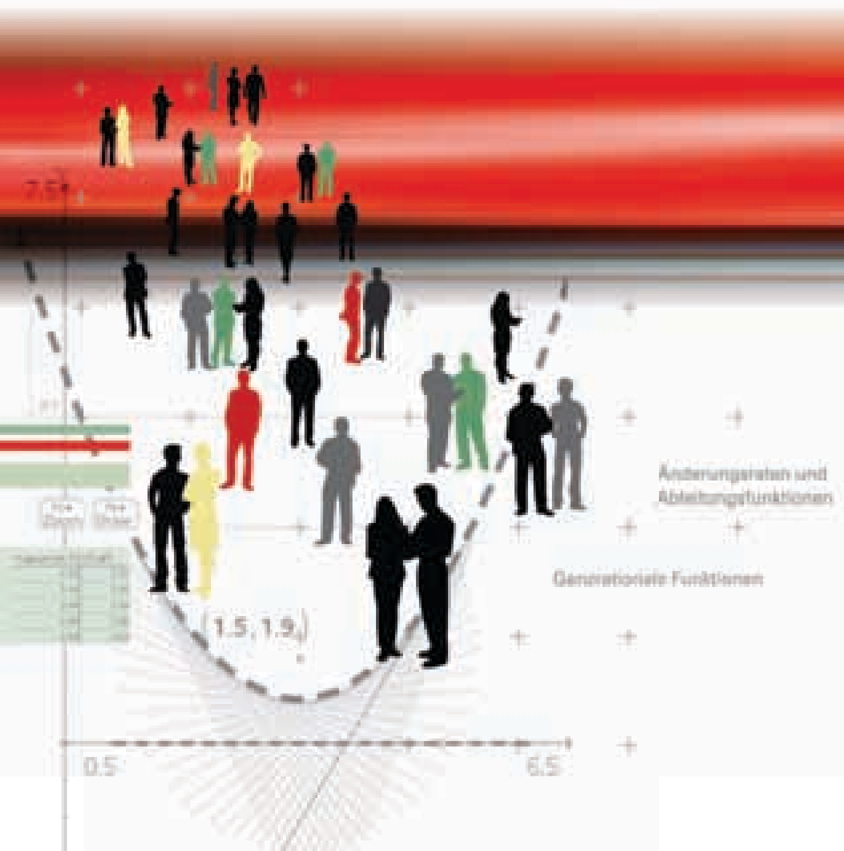
T³ DEUTSCHLAND

CAliMERO

Computer-Algebra im Mathematikunterricht: Entdecken, Rechnen, Organisieren

METHODISCHE UND DIDAKTISCHE HANDREICHUNG
BAND 9

Regina Bruder, Wilhelm Weiskirch † (Hrsg.)



Niedersachsen

CAliMERO

Computer-Algebra im Mathematikunterricht: Entdecken, Rechnen, Organisieren

METHODISCHE UND DIDAKTISCHE HANDREICHUNG
BAND 9

Regina Bruder, Wilhelm Weiskirch † (Hrsg.)

Die Materialien entstanden im Rahmen eines Schulversuches des Landes Niedersachsen mit dem Thema:
Computer-Algebra-Systeme im Mathematikunterricht der Jahrgänge 7-10 des Gymnasiums
hier: Ein Schulversuch zur Entwicklung eines Unterrichtskonzepts sowie von Materialien zum Einsatz im Unterricht mit wissenschaftlicher Begleitung

Die wissenschaftliche Begleitung wurde durch Frau Prof. Dr. Regina Bruder von der TU Darmstadt übernommen, Herr StD Wilhelm Weiskirch vom Ratsgymnasium Stadthagen koordinierte die Durchführung.

Unterstützt wurde der Schulversuch von der Firma Texas Instruments, die dem Verein n-21 angehört, durch die Bereitstellung der wissenschaftlichen Begleitung, die Übernahme der Veröffentlichungskosten und die Finanzierung von Arbeitstagungen.

Verlag:
Westfälische Wilhelms-Universität Münster, Zentrum für Lehrerbildung

Vorwort

Liebe Kolleginnen, liebe Kollegen,

dieses Heft ist in einem Schulversuch des Landes Niedersachsen extra zu dem Zweck entwickelt worden, um mit dem Taschencomputer (TC) ein durchgängiges Konzept für einen effektiven Unterricht zu haben. Neben neu entwickelten Aufgaben wurden auch Aufgaben aus Lehrbüchern ausgewählt, die speziell für einen Unterricht mit dem Einsatz eines TC geeignet sind.
Im Schulversuch konnte gezeigt werden, dass ein Unterricht mit diesem Aufgabenmaterial und dem Einsatz eines Taschencomputers einen Mehrwert an mathematischer Kompetenz erbringen bzw. diese wesentlich unterstützen kann. Zudem wurde deutlich, dass durch den Einsatz des Taschencomputers die Kommunikation der Schülerinnen und Schüler unterstützt und eine Vorgehensreflexion gefördert wurde. Von großer Bedeutung für eine erfolgreiche Arbeit mit einem Taschencomputer ist ein ganzheitliches Unterrichtskonzept, in dem darauf geachtet wird, dass neben offenen, kreativitätsfördernden Aufgaben mit Rechnerunterstützung immer wieder auch mathematisches Grundkönnen ohne Rechner gefördert und eingefordert wird.
Um den Schülerinnen und Schülern mehr Verantwortung für ihr eigenes Lernen zu übertragen, ist es sinnvoll, ihnen vor einer bewerteten Leistungskontrolle Gelegenheit zur Selbsteinschätzung zu geben. Mit den "Ich kann ..."-Abfragen werden die wichtigsten inhaltlich gebundenen Fähigkeiten und Fertigkeiten der jeweiligen Unterrichtseinheit beschrieben.
Die Aufgabensammlungen für die einzelnen Unterrichtseinheiten sind so zusammengestellt, dass sie die in den Bildungsstandards geforderten Kompetenzen vermitteln und unterstützen. Zu dem Themenheft für Schülerinnen und Schüler gibt es entsprechend entwickelte Handreichungen für Sie.

Dieses neunte Themenheft hat vier Kapitel.

1. **Änderungsraten und Ableitungsfunktionen**
2. **Ganzrationale Funktionen**
3. **TC-Hilfen**
4. **Kopfübungen – Basiswissen**

Im Themengebiet ‚Änderungsraten und Ableitungsfunktionen’ werden die mittlere Änderungsrate und der Differenzenquotient anhand von Aufgaben aus verschiedenen Sachzusammenhängen eingeführt. Die grafische Darstellung führt zur Änderungsraten- und Steigungsfunktion. Mithilfe dieser Begriffe wird das qualitative Verständnis der Änderungsrate durch Umwandlung von Änderungsratenfunktion in Bestandsfunktion und umgekehrt geschult.
Dann wird die lokale Änderungsrate an einer Stelle in den Blick genommen und in unterschiedlichen Kontexten durch Verfeinerung der Intervalle näherungsweise bestimmt. Dabei werden funktionale Zusammenhänge auch mithilfe der Sekantensteigungsfunktion ‚msek’ untersucht. Die Tangente am Funktionsgraph wird als geometrische Grenzgerade einer Sekantenfolge interpretiert, damit verbunden werden die Vorstellungen der Ableitung als ‚Tangentensteigung‘ und als ‚Grenzwert der Sekantensteigungen‘.

Zusammenhänge, die durch einen Graphen dargestellt sind, werden hinsichtlich ihrer Änderungsraten an beliebigen Stellen untersucht. Der Verlauf der Änderungsraten wird durch den zugehörigen Ableitungsgraphen veranschaulicht.

An einem Höhenprofil wird der Verlauf von Steigungen untersucht und beschrieben. Dabei werden die Begriffe Hochpunkt und Tiefpunkt eingeführt. Mithilfe besonderer Höhenprofile werden Monotonie-Eigenschaften qualitativ erarbeitet und Zusammenhänge zwischen diesen Eigenschaften und der Gestalt des zugehörigen Ableitungsgraphen herausgestellt.

In Umkehrung der Gedankenführung zum grafischen Ableiten wird vom Ableitungsgraphen auf den Ausgangsgraphen geschlossen.

Im letzten Kapitel wird die Ableitungsfunktion analytisch betrachtet. Erste Ableitungsregeln werden erarbeitet und sowohl anschaulich wie auch algebraisch begründet.

Im Themengebiet ‚Ganzrationale Funktionen' werden zunächst Produkte linearer Funktionsterme betrachtet, anschließend in der Produkt- und Summendarstellung untersucht. Aus der Produktdarstellung heraus werden Aussagen über die Vielfachheit und die Anzahl der Nullstellen abgeleitet.

Es schließen sich algebraische Untersuchungen ganzrationaler Funktionen im Hinblick auf globale und lokale Eigenschaften wie Symmetrie, Verhalten im Unendlichen und Extrempunkte an. Wendepunkte sind kein Inhalt des niedersächsischen Kerncurriculums für die Sek I. Dennoch bietet es sich im vorliegenden Unterrichtsgang (optional) an, zumindest die ‚Kandidaten' für Wendestellen algebraisch zu bestimmen.

Bei der anschließenden Betrachtung verschiedener Optimierungsprobleme steht der Modellierungsaspekt im Vordergrund.

Vermischte Kopfübungen sind eine **ritualisierte Lerngelegenheit** für das Wachhalten von mathematischem Grundwissen aus früheren Themen und Klassenstufen. Sie enthalten jeweils Grundaufgaben bzw. deren Umkehrungen zu verschiedenen nicht zum aktuellen Stoff gehörenden Begriffen, Verfahren oder Zusammenhängen, die dauerhaft verfügbar sein sollen. Sie sind Teil einer Selbsteinschätzung der Lernenden mit dem Ziel, Aktivitäten zum Füllen individueller Lücken anzuregen.

In jedem Unterrichtsbaustein lernen die Schülerinnen und Schüler wichtige mathematische Begriffe, Zusammenhänge und Verfahren sowie deren typische Anwendungen kennen. Diese Lerninhalte sind auch für erfolgreiches Weiterlernen von zentraler Bedeutung. Wir nennen solche Lerninhalte kurz **Basiswissen.**

Mit diesem Band ist CAliMERO am Ende des Jahrgangs 10 angekommen. Wir haben einige Aufgaben aus vorigen Bänden z. T. leicht verändert aufgeführt, die exemplarisch wichtige Eckpfeiler des Basiswissens im Hinblick auf die Entwicklung funktionalen Denkens darstellen.

Die Aufgaben aus diesem Teil helfen durch regelmäßige eigenständige Arbeit die Wissenslücken wieder zu schließen, die Schülerinnen und Schüler erinnern sich an mathematische Kenntnisse und mobilisieren ihre Fertigkeiten sowie Fähigkeiten. Langfristig können sich so eine hohe mathematische Kompetenz und ein gutes Basiswissen entwickeln.

Die Autoren dieses Themenheftes wünschen Ihnen bei der Nutzung der Arbeitsmaterialien in Verbindung mit den Handreichungen viel Erfolg!

Bergkirchen im Mai 2012

INHALTSVERZEICHNIS

Änderungsraten und Ableitungsfunktionen

Ganzrationale Funktionen

TC-Hilfen

Training

C A l i M E R O

Computer-Algebra im Mathematikunterricht
Entdecken, Rechnen, Organisieren

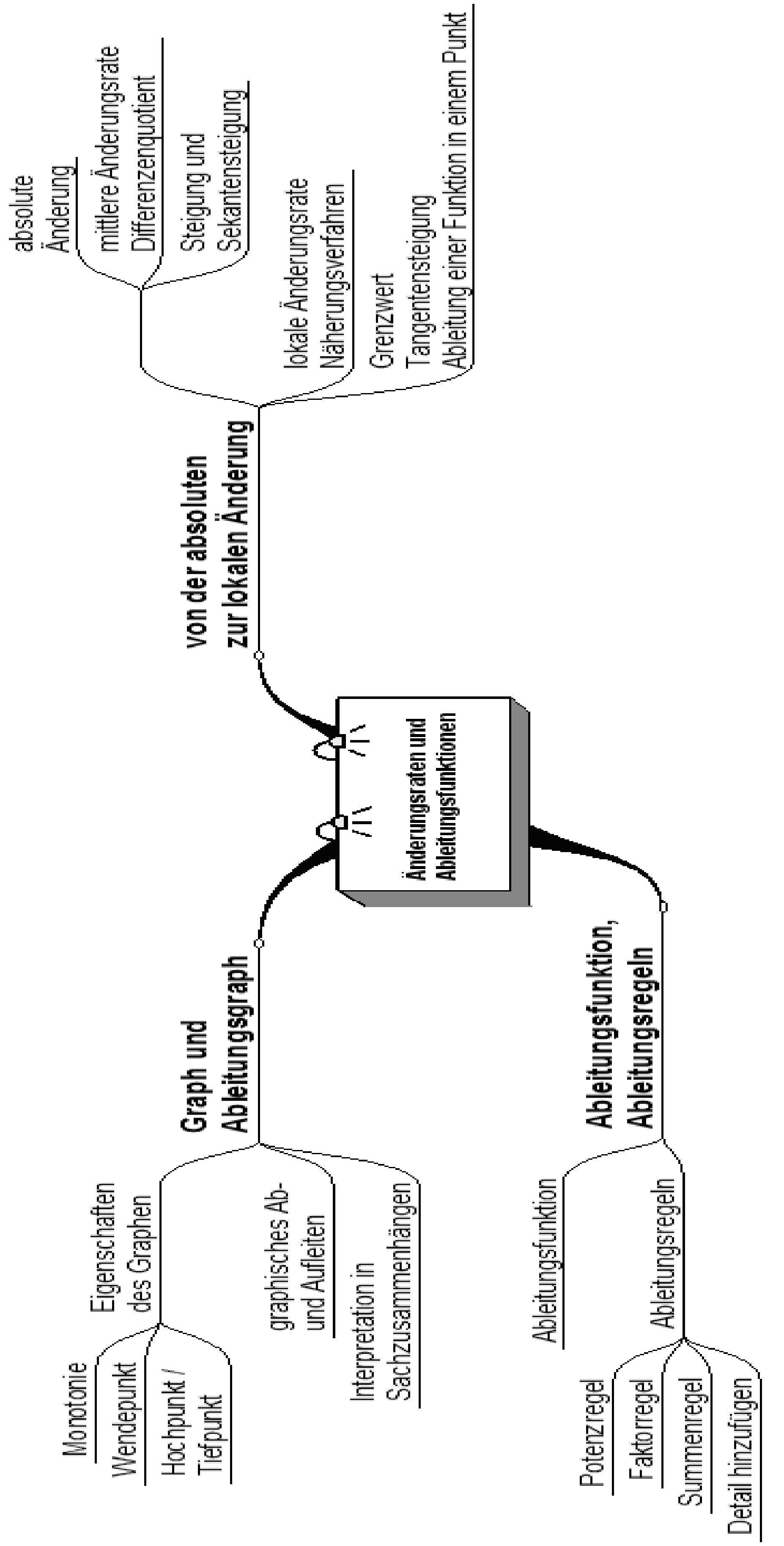
©PAGOT

Änderungsraten und Ableitungsfunktionen

L e h r e r m a t e r i a l i e n

Überblick über den Unterrichtsverlauf

Mind Map mit Inhalten



Prozess- und inhaltsbezogene Kompetenzen

Anhand dieses Unterrichtsmaterials können bei entsprechender methodischer Umsetzung folgende prozessbezogenen Kompetenzen des Kerncurriculums von den Schülerinnen und Schülern schwerpunktmäßig erworben werden:

