 8

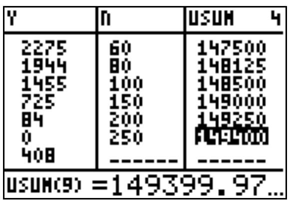


Abb. 9

Entsprechend wird die Liste **L**`N` nun abgearbeitet und wir beobachten dabei die Entwicklung der Untersummen. Was stellen Sie fest?

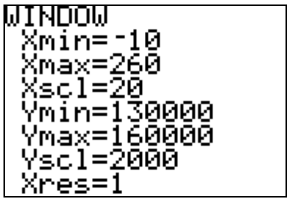


Abb. 10

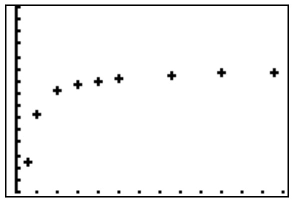


Abb. 11

Letztlich kann die Entwicklung der Untersummen auch grafisch kontrolliert werden. Es muss dazu lediglich ein Datenplot mit den Listen `LN` und `LUSUM` in einem geeigneten Fenster aktiviert werden.

Die beste Näherung für die Wassermenge im Zeitintervall [0;100] ist damit V_U = USUM(9) = 149399,97 Liter.

(5)
Dieselbe Prozedur soll nun mit den **Obersummen** im Sinne von V_O wiederum nur für $x \in [0;100]$ und äquidistante Rechteckstreifen durchgeführt werden. Begründen Sie dazu, dass die Folge der Teilflächen für die Obersumme gegeben ist durch:

$$\left\langle f(0 \cdot \Delta x) \cdot \Delta x;\ f(1 \cdot \Delta x) \cdot \Delta x;\ \ldots ;f((n-1) \cdot \Delta x) \cdot \Delta x) \right\rangle$$
$$= \left\langle f((k-1) \cdot \Delta x) \cdot \Delta x \right\rangle \text{ für } k = 1, \ldots, n$$

und skizzieren Sie die Rechtecke der Obersumme in der Graphik nach (2) für *n*=10. Erläutern Sie damit die Obersumme *OSUM* für <u>monoton fallende</u> Randfunktionen f:

$$OSUM(n) = \sum_{k=1}^{n} f((k-1) \cdot \Delta x) \cdot \Delta x$$
$$= \sum_{k=1}^{n} f\left((k-1) \cdot \frac{b}{n}\right) \cdot \frac{b}{n}$$

Lösungshinweis: Definieren Sie die Liste **L**`OSUM` und arbeiten Sie erneut die Liste **L**`N` ab. Beobachten Sie dabei die Folge der Obersummen in der Liste **L**`OSUM`:

`sum(seq(Y1(B/N·(K-1))·(B/N),K,1,N,1)→LOSUM(1)`

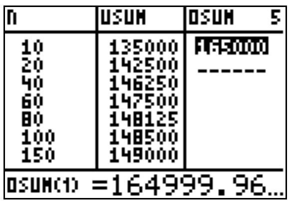


Abb. 12

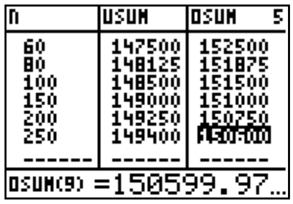


Abb. 13

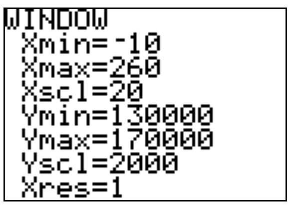


Abb. 14

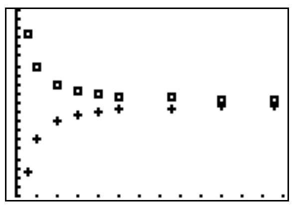


Abb. 15

Der zusätzliche Datenplot mit den Listen `LN` und `LOSUM` visualisiert die Entwicklung der Unter- und der Obersumme.

Aus den bisherigen Erfahrungen kann vermutet werden, dass die Folge der Untersummen *USUM*(*n*) streng monoton steigt und die Folge der Obersummen *OSUM*(*n*) streng monoton fällt, wobei *USUM* die Wassermenge stets zu klein und

OSUM stets zu groß bemisst. Die exakte Wassermenge V wird daher eingeschachtelt! Somit gilt als bisher beste Annäherung an die wahre Wassermenge die Abschätzung:

V_U = *USUM*(9) = 149399,97 Liter < V < 150599,97 Liter = *OSUM*(9) = V_O.