Mathematisch argumentieren	**Probleme mathematisch lösen**	**Mathematisch Modellieren**	**Mathematische Darstellungen verwenden**	**Mit symbolischen, formalen, …**	**Kommunizieren**
• erläutern präzise mathematische Zusammenhänge und Einsichten unter Verwendung der Fachsprache • kombinieren mathematisches Wissen für Begründungen und Argumentationsketten und nutzen dabei auch formale und symbolische Elemente und Verfahren • bauen mehrschrittige Argumentationsketten auf, analysieren und bewerten diese • geben Begründungen an, überprüfen und bewerten diese	• stellen sich inner- und außermathematische Probleme und beschaffen die zu einer Lösung noch fehlenden Informationen • nutzen mittlere und lokale Änderungsrate zur Problemlösung			• nutzen Tabellen, Graphen, Terme und Gleichungen zur Bearbeitung funktionaler Zusammenhänge • nutzen eine Tabellenkalkulation und ein CAS-System zur Darstellung und Erkundung mathematischer Zusammenhänge sowie zur Bestimmung von Ergebnissen	• teilen ihre Überlegungen anderen verständlich mit, wobei sie vornehmlich die Fachsprache nutzen • präsentieren Problembearbeitungen, auch unter Verwendung geeigneter Medien • verstehen Überlegungen von anderen zu mathematischen Inhalten, prüfen diese auf Schlüssigkeit und Vollständigkeit und gehen darauf ein • beurteilen und bewerten die Arbeit im Team und entwickeln diese weiter

Mit diesem Unterrichtsmaterial werden folgende inhaltsbezogenen Kompetenzen vermittelt:

Zahlen und Operationen	Größen und Messen	Raum und Form	funktionaler Zusammenhang	Daten und Zufall
			• erkennen funktionale Zusammenhänge als Zuordnungen zwischen Zahlen und zwischen Größen in Tabellen, Graphen, Diagrammen und Sachtexten, beschreiben diese verbal, erläutern und beurteilen sie • stellen Funktionen durch Terme und Gleichungen dar und wechseln zwischen den Darstellungen Term, Gleichung, Tabelle, Graph • modellieren Sachsituationen durch Funktionen • beschreiben und interpretieren mittlere Änderungsraten und Sekantensteigungen in funktionalen Zusammenhängen, die als Tabelle, Graph oder Term dargestellt sind, berechnen diese auch unter Verwendung des eingeführten Taschenrechners und erläutern sie an Beispielen • beschreiben und interpretieren die Ableitung als lokale Änderungsrate und als Tangentensteigung, berechnen diese auch unter Verwendung des eingeführten Taschenrechners und erläutern sie an Beispielen • entwickeln Graphen und Ableitungsgraphen auseinander, beschreiben und begründen Zusammenhänge und interpretieren diese in Sachzusammenhängen	

Hinweise zu rechnerfreien und rechnerspezifischen Fertigkeiten

Rechnerfreie Fertigkeiten

Obwohl die Einheit ‚Änderungsraten und Ableitungsfunktionen' mit Verwendung des TC als Werkzeug unterrichtet wird, sollen bestimmte Fähigkeiten von den Schülerinnen und Schülern auch rechnerfrei erworben und beherrscht werden. Diese Fertigkeiten sollen in Klassenarbeiten oder in Kurztests nachgewiesen bzw. abgeprüft werden. Folgende rechnerfreie Fertigkeiten erscheinen uns relevant:
Die Schülerinnen und Schüler sollen

1. den Begriff ‚lokale Änderungsrate' erklären und in Sachsituationen zuordnen können.
2. zu gegebenem Bestandsgraphen den Graphen der Änderungsratenfunktion skizzieren können und umgekehrt.
3. einfache Funktionsterme unter Anwendung der Ableitungsregeln ableiten können.

CAS-Fertigkeiten

Im Umgang mit dem TC sollen die Schüler am Ende der Einheit über folgende Fertigkeiten verfügen:

1. im Listeneditor mit dem ‚ ∆ List'-Befehl durchschnittliche Änderungsraten berechnen können.
2. und mithilfe der Sekantensteigungsfunktion momentane Änderungsraten lokal und global näherungsweise bestimmen können.
3. die Ableitung einer Funktion an einer Stelle und allgemein bestimmen können.

Thema 1.1: Änderungsraten	**Dauer:** 3 Stunden
Anhand tabellarischer Beispiele wird der Begriff der mittleren Änderungsrate beziehungsweise des Differenzenquotienten eingeführt. Die grafische Darstellung der Änderungsraten führt zu den Begriffen Änderungsratenfunktion und Steigungsfunktion. Mithilfe dieser Begriffe wird das qualitative Verständnis der Änderungsrate durch Umwandlung von Änderungsratenfunktion in Bestandsfunktion und umgekehrt geschult. Zum Schluss wird der Begriff der Sekante eingeführt.	
Besondere Materialien/Technologie: SM 1.1.1 bis 1.1.6	

Ablauf der Stunden 1 und 2

Inhalt	**Medien**	**Kommentar**
Einstieg: Es wird pro Gruppe eine der Aufgaben 1 bis 4 (SM 1.1.3, Aufg.5 optional) bearbeitet. Ihnen gemeinsam ist, dass sie auf den Begriff der Änderungsrate führen.	SM 1.1.1 und 1.1.2 Aufg.1 - 4	Die Aufgaben werden arbeitsteilig in Gruppen bearbeitet.
Erarbeitung: Will man die Änderungen vergleichen, ist es wenig sinnvoll, nur die tatsächlichen Änderungen der Funktionswerte zu betrachten, wenn sich die Intervallbreiten unterscheiden. Stattdessen bildet man zum Vergleich die Quotienten der Differenzen: $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Diese haben im Sachkontext unterschiedliche Bedeutungen, z. B. ‚Durchschnittsgeschwindigkeit' oder ‚mittlere Wachstumsgeschwindigkeit'. Problem bei der grafischen Darstellung: An welcher Stelle des Intervalls trägt man den Wert ein?	ggf. Folien TC-Hilfen	Bearbeitung der Aufgaben. Jede Gruppe präsentiert ihre Ergebnisse, z. B. in Form eines Gruppenpuzzles. Hinweis auf Nutzung des Data-Matrix-Editors. Dieses Problem weist schon auf den Unterschied zur lokalen Änderungsrate.
Präsentation: Notieren der verschiedenen Quotienten zum Vergleich, Diskussion des x-Wertproblems für die grafische Darstellung (Lösungsmöglichkeiten: Treppenfunktion, Punkt in Intervallmitte…).		
Sicherung: Definition des Differenzenquotienten	Wissens-speicher	Lehrerinformation

Ablauf der Stunde 3

Inhalt	**Medien**	**Kommentar**
Einstieg: Aufgaben zur qualitativen Analyse der Änderungsrate	SM 1.1.3 und 1.1.4 Aufg.6, 7	
Erarbeitung: Die Schülerinnen und Schüler schließen • aus dem Graphen des Bestandes oder aus dem Sachzusammenhang auf die Änderungsrate und • aus verbalen Aussagen zur Änderungsrate auf den Graphen des Bestandes.		Einzelarbeit mit anschließendem Abgleich mit dem Nachbarn. Die Flexibilität beim Wechsel der Darstellungsarten soll trainiert werden.
Zusammenfassung: Vergleich einer Aufgabe und Klärung von Fragen, die nach dem Abgleich mit dem Nachbarn offen geblieben sind. Lernzuwachs: Es ist möglich, qualitativ vom Bestand auf die Änderungsrate und v on der Änderungsrate auf den Bestand zu schließen.		Unterrichtsgespräch
Übung: weitere Beispiele	SM 1.1.4 Aufg. 8 bis SM 1.1.5 Aufg. 11	Aus diesen Aufgaben kann auch eine Auswahl getroffen werden.
Hausaufgabe: Übungen zur Berechnung von Differenzenquotienten	SM 1.1.5 Aufg. 12; SM 1.1.6 Aufg. 13	

Thema 1.2: Absolute Änderung und lokale Änderungsrate	**Dauer:** 3 Stunden
Ziel der folgenden Stunden ist es, die lokale Änderungsrate an einer Stelle in den Blick zu nehmen und in unterschiedlichen Kontexten durch Verfeinerung der Intervalle näherungsweise zu bestimmen. Dabei werden funktionale Zusammenhänge auch mithilfe der Sekantensteigungsfunktion untersucht.	
Besondere Materialien/Technologie: LM 1.1 SM 1.2.1 bis 1.2.3	

Ablauf der Stunde 4

Inhalt	**Medien**	**Kommentar**
Einstieg: Mit der Bearbeitung der Aufgabe wird der Begriff der Sekante eingeführt und die Änderungsrate als Steigung interpretiert.	SM 1.2.1 Aufg.1	
Zusammenfassung: Die Gerade, die durch die Punkte A und B eines Graphen geht, hat als Geradensteigung den Wert der mittleren Steigung des Graphen im Abschnitt von A bis B. Man nennt die Gerade, die durch zwei Punkte eines Graphen verläuft, **Sekante** des Graphen.	Folie LM 1.1 Wissens-speicher	Unterrichtsgespräch
Übung: Unter Verwendung einer Tabelle wird die Berechnung von Durchschnittssteigungen geübt und vertieft.	SM 1.2.1 Aufg. 2	
Vertiefung: Mit dieser Aufgabe können Näherungswerte für lokale Steigungen berechnet werden, weil mithilfe der Funktionsgleichung die zu betrachtenden Intervalle beliebig klein gemacht werden können.	SM 1.2.1 Aufg. 3	Hier wird ein erster Schritt von der Sekanten- zur Tangentensteigung vollzogen.
Auswertung: • Die mittlere Änderungsrate anhand der benachbarten Werte liefert grobe Näherungen (Durchschnittssteigungen). • Mithilfe der Funktion bestimmt man Durchschnittssteigungen für kleinere Intervalle: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ • Wählt man die Zeitabschnitte sehr klein, erhält man eine Näherung für die lokale Steigung. Ziel der Unterrichtsstunde ist es, ausgehend vom obigen Ansatz die Schreibweise $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ einzuführen. Im Aufgabenkontext von Aufgabe 3b muss darauf geachtet werden, dass sowohl die zu untersuchende Stelle a als auch h variiert werden.	Tafel	UG Die Berechnung von $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ bereitet die Definition der Sekantensteigungsfunktion msek(a,h) vor.

Sicherung: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ als Näherungswert für die lokale Steigung bzw. lokale Änderungsrate bei hinreichend kleinem h.	Wissens-speicher	
Hausaufgabe: Die Berechnung von Differenzenquotienten wird beim Begriff der Geschwindigkeit angewendet. In dieser Aufgabe geschieht der Übergang von der Durchschnitts- zur Näherung einer Momentangeschwindigkeit.	SM 1.2.2 Aufg. 4	

Ablauf der Stunden 5 und 6

Inhalt	Medien	Kommentar
Einstieg: Zur Vorbereitung der Vorgehensweise wird die Aufgabe 5 als Lese- und Arbeitstext gegeben.	SM 1.2.2 Aufg. 5	
Sicherung: Mit der Sekantensteigungsfunktion msek(a,h) hat man ein Werkzeug, um komfortabel Änderungsraten auf beliebigen Intervallen zu bestimmen.		
Vertiefung: Es ist besonders auf das Verständnis der Sekantensteigungsfunktion msek(a,h) zu achten. Hierfür werden in der Aufgabe einige Angebote gemacht.	SM 1.2.3 Aufg. 6	
Erarbeitung: Das neue Werkzeug msek(a,h) soll in den be kannten Anwendungskontexten anhand der Aufgaben vertieft werden. Bearbeitet werden sollte mindestens je ein Beispiel aus den Kontexten Geschwindigkeit und Steigung. Bei der Präsentation der Lösungswege ist insbesondere auf die mathematische Umsetzung der Formulierung ‚näherungsweise' zu achten. **Aufgabe 7 – Achterbahn** a) Anwenden von msek(a,h) für variierendes h. b) Auseinandersetzung mit dem Zusammenhang zwischen Kurvenverlauf und Steigungsverhalten, punktuelle Überprüfung mit msek(a,h). c) Vorerfahrung zu den Eigenschaften eines Hochpunktes.	SM 1.2.3 Aufg. 7 - 9 (Auswahl)	Das Werkzeug ‚msek' wird jetzt auch als Differenzenquotient in anderen Zusammenhängen gebraucht. Die Betrachtung des Grenzprozesses findet erst später statt (Kapitel 1.3).