(6)
Wie kann der Flächeninhalt schneller angenähert werden?

Nähern Sie die Fläche unter der Randfunktion f für $x \in [0;100]$ mittels trapezförmiger Streifen an. Überprüfen Sie hierzu die gegebene Formel und transportieren Sie die Summe der Trapezflächen in die Liste LTSUM. Stellen Sie die Entwicklung von *TSUM* in einem geeigneten Koordinatensystem grafisch per Handzeichnung für n=10 dar.

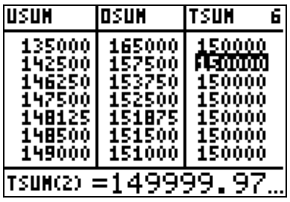
$$TSUM(n) = \sum_{k=1}^{n} \tfrac{1}{2}\big(f((k-1)\cdot\Delta x) + f(k\cdot\Delta x)\big)\cdot\Delta x$$

Lösungshinweis: Wie oben erzeugen wir, nach der Festlegung der Anzahl der Teilintervalle 1Ø→N, zunächst im HBS die Anweisung

```
sum(seq(1/2·(Y1(B/N·K)+Y1((K-1)·B/N)·B/N),
                    K,1,N,1)→LTSUM(1)
```

usw.!

Die Folge von TSUM erweist sich hier nahezu als konstant. Bereits für *n*=10 scheinen alle Stellen bis 10^{-2} festzustehen. Ab *n*=40 sind die Änderungen kleiner als 10^{-4}.



USUM	OSUM	TSUM 6
135000	165000	150000
142500	157500	150000
146250	153750	150000
147500	152500	150000
148125	151875	150000
148500	151500	150000
149000	151000	150000

TSUM(2) =149999.97…

Abb. 16

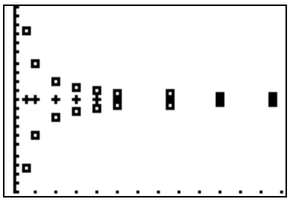


Abb. 17

In Abbildung 17 ist *TSUM* als Datenplot mit den Listen LN und LTSUM gemeinsam mit *OSUM* und *USUM* grafisch dargestellt.

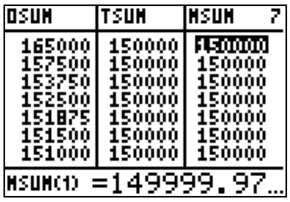
TSUM scheint damit für die Summenberechnung bei der vorliegende Randfunktion f eine ausgleichende Eigenschaft zu haben und daher für numerische Berechnungen gut geeignet zu sein: Wählen Sie einmal die Intervallanzahl n=5 oder n=2 oder gar n=1!

Begründen Sie die schnelle Annäherung an den tatsächlichen Flächeninhalt. In welchen Intervallen der Randfunktion f liefert *TSUM* einen zu großen Flächeninhalt? In welchen Intervallen einen zu kleinen?

Wir halten fest: Das Wasservolumen beträgt etwa 149999,97 Liter.

(7)
Auf der Suche nach einer weiteren schnellen Berechnungsmethode fällt folgende Formel vom mathematischen Himmel:

$$MSUM(n) = \sum_{k=1}^{n} f((k-\tfrac{1}{2})\cdot\Delta x)\cdot\Delta x$$



OSUM	TSUM	MSUM 7
165000	150000	150000
157500	150000	150000
153750	150000	150000
152500	150000	150000
151875	150000	150000
151500	150000	150000
151000	150000	150000

MSUM(1) =149999.97…

Abb. 18

Die Formel ist so einfach wie die für *OSUM*, liefert aber wesentlich schneller genauere Ergebnisse! Welche Flächen werden nach dieser Formel summiert? Zeichnen Sie diese in die Graphik zu (6) für *n*=10 und $x \in [0;100]$ ein.

Begründen Sie anschaulich, warum diese Mittel-Summe auch bereits bei großer Intervallbreite (also kleinem n) recht genaue Ergebnisse liefert. Überprüfen Sie die dargestellte Liste.

(8)
Es wird behauptet, dass die Formeln für *TSUM* und *MSUM* unabhängig vom Monotonieverhalten der Randfunktion f sind, die Ober- und Untersummenformeln *OSUM* bzw. *USUM* bei konsequenter Anwendung jedoch angepasst werden müssen.

Begründen Sie diese Behauptung und passen Sie die Formeln für *OSUM*, *USUM* für $x \in [0;120]$ an. Berechnen Sie jeweils die Wassermenge für das Zeitintervall $x \in [0;120]$ mittels *OSUM*, *USUM*, *TSUM*, *MSUM* für 200 Streifen im Intervall [0;100] und weitere 40 gleicher Breite im Intervall [100;120].

Lösungshinweis: Für *b*=100 und *n*=200 gilt dann:

$$\begin{aligned} USUM &= \sum_{k=1}^{n} f\left(k\cdot\frac{b}{n}\right)\cdot\frac{b}{n} + \sum_{k=1}^{n/5} f\left(100+(k-1)\cdot\frac{b}{n}\right)\cdot\frac{b}{n} \\ &= 151788{,}889\ FE \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} OSUM &= \sum_{k=1}^{n} f\left((k-1)\cdot\frac{b}{n}\right)\cdot\frac{b}{n} + \sum_{k=1}^{n/5} f\left(100+k\cdot\frac{b}{n}\right)\cdot\frac{b}{n} \\ &= 153492{,}887\ FE \end{aligned}$$

Und für *b*=120 und *n*=240 gilt:

$$\begin{aligned} TSUM(240) &= \sum_{k=1}^{n} \tfrac{1}{2}\left(f((k-1)\cdot\frac{b}{n}) + f(k\cdot\frac{b}{n})\right)\cdot\frac{b}{n} \\ &= 152640{,}888\ FE \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} MSUM(240) &= \sum_{k=1}^{n} \left(Y1((K-\tfrac{1}{2})\cdot\frac{B}{N}\right)\cdot\frac{B}{N}\ , \\ &= 152639{,}538\ FE \end{aligned}$$

Damit sollte klar sein, dass sich *TSUM* bzw. *MSUM* einfacher handhaben lassen. Bei weiterer Verfeinerung der Rechteckstreifen sind die technischen Grenzen des GTR zu beachten: Der TI-83 Plus verarbeitet maximal 499 Werte in einer Liste und maximal 999 Schritte in einer Folge.

(9) Die schnelle Methode!

Abbildung 1 und 2 zeigen noch einmal die Randfunktion entwickelt aus den Daten des Herrn Mayer.

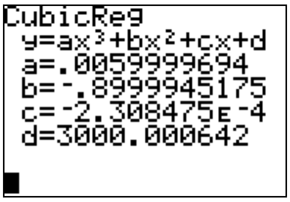


Abb. 1

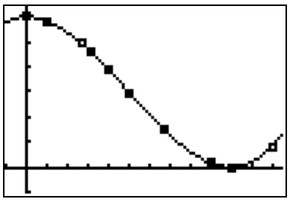


Abb. 2

Der GTR besitzt eine besondere Funktionalität zur numerischen Berechnung des gesuchten Flächeninhalts (bzw. der gesuchten Wassermenge). Hierzu verwendet man aus dem Graphikbildschirm oder aus dem Home-Bildschirm (HBS) heraus die Tastenfolge [2nd][TRACE][CALC][7] für den Befehl `∫f(x)dx`. Die untere Grenze $x=0$ und die obere Grenze $x=120$ können direkt über die Zifferntasten eingegegben werden (Abb. 3).

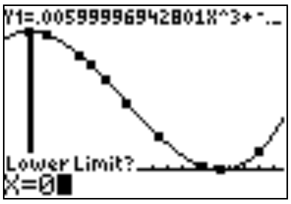


Abb. 3

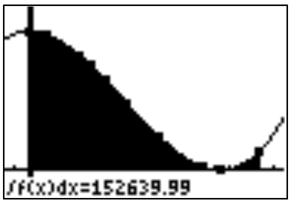


Abb. 4

Eine andere Möglichkeit aus dem HBS ohne Veranschaulichung durch die Graphik bietet die Funktionalität ([MATH][9])

`fnInt(Ausdruck, Variable, untere Grenze, obere Grenze, Toleranz).`

Ohne Angabe der optionalen Toleranz gilt für diese die Voreinstellung 10^{-5}.

Die numerische Integration liefert mit der Anweisung `fnInt(Y1,X,0,120)` dann den Wert 152639,988 und es darf spekuliert werden, wie der GTR diese Berechnung nach der Gauss-Kronrod-Methode durchführt.

Aufgabe: Vergleiche mit den Summen-Näherungswerten TSUM(240)=152640,888 (Trapezflächen) oder mit MSUM(240)=152639,538 („Mittel-Summe").

(10) Eine neue Funktion!