Aufgabe 8 – Turmspringen Zeit für h(t)=0 bestimmen, nutzen von msek(a,h) für die Bestimmung der Eintauch-geschwindigkeit (Zur Erinnerung: 1 m/s = 3,6 km/h) **Aufgabe 9 – Geländewagen** Durch die Vereinheitlichung der Einheiten soll die Interpretation der Ergebnisse erleichert werden. a) Berechnung der mittleren Steigung mit den Tabellenwerten b) Annähernde Übereinstimmung mit den Tabellenwerten nutzen von msek(a,h) zum gezielten Probieren, Vorerfahrung zu den Eigenschaften eines Wendepunkts W (0,5 | 0,12).		
Sicherung: Präsentation der Lösungswege und Erkenntnisse		LSG
Hausaufgabe: Ausstehende Aufgaben und/oder Lernprotokoll zur Änderungsrate	Vgl. SM	

LM 1.1 Folie Sekante

Thema 1.3: Ableitungsbegriff	**Dauer:** 3 Stunden
1. Es soll die Vorstellung verdeutlicht werden, dass die Tangente am Funktionsgraph als geometrische Grenzgerade einer Sekantenfolge interpretiert werden kann. 2. Die mit der Ableitung in einem Punkt zusammenhängenden Begriffe - Ableitung als Tangentensteigung, - Ableitung als Grenzwert der Sekantensteigungen und die Bezeichnungen Tangente, Ableitung, f'(a), Grenzwert werden eingeführt.	
Besondere Materialien/Technologie: LM 1.2 bis 1.4, DGS, z.B. TI-Nspire CAS SM 1.3.1	

Ablauf der Stunde 7

Inhalt	Medien	Kommentar
Einstieg: Mithilfe einer Dynamischen Geometrie-Software wird der Prozess der Berechnung von Sekantensteigungen für $h \to 0$ demonstriert. Es soll der Grenzübergang vom Differenzen- zum Differential-quotienten geometrisch und analytisch verdeutlicht werden.	LM 1.2	
Sicherung: Für den Fall A = B gibt es keine Sekante. Man kann eine Tangente an den Graph im Punkt A zeichnen. Die Steigung dieser Tangente entspricht der Steigung des Graphen von f in A.	Tafel, Wissens-speicher	
Vertiefung: Der Grenzwertprozess soll exemplarisch durchgeführt werden. Dabei wird msek(a,h) verwendet, um den Prozess der Verfeinerung nachzuvollziehen. Außerdem soll das Vorgehen auch formalisiert, der Begriff des Grenzwertes aufgegriffen und die Ableitung an einer Stelle definiert werden.	LM 1.3 SM 1.3.1 Aufg. 1	
Zusammenfassung: $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a)$ nennt man die Ableitung von f an der Stelle a. Die Ableitung liefert die Steigung des Graphen an dieser Stelle.	Wissens-speicher	
Hausaufgabe:	SM 1.3.1 Aufg. 2	

Ablauf der Stunde 8

Inhalt	Medien	Kommentar
Einstieg: Die Berechnung von Ableitungen an einer Stelle soll an verschiedenen Beispielen geübt werden. Dazu dient eine Präsentation der Ergebnisse der Hausaufgabe. Bei Verwendung dieser Funktionen kann die Vereinfachung des Differenzenquotienten demonstriert werden. Dieses kann auch mithilfe des TC gezeigt werden.	LM 1.4 Tafel TC mit Display	Sinnvolle Nutzung der neuen Fachterminologie beachten
Übung: Am Beispiel der Funktion f mit $f(x) = x^4$ soll dieser Prozess der Vereinfachung und die Berechnung der Ableitung an einer Stelle geübt werden.	Tafel	
Vertiefung: Am Beispiel der Funktion f mit $f(x) = \sin(x)$ wird erarbeitet, dass sich der Term für den Differenzenquotienten nicht für alle Funktionen in der gewohnen Weise vereinfachen lässt. Wird der Grenzwertprozess unter Verwendung des Makros ‚msek' durchgeführt, kann die Ableitung an einer Stelle bestimmt werden.	Tafel TC mit Display	Hier wird die Mächtigkeit des Makros ‚msek' erneut deutlich.
Hausaufgabe: Die Aufgaben dienen dazu, die Ableitung an einer Stelle im Anwendungszusammenhang zu deuten bzw. den Grenzwertprozess noch einmal nachzuvollziehen.	SM 1.3.1 Aufg. 3, 4	

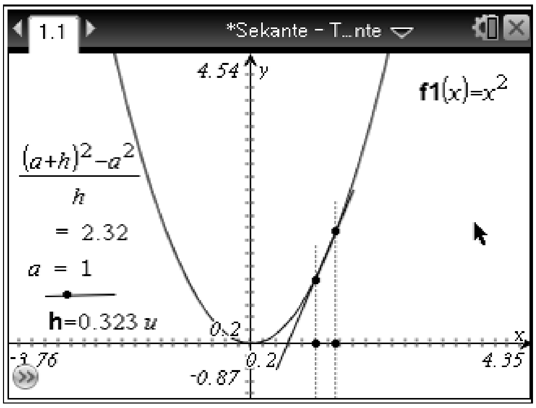
Ablauf der Stunde 9

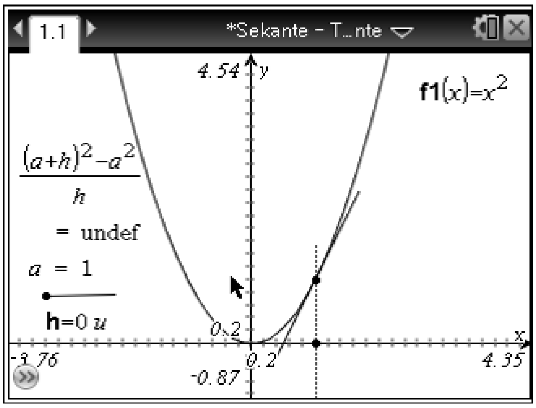
Inhalt	Medien	Kommentar
Einstieg: Am Beispiel der Funktion f mit $f(x) = x^4 - 5 \cdot x^3 + 7 \cdot x^2 + 1$ werden arbeitsteilig Werte der Ableitung an verschiedenen Stellen im Intervall $-1 \leq x \leq 3$ bestimmt und tabellarisch notiert. Mit dieser Übersicht wird eine Zuordnung Stelle $\rightarrow$ Ableitung an dieser Stelle beschrieben. Diese Zuordnung bekommt den Namen ‚Ableitungsfunktion'.	Tafel oder TC	Die Berechnung der Ableitungswerte soll unter Verwendung des Makros ‚msek' erfolgen, da Ableitungsregeln noch nicht zur Verfügung stehen.
Sicherung: Die Funktion f', in der jeder Stelle einer Funktion die Steigung des Graphen der Funktion an dieser Stelle zugeordnet wird, heißt Ableitungsfunktion von f.	Tafel Wissens-speicher	Ableitungsregeln werden erst später im Kapitel 3 erarbeitet.

Vertiefung: Ein Plot der Tabelle und die grafische Darstellung der Funktion liefern einen Anlass, über Zusammenhänge zwischen beiden nachzudenken. Dabei werden markante Punkte besonders betrachtet. Optional kann die Gleichung der Ableitungsfunktion von f mithilfe des Regressionsmoduls bestimmt werden. So kann auch deren Graph mit eingezeichnet und für den Vergleich verwendet werden.		Mit dem Vergleich von Graph und Ableitungsgraph werden die Zusammenhänge aus den ersten Stunden aufgegriffen und die Untersuchungen im Kapitel 2 vorbereitet.

LM 1.2 Hinweise zum Nutzen von DGS zur Visualisierung des Grenzübergangs

Demonstration mit DGS





Da der V200 keine ausreichende Verknüpfung zwischen Geometrie und Algebra bietet, muss an dieser Stelle DGS genutzt werden, um den Übergang vom Differenzen- zum Differentialquotienten zu visualisieren. Mit dem ‚TI-Nspire CAS' kann man wie folgt vorgehen.

(1) In Applikation ‚Graphs' Definition der Funktion f1 in der Eingabezeile: $f1(x) = x^2$,

(2) h definieren: Zeichnen einer Strecke und eines Punktes auf der Strecke, Messen der Teilstrecke, Kontextmenü der Maßzahl öffnen und mit ‚5:Speichern' die Zahl mit h benennen,

(3) mit dem Zirkelwerkzeug einen Kreis mit Radius h um einen Mittelpunkt auf der x-Achse erzeugen, Koordinaten des Mittelpunktes anzeigen lassen und die x-Koordinate mit a benennen (vgl. (2)),

(4) Parallelen zur y-Achse durch Mittelpunkt und Schnittpunkt des Kreises mit der x-Achse konstruieren, Schnittpunkte mit dem Graphen definieren und die Sekante zeichnen,

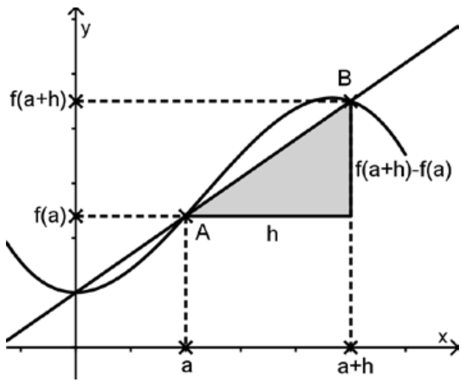
(5) Text einfügen mit der Formel zur Berechnung des Differenzenquotienten; mit dem Kontextmenü ‚4:Berechnen' die Variablen a und h zuweisen.

Man kann nun durch Ziehen h immer kleiner wählen und beobachten, was mit dem Differenzenquotienten und der Sekante passiert.

LM 1.3

Ableitung

mittlere Änderungsrate $\quad msek(a,h) = \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad$ Sekantensteigung

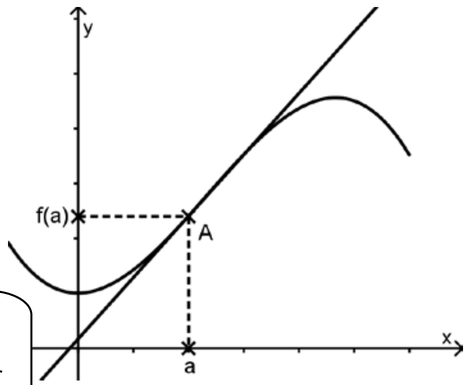


h → 0

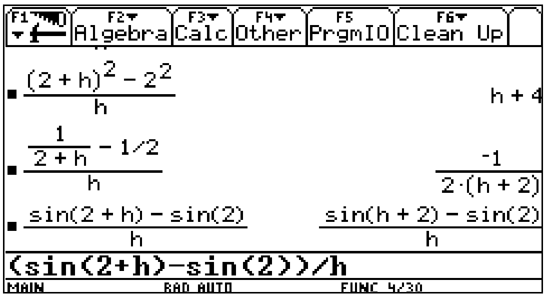
lokale Änderungsrate $\quad f'(a) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad$ Tangentensteigung

Für h = 0 lässt sich eine Zahl ergänzen: f'(a), sprich: die Ableitung von f an der Stelle a.

Die Steigung des Graphen von f in A ist die Steigung der Tangente in A.



LM 1.4



1. Gibt man die Terme der Sekantensteigungsfunktionen zu den Funktionen mit $y = x^2$, $y = \frac{1}{x}$ und $y = \sin(x)$ an der Stelle $a = 2$ in den TC ein, vereinfacht er die ersten beiden Terme. Demonstration der Umformung an der Tafel.

2. Die vereinfachten Terme erlauben das Einsetzen von $h = 0$. Das Ergebnis entspricht der Ableitung der Funktion an der Stelle $a = 2$.
   Der grafische Vergleich von Term und Verein-fachung verdeutlicht: Der vereinfachte Term ist die ‚passende' Ergänzung der Sekantensteigungsfunktion an der Lücke $h = 0$.
3. Nicht jeder Term erlaubt eine solche Vereinfachung (Beispiel Sinus oder 2^x). Nur bei Potenzfunktionen ergibt sich damit eine zweite Option zur Bestimmung der Ableitung (neben der Auswertung der Sekantensteigungsfunktion).

Thema 2: Graph und Ableitungsgraph	**Dauer:** 7 Stunden
Zusammenhänge, die durch einen Graphen dargestellt sind, werden hinsichtlich ihrer Änderungsraten an beliebigen Stellen untersucht. Der Verlauf der Änderungsraten wird durch den zugehörigen Ableitungsgraphen veranschaulicht. An einem Höhenprofil wird der Verlauf von Steigungen untersucht und beschrieben. Dabei werden die Begriffe Hochpunkt und Tiefpunkt eingeführt. Mithilfe besonderer Höhenprofile werden Monotonie-Eigenschaften qualitativ erarbeitet. Es wird der Zusammenhang zwischen diesen Eigenschaften und der Gestalt des zugehörigen Ableitungsgraphen herausgestellt. Vertieft werden die Kenntnisse an Füllgraphen. Auch bei ihnen treten gelegentlich Stellen größter oder kleinster Änderungsrate auf, auf die in diesem Sachzusammenhang besonders eingegangen werden soll. In Umkehrung der Gedankenführung zum grafischen Ableiten wird vom Ableitungsgraphen auf den Ausgangsgraphen geschlossen. Abschließend sollen die Schülerinnen und Schüler Bedeutung und Verlauf des Ableitungsgraphen in verschiedenartigen Zusammenhängen interpretieren.	
Besondere Materialien/Technologie: LM 2.1 bis 2.4 SM 2.1 bis 2.12 leere Folien	

Ablauf der Stunde 1

Inhalt	**Medien**	**Kommentar**
Einstieg: Die Schülerinnen und Schüler erhalten das Arbeitsblatt mit dem Höhenprofil. Sie werden aufgefordert, den Verlauf zu beschreiben, die Steigungen an mehreren Stellen (die Ableitungen) näherungsweise zu bestimmen und die Steigungen in das vorbereitete Koordinatensystem einzutragen.	SM 2.1 Aufg. 1	PA
Erwartetes Ergebnis: Die Schülerinnen und Schüler erkennen mithilfe von Tangentensteigungen: • In Hoch- und Tiefpunkten ist die Steigung null. • Wo der Graph ansteigt, ist die Steigung positiv, • Wo er fällt, ist die Steigung negativ.		
Auswertung: Zu einem Hochpunkt gibt es eine Umgebung, in der alle anderen Punkte des Graphen niedriger liegen. Zu einem Tiefpunkt gibt es eine Umgebung, in der alle anderen Punkte des Graphen höher liegen. Ein Graph kann mehrere Hochpunkte (Tiefpunkte) besitzen, die auf verschiedenen Höhen liegen können.	Folie LM 2.1	LSG

Weiteres Ergebnis: Die Schülerinnen und Schüler erfahren, dass die in das vorbereitete Koordinatensystem eingetragenen Punkte auf einem Graphen, dem Graphen der Ableitungsfunktion, liegen.		
Information: Die Hoch- und Tiefpunkte des Graphen nennt man zusammenfassend Extrempunkte. Die zugehörigen Stellen (auf der x-Achse) heißen Extremstellen.		
Hausaufgabe: Zum Vergleichen der HA in der nächsten Stunde erhalten einige Schülerinnen und Schüler die Aufgabe, ihre Ergebnisse auf Folie zu übertragen.	SM 2.2 Aufg. 2	Folien an einige Schüler verteilen

Ablauf der Stunde 2

Inhalt	**Medien**	**Kommentar**
Hausaufgabenvergleich: Besprechung der Hausaufgabe mithilfe der erstellten Folien.	Folien	LSG SV
Vertiefung: Abgleich der bisher gemachten Entdeckungen mit dem Vorwissen über die Ableitungen von grundlegenden Funktionen mit $f(x) = x^2$, $f(x) = x^3$ … Die Schülerinnen und Schüler skizzieren den Funktionsgraphen und jeweils darunter qualitativ den zugehörigen Ableitungsgraphen. Sie beschreiben die Zusammenhänge zwischen den Graphen.	Tafel	
Ergebnissicherung: Wenn der Graph eines Höhenprofils in einem seiner Abschnitte immer nur steigt, dann verläuft der zugehörige Teil des Ableitungsgraphen immer oberhalb der Rechtsachse des Koordinatensystems. Wenn der Graph eines Höhenprofils in einem seiner Abschnitte immer nur fällt, dann verläuft der zugehörige Teil des Ableitungsgraphen immer unterhalb der Rechtsachse des Koordinatensystems.	Wissensspeicher	Der Monotoniebegriff wird nicht nicht explizit definiert.
Hausaufgabe: Als Ergebnissicherung werden Abschnitte des Graphen betrachtet, in denen er ansteigt und in denen er abfällt, und dabei auf den zugehörigen Verlauf des Ableitungsgraphen in diesen Abschnitten geachtet.	SM 2.3 Aufg. 3 Folie	

Ablauf der Stunde 3

Inhalt	Medien	Kommentar
Hausaufgabenvergleich:	Schüler-folien zur HA	Schülervortrag
Einstieg: Verschieden geformte Gefäße werden mit einer Flüssigkeit gefüllt. Der Zufluss ist konstant (die Flüssigkeitsmenge, die pro Sekunde ins Gefäß fließt, ändert sich nicht). Man trägt die Füllhöhe gegenüber der Zeit auf. Die entstehenden Graphen heißen Füllgraphen.	Tafel	LV
Erarbeitung: Für unterschiedlich geformte Gefäße werden deren Füllgraphen untersucht.	SM 2.4 und 2.5 Aufg. 4	
Sicherung: Die Schülerinnen und Schüler vergleichen ihre Graphen mit den Graphen auf Folie.	LM 2.2	In LM 2.3 liegt eine Musterlösung vor.
Vertiefung: Untersuchen der bisher gefundenen Füllgraphen hinsichtlich ihrer Eigenschaften		
Erwartetes Ergebnis: Alle Füllgraphen sind (streng monoton) steigend. Einige der Graphen weisen eine konstante Steigung auf, einige eine zu- oder abnehmende Steigung, und einige enthalten einen oder mehrere Punkte, denen – in einer gewissen Umgebung – Stellen einer kleinsten oder größten Änderungsrate zugeordnet werden können. An diesen Stellen ändert sich die Krümmung des Füllgraphen.	Tafel	LSG
Information: Stellen größter oder kleinster Änderungsrate heißen Wendestellen. Die zugehörigen Punkte des Graphen heißen Wendepunkte.		LV
Sicherung: Welche Steigung hat der Ableitungsgraph bei einer Wendestelle seines Ausgangsgraphen?	Tafel	LSG
Erwartetes Ergebnis: An den W endestellen seines Ausgangsgraphen hat der Ableitungsgraph jeweils einen Hoch- oder Tiefpunkt.	Tafel	LSG
Hausaufgabe: Die Schülerinnen und Schüler erhalten den Auftrag, zu speziellen Gefäßen die zugehörigen Füllgraphen zu skizzieren.	SM 2.5 Aufg. 5	

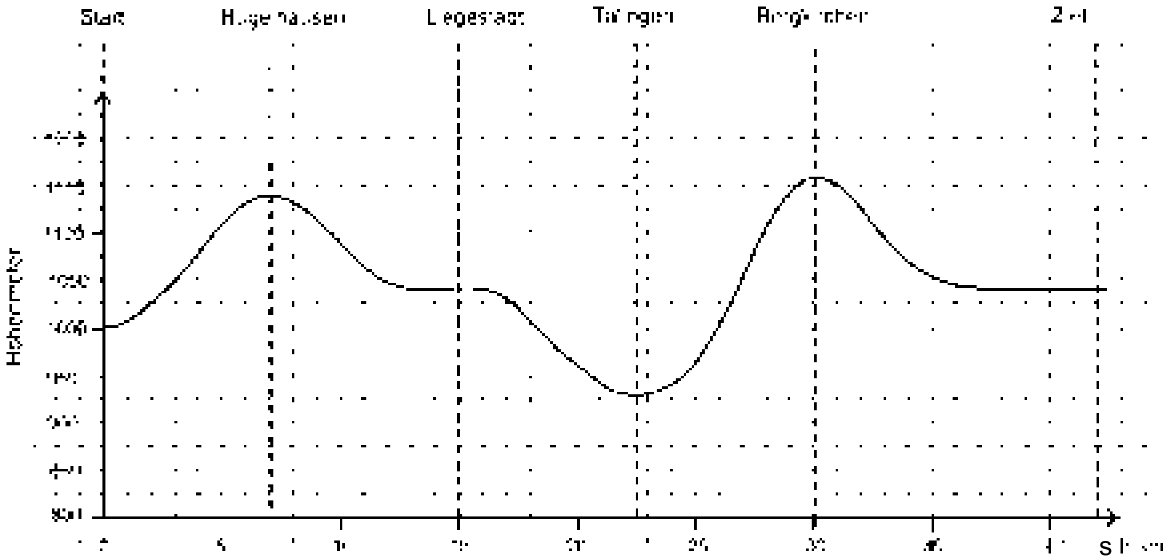
Ablauf der Stunde 4

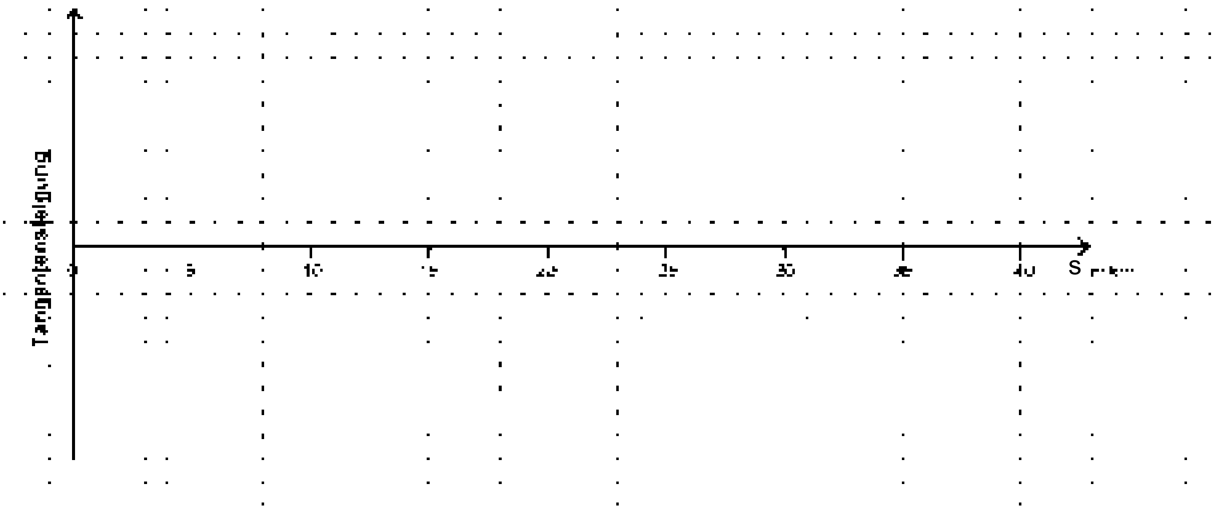
Inhalt	Medien	Kommentar
Einstieg: In der Aufgabe sollen Graphen und A bleitungsgraphen einander zugeordnet werden. Damit werden die Zusammenhänge erneut thematisiert.	SM 2.6 Aufg. 6	
Vorstellung der Ergebnisse: Die Schülerinnen und Schüler stellen ihre Zuordnungen vor und begründen diese.	LM 2.4	LSG
Sicherung: • Im Ableitungsgraphen werden die Schnittpunkte mit der Rechtsachse und die Punkte, in denen der Ableitungsgraph die Steigung null hat, markiert. • Durch die markierten Punkte werden senkrechte Hilfslinien gezogen und oberhalb mit Vermerken wie HP, TP, WP oder mit entsprechenden grafischen Symbolen versehen. • Anhand der Vermerke wird der Ausgangsgraph skizziert. Die gefundenen Zusammenhänge werden verallgemeinert und gesichert.	SM 2.7 Aufg. 7	
Übungen: Der Zusammenhang zwischen Graph und Ableitungsgraph wird in verschiedenen Aufgabenstellungen gefestigt.	SM 2.8 Aufg. 8	
Hausaufgabe:	SM 2.9 Aufg. 9	