Die Fragestellung richtete sich bisher nach der gesamten Wassermenge, die aus dem Brunnen innerhalb von 120 Tagen geschöpft werden kann. Die obere Grenze 120 war damit festgesetzt. Wird die obere Grenze (z.B. mit dem Namen *t*) variabel gelassen ($t \in [0;120]$), so liegt die Frage nach einer Funktion $I(t)$, die die Wassermenge für jede obere Grenze t berechenbar macht, in greifbarer Nähe.

Hierzu verwenden wir die Funktion *f* in `Y1` aus Abbildung 1 bzw. 2 und legen eine Liste `LT` für die obere Grenze an:

`{10,30,50,70,90,100,110,120} → LT.`

Wir berechnen die Fläche unter der Randfunktion *f* jeweils in den Grenzen 0 bis *t* (und damit das Wasservolumen) mit dem GTR entweder mit `∫f(x)dx` ([2nd][TRACE][CALC][7]) oder mit `fnInt(...)` und speichern die Ergebnisse in der Liste `LIFUNK` ab. Wegen der großen Werte soll das Wasservolumen jeweils in Hektoliter gespeichert werden.

Also ist z.B. im HBS folgender Befehl auszuführen:

`fnInt(Y1,X,0,120)→LIFUNK(8)`

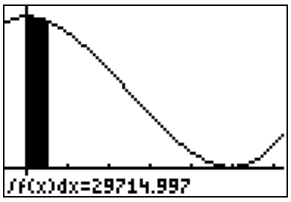


Abb. 5 (t=10 Tage)

Abb. 6 (t=20 Tage)

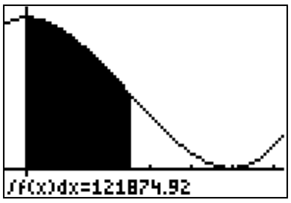
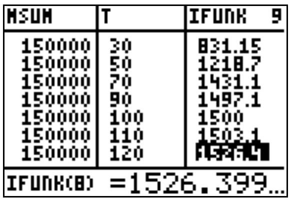


Abb. 7 (t=50 Tage)

Abb. 8 (t=120 Tage)



MSUM	T	IFUNK 9
150000	30	831.15
150000	50	1218.7
150000	70	1431.1
150000	90	1497.1
150000	100	1500
150000	110	1503.1
150000	120	[illegible]

IFUNK(8) =1526.399...

Abb. 9

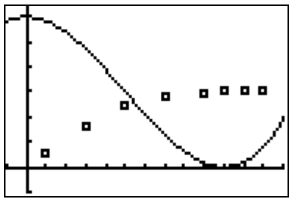


Abb. 10

Aufgabe: Abbildung 10 zeigt einen Datenplot der Listen `LT` und `LIFUNK` und damit einzelne Funktionswerte der gesuchten Bestandsfunktion, die mit geeigneten Regressionsmodellen untersucht werden können. Experimentieren Sie!

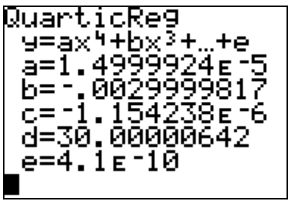


Abb. 11

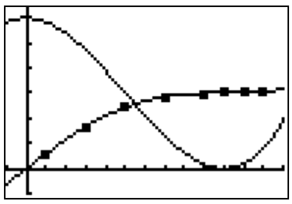


Abb. 12

Die quantitativ gute Annäherung an die Werte von `IFUNK` liefert das Modell nach Abbildung 11 bzw. 12 mit dem (Befehl `QuartReg LT,LIFUNK,Y2`).

Diese Flächeninhalts-Funktion $F(t)$ stellt das Wasservolumen V in Hektolitern zu Zeitpunkten $t \in [0;120]$ zur Verfügung.

Die Funktion *I* heißt Intergralfunktion zur unteren Grenze 0 von der Randfunktion *f*. Die Randfunktion gibt die Änderungsraten der Wassermenge in Liter/Tag an, während die zugehörige Integralfunktion den gesamten Wasserbestand in Hektolitern beschreibt, der bis zum Zeitpunkt t gefördert werden konnte.

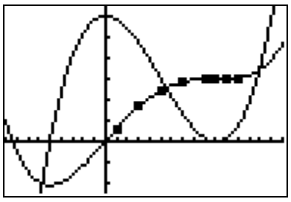


Abb. 13

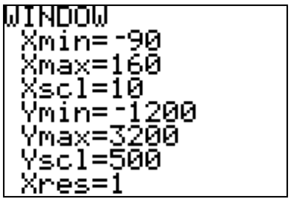


Abb. 14

(11)
Vergleichen wir beide Graphen, so sind bestimmte Zusammenhänge zwischen der Randfunktion und ihrer Intergralfunktion über die Differenzialrechnung unverkennbar. Dies gilt insbesondere dann, wenn das Fenster erweitert wird:

Aufgabe: Erläutern Sie die vermuteten Entdeckungen!