Ablauf der Stunden 5 bis 7

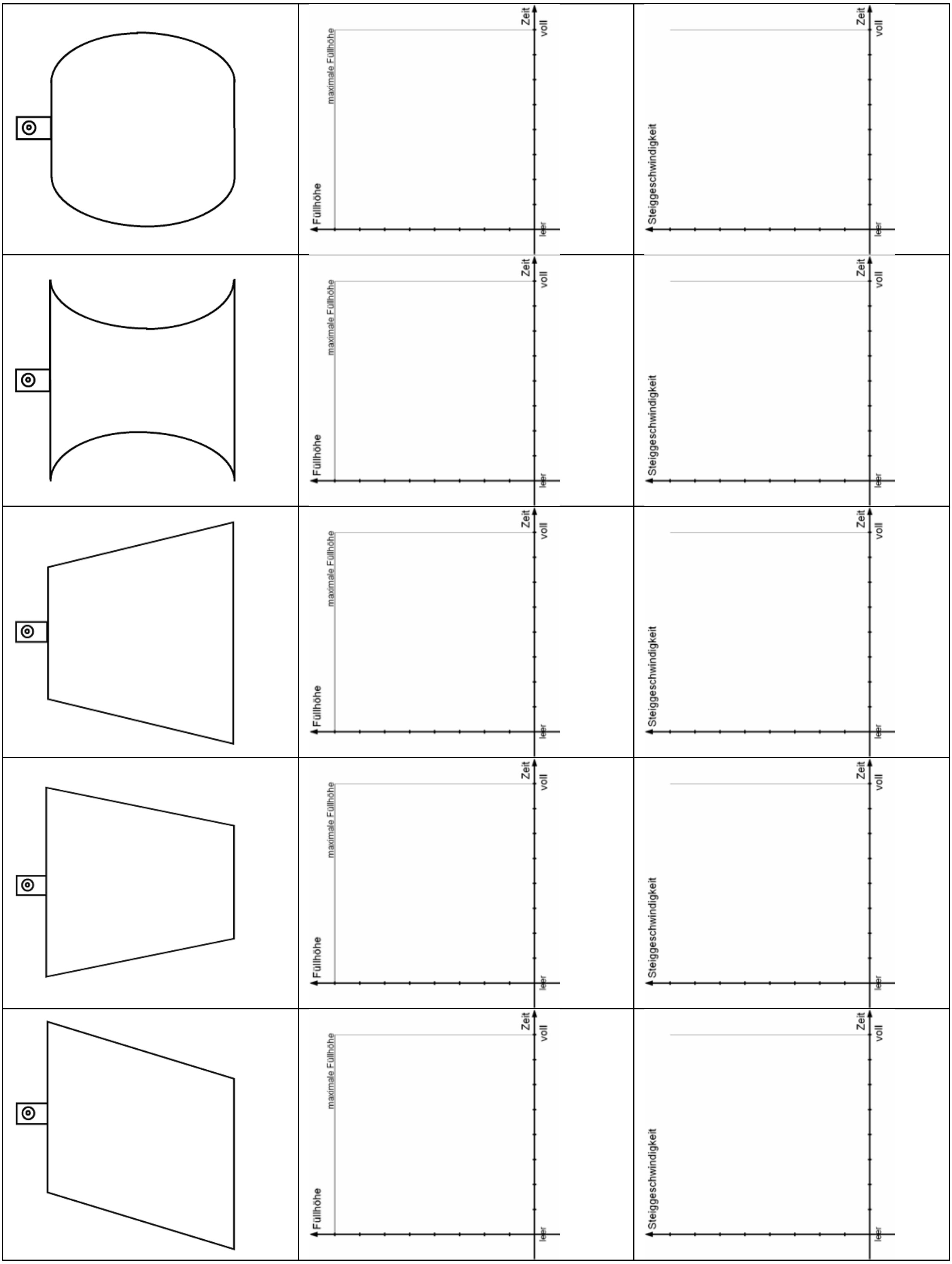
Inhalt	Medien	Kommentar
Erarbeitung: Es werden fünf Gruppen gebildet, jede bearbeitet eine Aufgabe zu einem Sachverhalt. Die Schülerinnen und Schüler präsentieren ihre Ergebnisse auf einem Plakat.	SM 2.10 bis 2.12 Aufg. 10 - 14	Gruppenarbeit
Sicherung: In einer Schlusszusammenfassung wird gemeinsam eine Übersicht zur Bedeutung von f(x) und f'(x), die weitgehend schon bekannt ist, erstellt und durch Aussagen zu den Hoch- und Tiefpunkten und ggf. der Monotonie ergänzt. Vgl. Tabelle im Wissensspeicher (Abschnitt: Interpretationen der Ableitung).	Tafel Wissens- speicher	LSG

LM 2.1

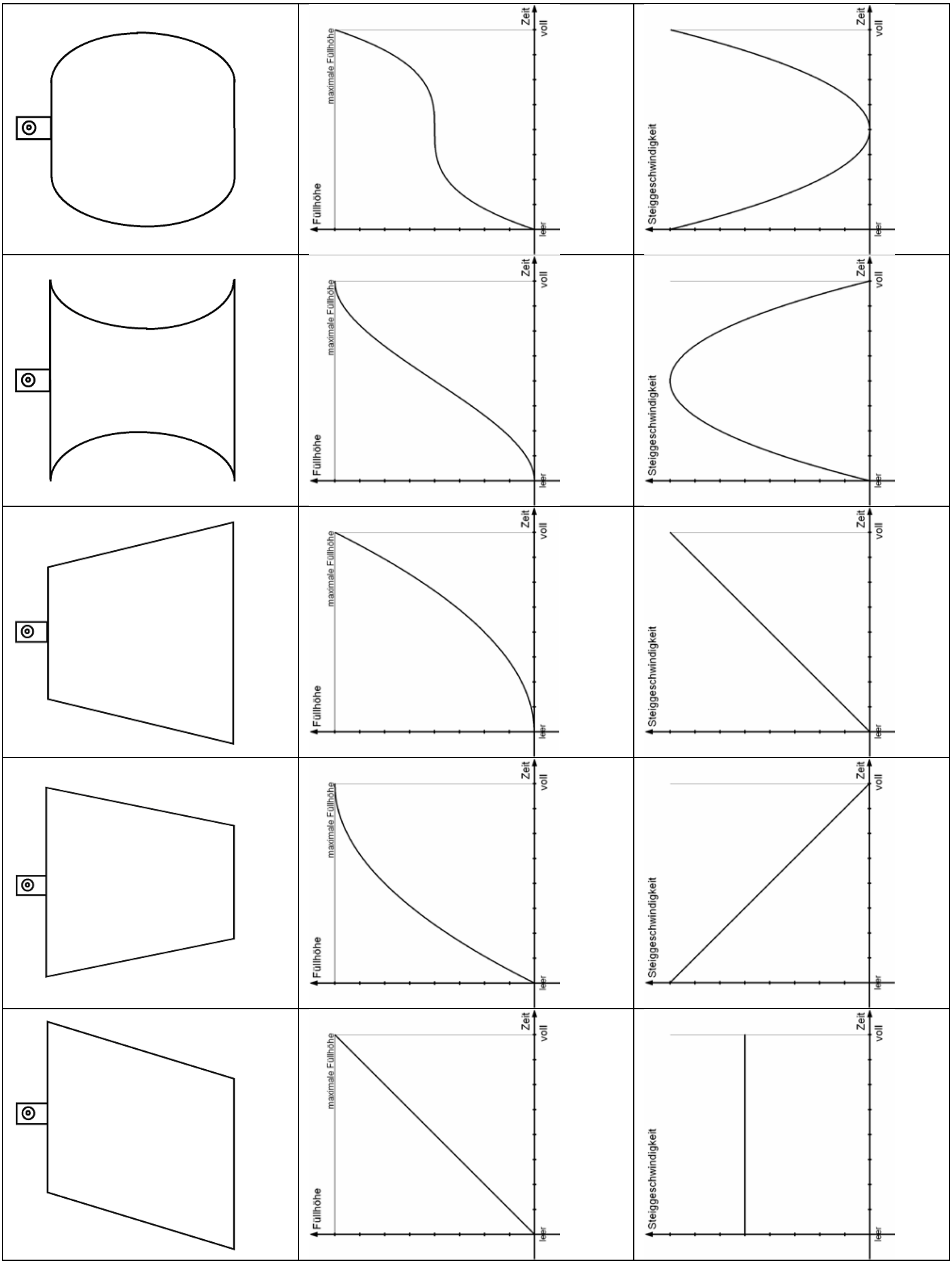




LM 2.2 Folienvorlage

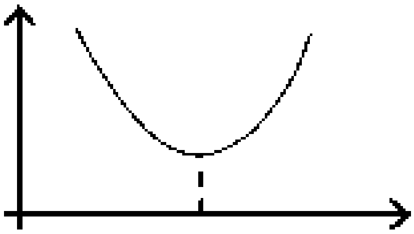
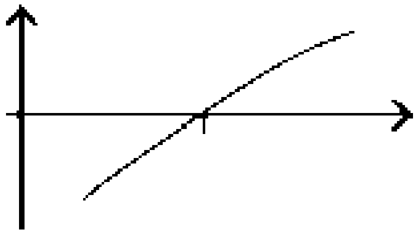
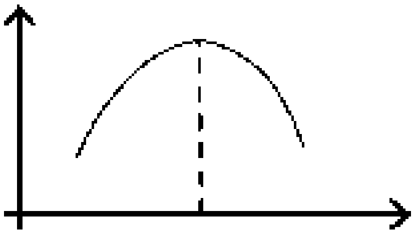
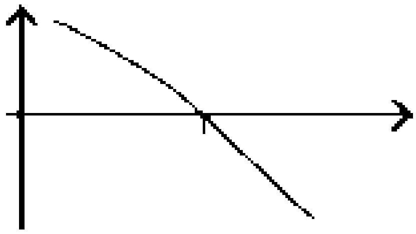
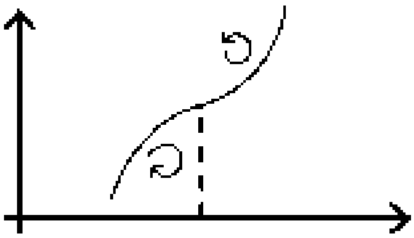
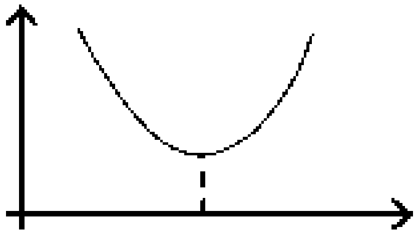
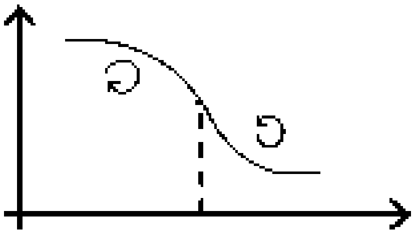
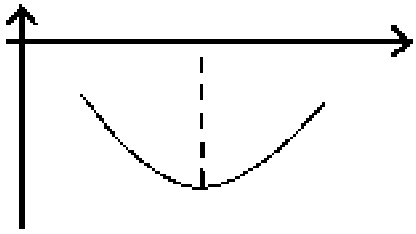
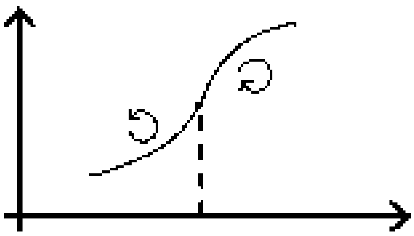
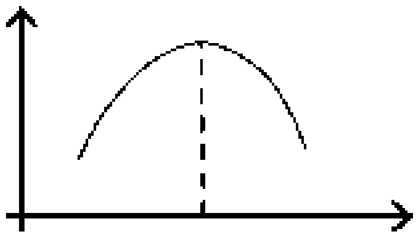
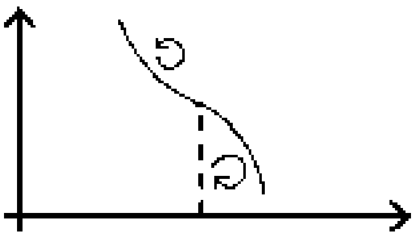
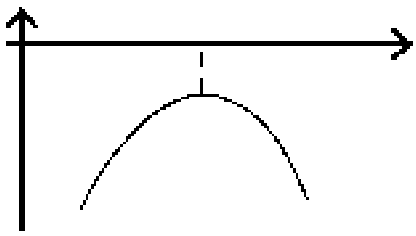


LM 2.3 Folienvorlage (Musterlösungen)



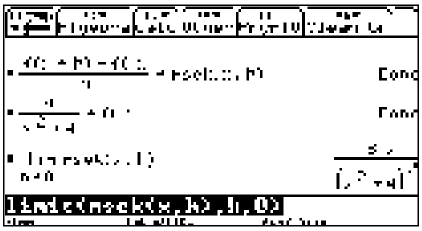
LM 2.4

Lösungshilfe zu SM 2.6

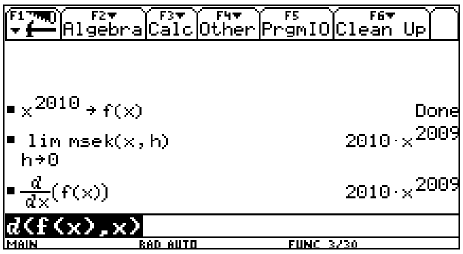
	Funktionsgraph	**Ableitungsgraph**
Tiefpunkt		
Hochpunkt		
Wendepunkte		
		
		
		

Thema 3: Ableitungsfunktion und Ableitungsregeln	**Dauer:** 7 Stunden
In diesem Kapitel werden Erkenntnisse aus den Kapiteln 1 und 2 erweitert, um die Ableitungsfunktion zu definieren und die Ableitungsregeln zu erarbeiten. Dabei geht es vor allem um das Erkennen von Mustern, aber auch um eine Begründung über die sich ergebenden Termstrukturen aus der Sekantensteigungsfunktion msek(x,h). Darüber hinaus werden die Beziehungen zwischen Graph und Ableitungsgraph aus Kapitel 2 einbezogen.	
Besondere Materialien/Technologie: LM 3.1 und 3.2 SM 3.1 bis 3.6 Folien, OHP-Display,	

Ablauf der Stunde 1

Inhalt	Medien	Kommentar
Einstieg: Am Beispiel der Funkton f mit $f(x)=\frac{4}{x^2+4}$ wird der Begriff der Sekantensteigungsfunktion und der Ableitungsfunktion wiederholt.  Mit den Möglichkeiten das TC wird die Gleichung einer Ableitungsfunktion bestimmt, für die bisher keine Ableitungsregeln erarbeitet wurden.	TC mit Display	LSG Anhand der Graphen kann man sich überzeugen, dass auch in diesem Fall die bisher gefundenen Zusammenhänge bestehen.
Erarbeitung: Die Erarbeitung der Regel zum Ableiten von Potenzfunktionen erfolgt zunächst über eine Mustererkennung und anschließender Begründung der mathematischen Zusammenhänge mithilfe des Differentialquotienten. An dieser Stelle sollte auf die Problematik $h \neq 0$ ($h = 0$?, $h \to 0$) explizit eingegangen werden, da der TC beim Term der Sekantensteigungsfunktion keine Fallunterscheidung vornimmt, sondern h kürzt.	SM 3.1 Aufg. 1, 2	Ich-Du-Wir-Methode
Sicherung: Die **Regel zum Ableiten von Potenzfunktionen** wird formuliert.	Wissens-speicher	
Übung: Die Anwendung der Regel wird geübt.	SM 3.2 Aufg. 3	
Hausaufgabe:	SM 3.2 Aufg. 4	

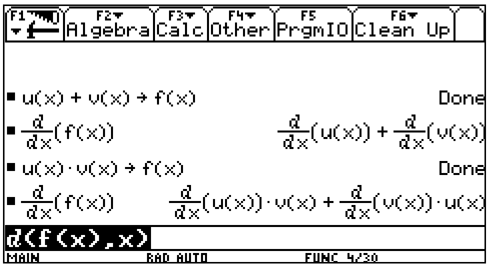
Ablauf der Stunde 2

Inhalt	**Medien**	**Kommentar**
Einstieg: Besprechung der Hausaufgabe: Einführen der **Faktorregel** – grafische Plausibilitätsbetrachtung und rechnerischer Nachweis.	OHP- Display	LSG
Information: Für den Grenzwert der Sekantensteigungsfunktion hält der TC den Ableitungsbefehl vor. Dieser Befehl wird hier eingeführt. Am Beispiel überzeugt man sich, dass er zu gleichem Ergebnis führt wie eine Grenzwertüberlegung. 		LV
Erarbeitung: Die **Summenregel** wird erarbeitet. Sie wird zunächst anhand grafischer Betrachtungen plausibel gemacht und danach nach-gewiesen.	SM 3.2 Aufg. 5	GA
Sicherung: Die Gruppenergebnisse werden gesammelt und d ie Regel wird formuliert.	Tafel	LSG
Hausaufgabe:	SM 3.2 Aufg. 6	

Ablauf der Stunde 3

Inhalt	**Medien**	**Kommentar**
Übungen: Anhand der Aufgaben werden die erarbeiteten Zusammenhänge variantenreich geübt.	SM 3.3 Aufg. 7 - 10	PA
Hausaufgabe: Bisher nicht bearbeitete Aufgaben	SM 3.3	

Ablauf der Stunde 4

Inhalt	**Medien**	**Kommentar**
Besprechen der Aufgaben, Klären von Fragen:		
Untersuchungen zur Produktregel: **Einstieg:** „Die Summenregel lautet: Ist $f(x) = g(x) + h(x)$, dann ist $f'(x) = g'(x) + h'(x)$. Formuliere die Regel mit eigenen Worten."		
Erarbeitung: Die Struktur der Ableitung als „die Ableitung einer Summe ist die Summe der Ableitungen" kann nicht auf andere Funktionsverknüpfungen übertragen werden. Dieses soll für das Produkt zweier Funktionen erarbeitet werden: „Gilt $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g'(x)$?" Die Schülerinnen und Schüler könnten dies zunächst als Vermutung äußern, aber das Beispiel ($x^2 \cdot x^5$) kann diese Vermutung einsichtig widerlegen. Mit dem Ableitungsbefehl des TC wird die Produktregel allgemein mit f(x) und g(x) gezeigt, aber nicht vertiefend bearbeitet. 	Tafel	
Hausaufgabe: Die Ableitung von Quotienten soll am Beispiel ähnlich zur Ableitung eines Produktes erarbeitet werden. In Aufgabe 12 wird die Ableitung von $f(x) = \frac{1}{a \cdot x}$ bestimmt.	SM 3.4 Aufg. 11 und 12	

Ablauf der Stunde 5

Inhalt	Medien	Kommentar
Einstieg: Besprechung der Aufgabe 11 mit dem Ergebnis, dass nur die Summenregel als „einfache“ Regel gilt. Die Quotientenregel wird nicht weiter vertieft. Die Besprechung der Aufgabe 12 liefert die Ableitungsfunktion für $f(x)=\frac{1}{a\cdot x}$ als vertiefende Anwendung der Faktorregel.	OHP-Display	LSG
Erarbeitung: Mithilfe der Aufgabe 7 wird die Ableitungsfunktion von $f(x)=\frac{1}{x-b}$ zunächst an zwei Beispielen erarbeitet. Die Ergebnisse werden auf Folie präsentiert und abschließend als die allgemeine Ableitungsfunktion der verschobenen Hyperbel im Plenum formuliert.	SM 3.4 Aufg. 13 LM 3.1	Ich-Du-Wir-Methode
Übungen: Die Zusammenhänge aus der Erarbeitungsphase sollen in Aufgabe 14 dargestellt werden. Die Ergebnisse können mithilfe der Folie zusammengestellt werden.	SM 3.5 Aufg. 14 LM 3.1	

Ablauf der Stunde 6

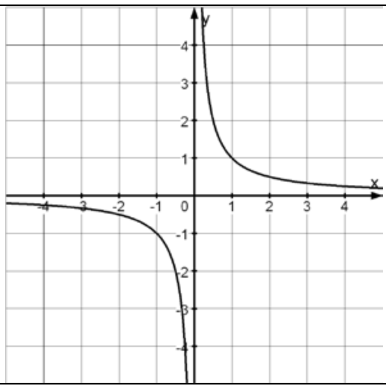
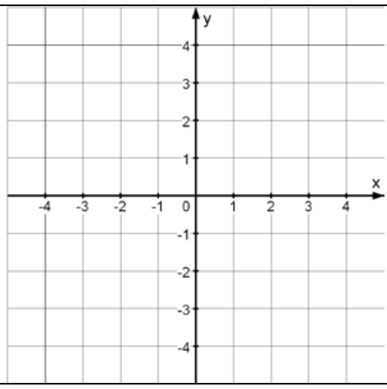
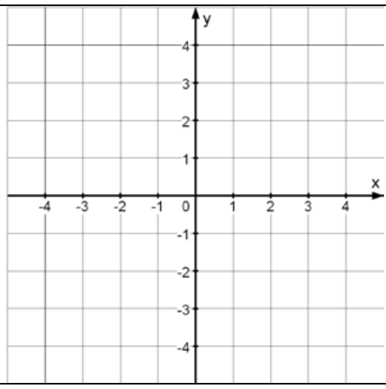
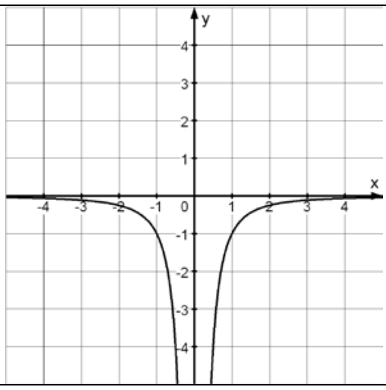
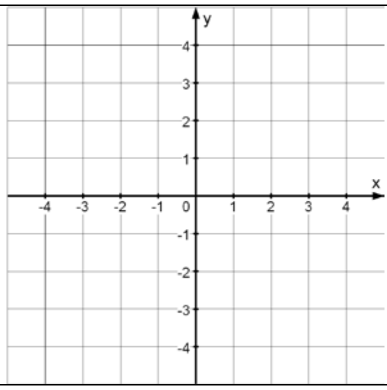
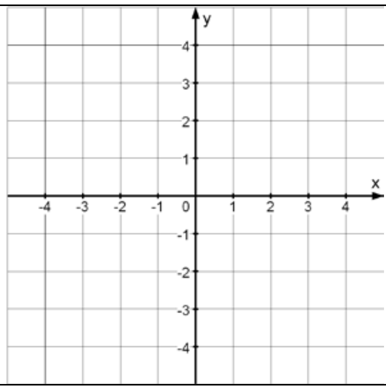
Inhalt	Medien	Kommentar
Einstieg: Es soll der Graph der Ableitungsfunktion zur Sinusfunktion skizziert werden. Mit dieser Aufgabe wird das Gelernte aus Kapitel 2 nochmals aufgegriffen. Dabei sollten die Schülerinnen und Schüler aufgefordert werden, die Steigungen an ausgezeichneten Stellen ohne TC-Unterstützung zu ermitteln. Die Ermittlung der Steigung in den Wendepunkten kann über die ‚Lupe’ motiviert werden.	SM 3.5 Aufg. 15 LM 3.2	Hier soll der Graph der Ableitung zunächst durch grafisches Differenzieren bestimmt werden.
Vertiefung: Die Gleichung der Ableitungsfunktion $f'(x)=\cos(x)$ kann als Grenzwert der Sekantensteigungsfunktion oder unter Verwendung des Ableitungsbefehls des TC verifiziert werden.	SM 3.5 Aufg. 15	Die Berechnung der Ableitung ergänzt das grafische Differenzieren.
Übungen: Ableitungen von Sinusfunktionen festigen den Umgang mit den Ableitungsregeln.	SM 3.5 und 3.6 Aufg. 16 - 18	

Ablauf der Stunde 7

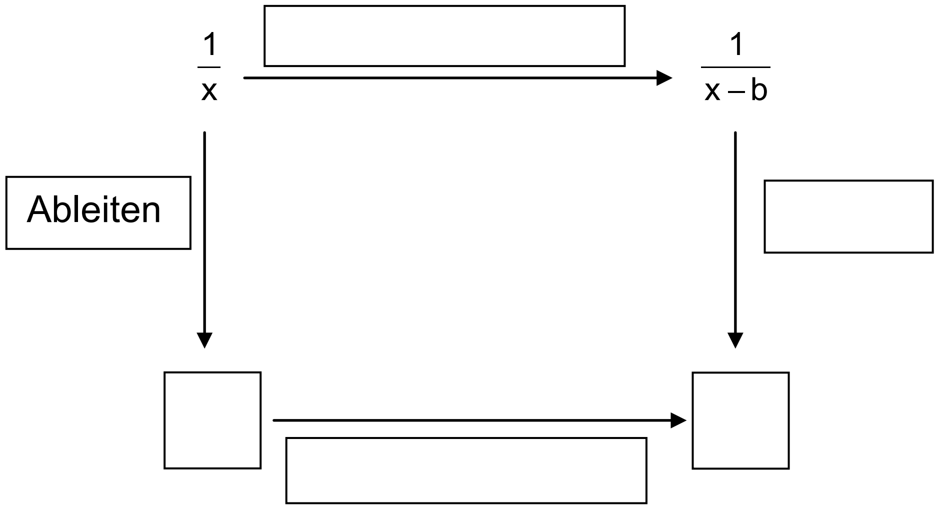
Inhalt	**Medien**	**Kommentar**
Einstieg: Anhand von Beispielen soll in der Sinusfunktion die Wirkung von Parametern auf die Ableitung grafisch gedeutet werden.  	SM 3.6 Aufg. 19	PA
Erarbeitung: Mithilfe der weiterführenden Aufgaben werden die Ableitungsfunktionen von f und g mit $f(x) = \sin(a \cdot x - b)$ bzw. $g(x) = \sin\left(a \cdot (x - b)\right)$ zunächst an Beispielen erarbeitet. Die Ergebnisse werden präsentiert und abschließend als die allgemeine Ableitungsfunktion der verschobenen und gestreckten Sinusfunktion im Plenum formuliert.	SM 3.6 Aufg. 20	PA
Sicherung/Übung: Die **Kettenregel mit linearer innerer Funktion** wird formuliert. Der Umgang sollte anhand einiger einfacher Terme geübt werden.	Wissens- speicher, Tafel	

LM 3.1 (Folienvorlage)

Graphen und Ableitungsgraphen

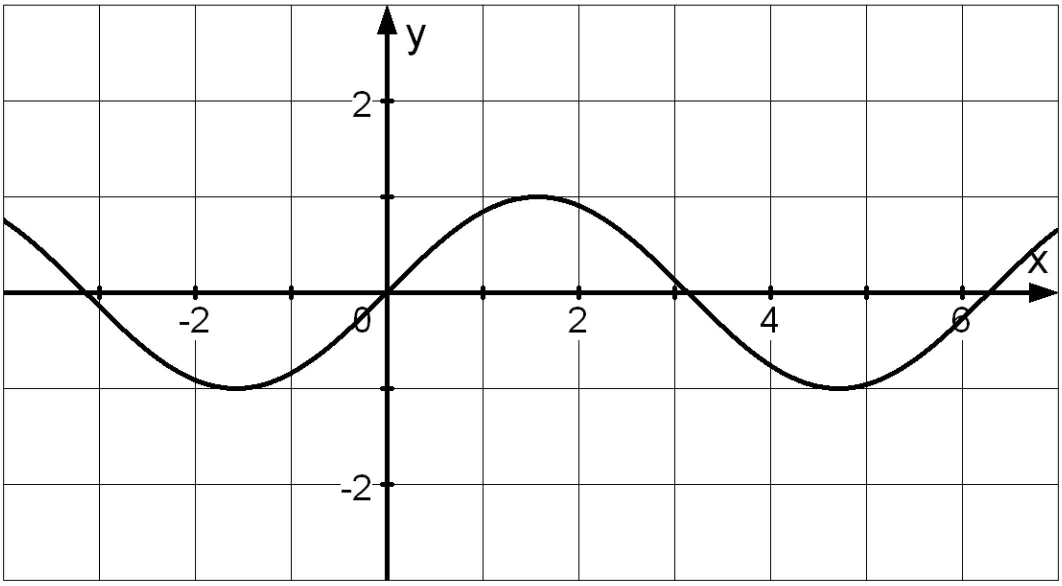
$f(x)=\frac{1}{x}$	$g(x)=\frac{1}{x+2}$	$h(x)=\frac{1}{x-1}$
		