Zum Unterstreichen eignen sich folgende GTR-Aktivitäten: Definieren Sie die Funktion

`100·nDerive(Y2,X,X) → Y3,`

zeichnen Sie den Graphen verdickt und durchdenken Sie das Ergebnis! Definieren Sie die Funktion

`1/100·fnInt(Y1,X,0,X) → Y4,`

zeichnen Sie auch diesen Graphen verdickt und beschreiben Sie das Ergebnis!

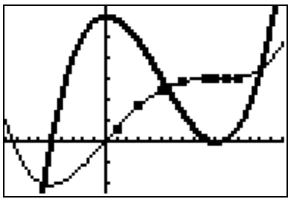


Abb. 15

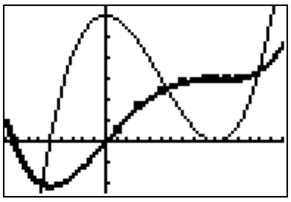


Abb 16

In üblicher Schreibweise wird die Integralfunktion I zur Randfunktion f hier in der Form

$$I_0(t) = \int_0^t f(x)\,dx$$

notiert.

(12)
Wie verändert sich die Integralfunktion, wenn die Volumenmessung erst bei *t*=30 Tagen beginnt? Die untere Grenze ist also 30 und daher wird die Liste LT verändert,

`{30,50,70,90,100,110,120}→LT`

und die Liste `LIFUNK` angepasst. Es wird die neue Liste `JFUNK` definiert und mittels

```
fnInt(Y1,X,30,30)/100 → LJFUNK(1)
fnInt(Y1,X,30,50)/100 → LJFUNK(2)
```

usw. aufgefüllt.

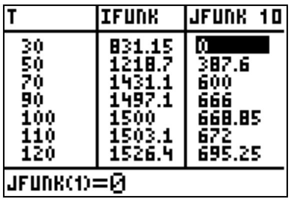


Abb. 17

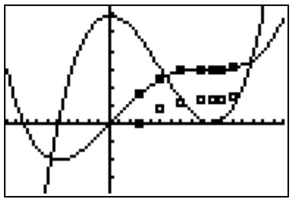


Abb. 18

Ein Datenplot macht eine Verschiebung in y-Richtung deutlich! Dies erscheint auch nicht verwunderlich – fehlt doch die Wassermenge der ersten 30 Tage.

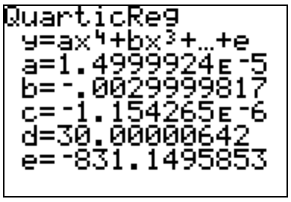


Abb. 19

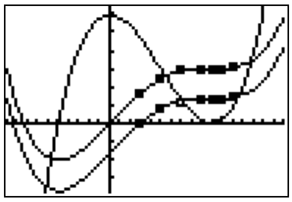


Abb. 20

Der Befehl `QuartReg LT,LJFUNK,Y5` liefert ein Ergebnis, das sich nur durch die Konstante mit dem Wert `Y2(30)=831,15` von der vorherigen Integralfunktion `Y2` (zur unteren Grenze null) unterscheidet.

Zusammenfassend darf vermutet werden:

(1) Die Ableitungen der „Wassermengenfunktionen" = „Integralfunktionen zu einer unteren Grenze" (also ihre lokale Änderungsrate) ist gleich <u>*der*</u> Randfunktion.

$$\frac{d}{dt}\left(I_u(t)\right) = I'(t) = f(t).$$

(2) Integralfunktionen zu verschiedenen unteren Grenzen unterscheiden sich nur durch eine Konstante, im Beispiel:

$$I_{30}(t) = I_0(t) - I_0(30).$$

Sicher wird sich der Unterricht auch in Richtung Stammfunktion bewegen. Steht der Begriff (später) zur Verfügung, so kann wie üblich formal notiert werden:

Die Integralfunktion $I_{30}(t)$ der Randfunktion $f(x)$ zur unteren Grenze 30 ist

$$I_{30}(t) = \int_{30}^t f(x)\,dx = F(t) - F(30),$$

wobei $F(x)$ eine Funktion aus der Schar der Stammfunktionen von $f(x)$ ist.

Autor

Karl-Heinrich Braun, Stadthagen (D)
BBS Stadthagen
ckh-braun@t-online.de