		
f'(x)=	g'(x)=	h'(x)=

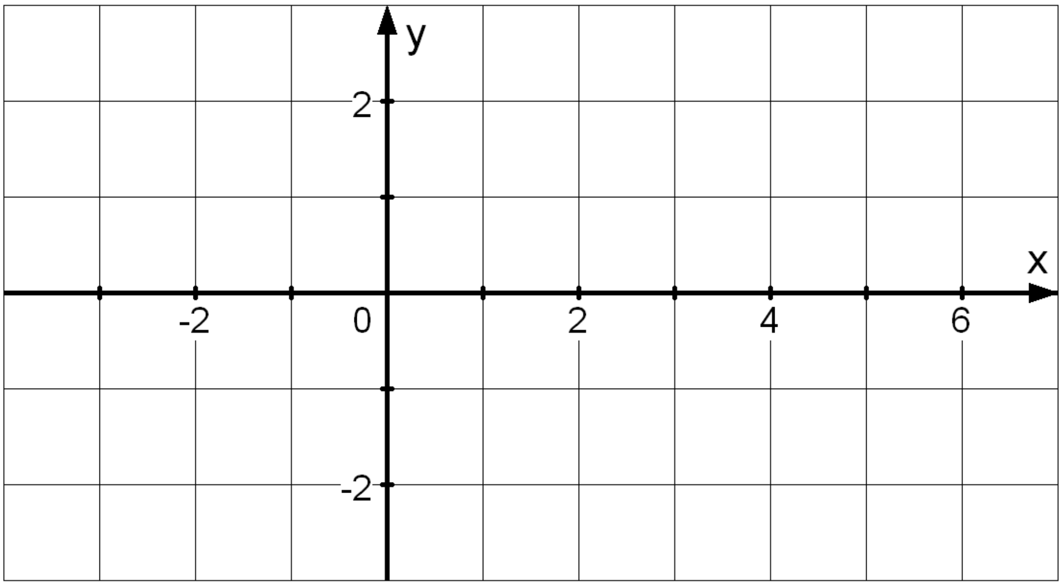
Ableitungsschema



LM 3.2 (Folienvorlage)

f(x) = sin(x)





f'(x) =

4. Wissensspeicher

Differenzenquotient

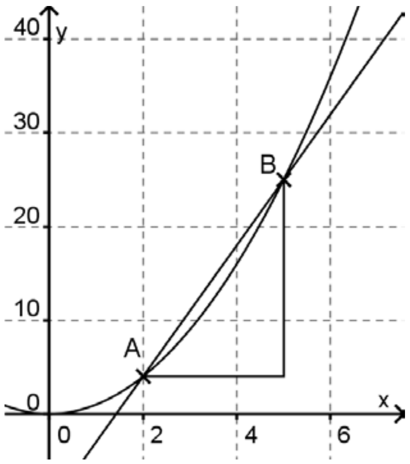
x	Y
0	0
2	4
5	25
7	49
8	64
9	81

1. Zwischen den x-Werten 2 und 5 ist die **Änderung** des y-Wertes $\Delta y = 25 - 4 = 21$.
2. Zwischen den x-Werten 2 und 5 ist die **mittlere Änderungsrate** oder der **Differenzenquotient:** $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{25-4}{5-2} = \frac{21}{3} = 7$

Wenn man das Änderungsverhalten untersucht, sagt die Änderungsrate in der Regel mehr aus als die Änderung, da sie auf das Intervall bezogen ist.
Beispiele:

Funktion	mittlere Änderungsrate
Zeit → Weg	Durchschnittsgeschwindigkeit
Weg → Höhe über NN	Durchschnittliche Steigung
Zeit → Körpergröße	Mittlere Wachstumsgeschwindigkeit

Sekante und Sekantensteigung



$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{25-4}{5-2} = \frac{21}{3} = 7$$

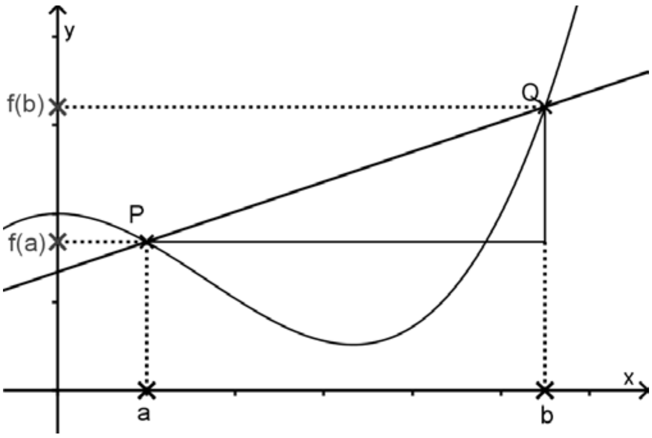
$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = 7$$

Markiert man auf einem Funktionsgraphen zwei Punkte A und B, dann heißt die Gerade durch die zwei Punkte **Sekante** des Graphen. Die mittlere Änderungsrate der Funktion zwischen A und B ist die Steigung dieser Geraden und heißt deshalb auch **Sekantensteigung.**

Änderungsverhalten einer Funktion

Man kann das Änderungsverhalten einer Funktion auf einem Intervall [a ; b] beschreiben:

1. mit der Differenz
   $\Delta y = f(b) - f(a)$.
   Dies ist die Differenz der Funktionswerte am Ende und am Anfang des Intervalls und damit die **absolute Änderung**.
2. mit dem Differenzenquotienten
   $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.
   Dies ist die **mittlere Änderungsrate** der Funktion im Intervall [a ; b].



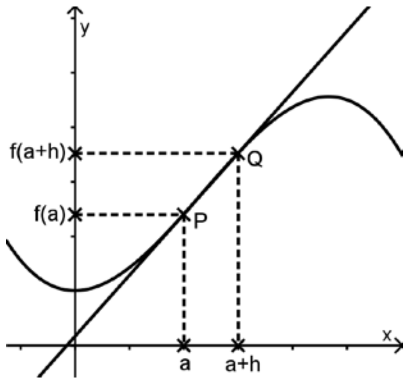
Geometrische Veranschaulichung

Der Differenzenquotient gibt die Steigung der Geraden durch die Punkte P und Q an. Die Steigung der Sekanten ist die mittlere Steigung des Graphen auf dem Intervall [a ; b]. Die Berechnung der Steigung erfolgt mit dem Steigungsdreieck.

h-Methode

Man kann das Änderungsverhalten einer Funktion an einer Stelle a näherungsweise bestimmen, indem man die durchschnittliche Änderung in einem sehr kleinen Intervall [a ; a+h] berechnet.
Für h setzt man sehr kleine Zahlen ein, z. B. h = 0,001.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$



Geometrische Veranschaulichung

Der Differenzenquotient gibt näherungsweise die Steigung der Geraden durch den Punkt P an, der sich die Sekanten durch die Punkte P und Q nähern, wenn der Punkt Q immer näher an Punkt P heranrückt.

Sekantensteigungsfunktion

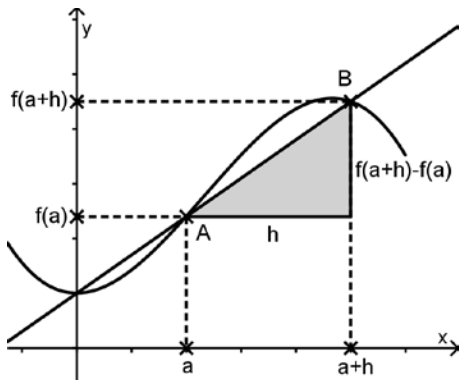
Das Berechnen der Änderungsrate einer Funktion an einer Stelle a lässt sich mithilfe des TC leicht durchführen. Die Änderungsrate hängt von der untersuchten Stelle a und dem Abstand h ab.

Wir definieren also die Sekantensteigungsfunktion ´msek´ durch $\text{msek}(a,h) = \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

Steht der Term der zu untersuchenden Funktion unter y1(x), definiert man das zugehörige Makro im Home-Fenster des TC folgendermaßen: $(y1(a+h)-y1(a))/h \rightarrow \text{msek}(a,h)$

Ableitung

mittlere Änderungsrate $\quad \text{msek}(a,h) = \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} \quad$ Sekantensteigung

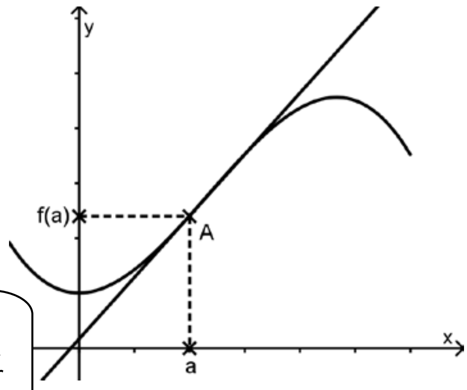


h → 0

lokale Änderungsrate $\quad f'(a) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} \quad$ Tangentensteigung

Für h=0 lässt sich eine Zahl ergänzen: f'(a), sprich: die Ableitung von f an der Stelle a.

Die Steigung des Graphen von f in A ist die Steigung der Tangente in A.



Zusammenhang Graph und Ableitungsgraph

Wenn der Graph einer Funktion in einem seiner Abschnitte nur steigt (Steigung ist positiv), dann verläuft der zugehörige Teil des Ableitungsgraphen in diesem Abschnitt immer oberhalb der x-Achse.
Wenn der Graph einer Funktion in einem seiner Abschnitte nur fällt (Steigung ist negativ), dann verläuft der zugehörige Teil des Ableitungsgraphen in diesem Abschnitt immer unterhalb der x-Achse.

Interpretationen der Ableitung

Bedeutet f…	**dann bedeutet f'…**	**und ein Extrempunkt des Graphen…**	**und ein Extrempunkt des Graphen der Ableitungs-funktion…**
der y-Wert eines Punktes P auf dem Graphen von f	die Steigung des Graphen von f in die-sem Punkt P	ein Punkt mit waagerechter Tangente	das Vorliegen lokal größter/ kleinster Steigung
der vom Start in der Zeit x zurückgelegte Weg	die Geschwindigkeit zur Zeit x	ggf. der vom Ausgangs-punkt erreichte Punkt mit der größten Entfernung	maximale/minimale Ge-schwindigkeit in einer zeitli-chen Umgebung
die zur Zeit x erreichte Geschwindigkeit	die Beschleunigung zur Zeit x	Zeitpunkt der größten/ kleinsten Geschwindigkeit	Zeitpunkt der größten/ kleinsten Beschleunigung in einer zeitlichen Umgebung.
das Volumen eines Kör-pers bis zur Höhe x	die Querschnittsflä-che des Körpers in dieser Höhe x	wegen der Monotonie nicht vorhanden	Höhen mit besonders großer/ kleiner Querschnittsfläche
das Volumen in einem Behälter zur Zeit x	die Zufluss- bzw. Ab-flussgeschwindigkeit zur Zeit x	Zeitpunkt mit besonders großer/geringer Befüllung.	Zeitpunkte mit extremer Zu- bzw. Abflussgeschwindigkeit

Wichtige Ableitungsregeln

in Worten	**Formel und Beispiel**	**grafisch interpretiert**
Ableiten von Potenzfunktionen Der Exponent wird als Faktor vor den Ableitungsterm gestellt, der Exponent verringert sich um 1.	$f(x)=x^n \to f'(x)=n\cdot x^{n-1}$ Beispiel: $f(x)=x^7 \to f'(x)=7\cdot x^6$	
Ableiten der Sinusfunktion	$f(x)=\sin(x) \to f'(x)=\cos(x)$ $f(x)=\cos(x) \to f'(x)=-\sin(x)$ (Argument im Bogenmaß!)	
Ein **konstanter Summand** fällt beim Ableiten weg.	$f(x)=g(x)+c \to f'(x)=g'(x)$ Beispiel: $f(x)=x^4+5 \to f'(x)=4x^3$	Wird der Graph einer Funktion nach oben oder unten verschoben, so bleibt seine Steigung an jeder Stelle gleich.
Faktorregel Ein konstanter Faktor bleibt beim Ableiten erhalten.	$f(x)=a\cdot g(x) \to f'(x)=a\cdot g'(x)$ Beispiel: $f(x)=7\cdot x^5 \to$ $f'(x)=5\cdot 7\cdot x^4 = 35\cdot x^4$	Wird der Graph einer Funktion mit dem Faktor a gestreckt (gestaucht), so wird seine Steigung an jeder Stelle mit dem Faktor a multipliziert.
Summenregel Eine Summe von zwei Funktio-nen hat als Ableitung die Summe der beiden Ableitungen.	$f(x)=g(x)+h(x) \to$ $f'(x)=g'(x)+h'(x)$ Beispiel: $f(x)=x^3+x^4 \to f'(x)=3x^2+4x^3$	Werden zwei Funktionen addiert, so addieren sich an jeder Stelle nicht nur die Funktionswerte, son-dern auch die Steigungen.
Kettenregel mit linearer innerer Funktion	$f(x)=g(a\cdot x+b) \to$ $f'(x)=a\cdot g'(a\cdot x+b)$ Beispiel: $f(x)=\sin(3x+2) \to$ $f'(x)=3\cdot\cos(3x+2)$	

5. Selbsteinschätzung

Schätze deine Kenntnisse ein und mache ein Kreuz in der entsprechenden Spalte.

Ich kann	**ich bin sicher**	**ich muss noch üben**	**ich brauche Hilfe**
• das Änderungsverhalten von Situationen und Vorgängen anhand ihrer Funktionsgraphen qualitativ beschreiben.			
• zu einer verbalen Beschreibung eines Änderungsverhaltens einen möglichen Graphen zeichnen. *Das Wachstum verlangsamt sich.*			
• anhand eines Graphen oder einer Tabelle die mittleren Änderungsraten in angegebenen Teilabschnitten berechnen.			
• die inhaltliche Bedeutung der mittleren Änderungsrate in konkreten Sachzusammenhängen angeben. *Weg-Zeit-Diagramm → mittlere Geschwindigkeit*			
• in einem Funktionsgraphen zu gegebenen Punkten die Sekantensteigung berechnen.			
• die inhaltliche Bedeutung der lokalen Änderungsrate in konkreten Sachzusammenhängen angeben. *Weg-Zeit-Diagramm → Momentangeschwindigkeit*			
• die lokale Änderungsrate und die Tangentensteigung für beliebige Funktionen näherungsweise bestimmen.			
• Hoch-, Tief- und Wendepunkte eines Graphen markieren			
• zu einem gegebenen Graphen einen Ableitungsgraphen skizzieren			
• zu einem gegebenen Ableitungsgraphen einen zugehörigen Ausgangsgraphen skizzieren.			
• die Ableitungsregeln für Potenzfunktion und Sinusfunktion angeben und anwenden.			
• verknüpfte/verkettete Funktionen mithilfe der Summen- und Faktorregel und der ‚Kettenregel mit linearer innerer Funktion' ableiten. $f(x)=3x^4+\frac{1}{2}x^2-2x;\ g(x)=\frac{1}{3x};\ h(x)=\frac{3}{5x+4}$			
• den TC-Befehl d(f(x),x) für die Ermittlung von Ableitungsfunktionen nutzen.			
• die lokale Änderungsrate und die Tangentensteigung an vorgegebenen Stellen für ganzrationale Funktionen bestimmen.			

6. Lernprotokoll

Lernprotokoll 1 – Änderungsraten und Ableitungsfunktionen

Im Lernprotokoll soll in kurzer schriftlicher Form das wesentlich Neue der vergangenen Stunde festgehalten werden. Somit dient es jedem Einzelnen zur Kontrolle seines eigenen Lernzuwachses.
Beantworte dazu folgende Fragen:

1. Pegelstände eines Flusses

Uhrzeit	6 Uhr	8 Uhr	9 Uhr	12 Uhr	16 Uhr
Pegelstand (in m)	2,0	2,2	2,4	3,3	

Erläutere an diesem Beispiel den Unterschied zwischen absoluter Änderung, mittlerer und lokaler Änderungsrate.

2. Der Graph zeigt die zeitliche Entwicklung eines Fruchtfliegenbestands.
   (i) Erläutere an diesem Beispiel die inhaltliche Bedeutung von mittlerer und lokaler Änderungsrate.
   (ii) Skizziere den Graphen der Änderungsrate des Bestands.

3. Erläutere an einem Beispiel eines Funktionsgraphen anschaulich, wie man von der mittleren Änderungsrate zur absoluten Änderungsrate gelangt.

4. Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = x^2 - 3 \cdot x$ und A(1 | -2) und B(4 | 4) sind Punkte des Graphen.
   (i) Berechne die Sekantensteigung zwischen den Punkten A und B.
   (ii) Erläutere die Bedeutung des Terms msek(1,h):
   (iii) Erläutere, wie man von msek(1,h) zur Ableitung von f im Punkt A gelangt und berechne f´(a).

5. Erläutere am Beispiel einer Geraden die Berechnung der Steigung.
   Zeige, warum diese Berechnung für das Änderungsverhalten in den Sachzusammenhängen dieser Unterrichtseinheit nicht ausreicht.

Lernprotokoll 2 – Zusammenhang Graph und Ableitungsgraph

Im Lernprotokoll soll in kurzer schriftlicher Form das wesentlich Neue der vergangenen Stunde festgehalten werden. Somit dient es jedem Einzelnen zur Kontrolle seines eigenen Lernzuwachses.
Beantworte dazu folgende Fragen:

1. Welche Steigung hat ein Graph an seinen Hoch- und Tiefpunkten?
2. Gib an, woran man den Wendepunkt eines Graphen erkennt.
3. Beschreibe, wie man an einem Ableitungsgraphen ablesen kann, dass der Ausgangsgraph einen Wendepunkt besitzt.
4. Wenn der Ableitungsgraph an einer Stelle einen Hochpunkt (Tiefpunkt) besitzt, was bedeutet das für den Ausgangsgraphen an dieser Stelle?
5. Wenn der Ableitungsgraph eine Gerade mit positiver (negativer) Steigung ist, was bedeutet das für den Ausgangsgraphen?
6. Wenn der Ableitungsgraph die Normalparabel ist, was bedeutet das für den Ausgangsgraphen?

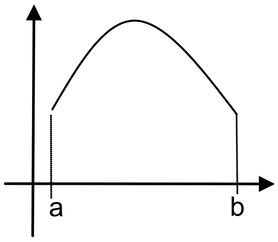
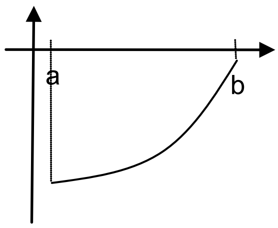
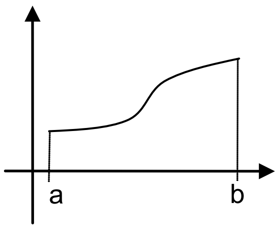
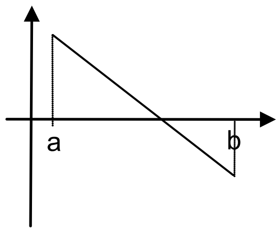
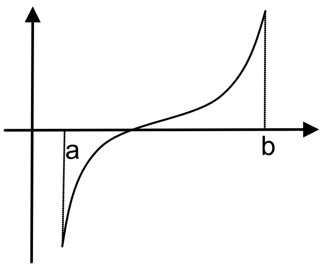
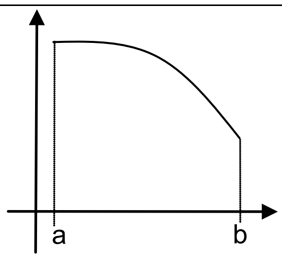
7. Kopfübungen

1.	Welche Flächengröße hat ein Kreis mit r = 5 cm ungefähr? Gib die Formel zur Berechnung an.	1.	Gib folgende Winkelgrößen im Bogenmaß an: $\alpha = 45°$
2.	Wie viele Nullstellen hat der Graph der Funktion f mit $f(x) = (x-4)^2 - 3$?	2.	Vereinfache: $b^{c+3} \cdot b^{2c}$
3.	Bestimme die Lösungsmenge der Gleichung $(2x+5) \cdot (x^2 - 25) = 0$.	3.	Setze um zwei Folgenglieder fort und gib die Iterationsvorschrift an: 1, 3, 6, 10, 15, …
4.	Ordne nach der Größe: sin(30°), sin(80°), sin(140°)	4.	Die Bevölkerung eines Staates wächst ab 2008 jährlich um 2,7 %. Gib, konstantes Wachstum vorausgesetzt, eine Formel zur Berechnung der Bevölkerungszahl im Jahr 2050 an.
5.	Vereinfache: $u^4 \cdot u \cdot u^{-7}$	5.	sin(50°) = 0,766. Gib zwei weitere Winkel mit gleichem Sinuswert an.
6.	Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = x^3 + 4$. Bestimme zwei Punkte, die auf dem Graphen von f liegen.	6.	Der Kaufpreis hat sich um 20 % gesenkt und beträgt jetzt 96 €. Wie hoch war der ursprüngliche Preis?
7.	Berechne die ersten 3 Folgenglieder, wenn gilt: a(0) = 3, a(n)= a(n-1) + 2	7.	Vergleiche einen Kreis mit r = 3 cm und ein Quadrat mit a = 6 cm. Welcher Umfang ist größer?
8.	Ein Kredit von 160.000 € wird zu einem Zinssatz von 6 % gewährt. Berechne die Höhe der Zinsen.	8.	Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, aus einem Skatblatt durch Ziehen ohne Zurücklegen zwei Asse zu ziehen?
9.	Löse: $3 \cdot 2^x = 192$	9.	Ein Zylinder hat einen Radius von 30 cm und ist 40 cm hoch. Gib die Formel zur Berechnung der Zylinderoberfläche an.
10.	Schreibe als Summe: $(2x-7)^2 =$	10.	Bestimme die Nullstellen der Funktion f mit $f(x) = x^2 + 8x + 16$

8. Rechnerfreie Aufgaben

Aufgabe 1

Ordne den folgenden Graphen die zugehörigen Eigenschaften aus a) – n) zu. Es sind auch mehrfache Zuordnungen sinnvoll.

Graph	Eigenschaften	Graph	Eigenschaften
I 		IV 	
II 		V 	
III 		VI 	

Die Funktion …

a) ist **steigend**.
b) ist **fallend**.
c) ist **konstant**.
d) **fällt linear**.
e) **steigt linear**.

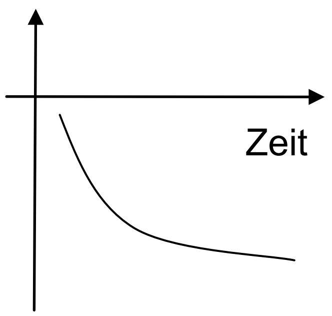
f) **steigt immer stärker**.
g) **steigt immer schwächer**.
h) **fällt immer stärker**.
i) **fällt immer schwächer**.

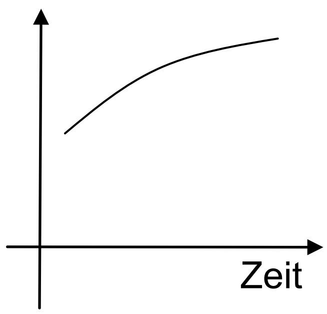
j) ist erst **immer schwächer steigend**, dann **immer stärker fallend**.
k) ist erst **immer stärker steigend**, dann **immer schwächer steigend**.
l) ist erst **immer stärker fallend**, dann **immer schwächer fallend**.
m) ist erst **immer schwächer fallend**, dann **immer stärker fallend**.
n) ist erst **immer schwächer steigend**, dann **immer stärker steigend**.

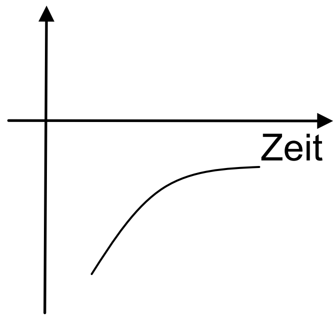
Aufgabe 2

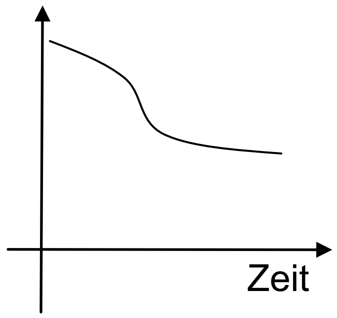
Ordne den Aussagen den entsprechenden Graphen zu. Zu jeder Aussage gibt es nur einen passenden Graphen!
Die Maßeinheit der y-Achse steht in eckigen Klammern hinter den Aussagen.

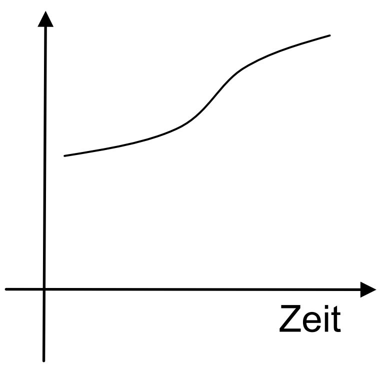
Aussagen:	Graph:
Die Erdbevölkerung wächst langsamer. [*Anzahl der Menschen*]	
Zahl der Bundesbürger nimmt langsamer ab. [*Anzahl der Bundesbürger*]	
Der Anstieg der Arbeitslosenzahlen hat sich seit der Wahl verlangsamt, während er sich in den Jahren davor immer beschleunigt hat. [*Anzahl der Arbeitslosen*]	
Die Schulden des Unternehmens steigen langsamer. [*Kontostand in €*]	

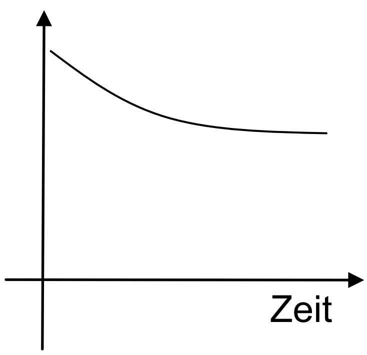
a)


b)


c)


d)


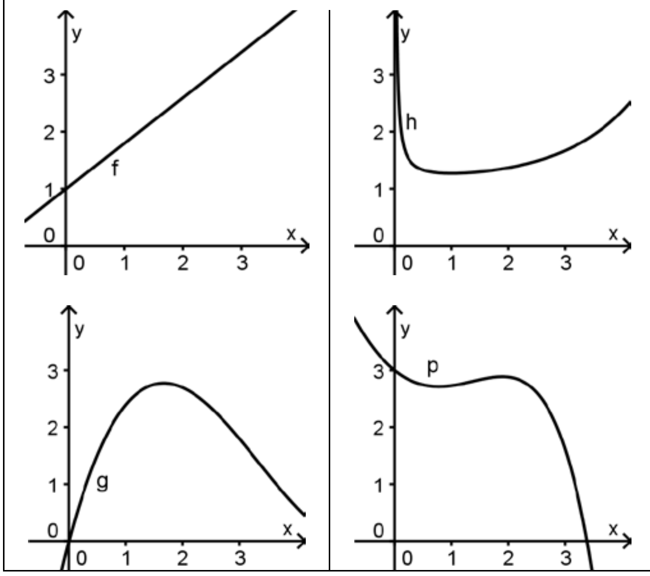
e)


f)


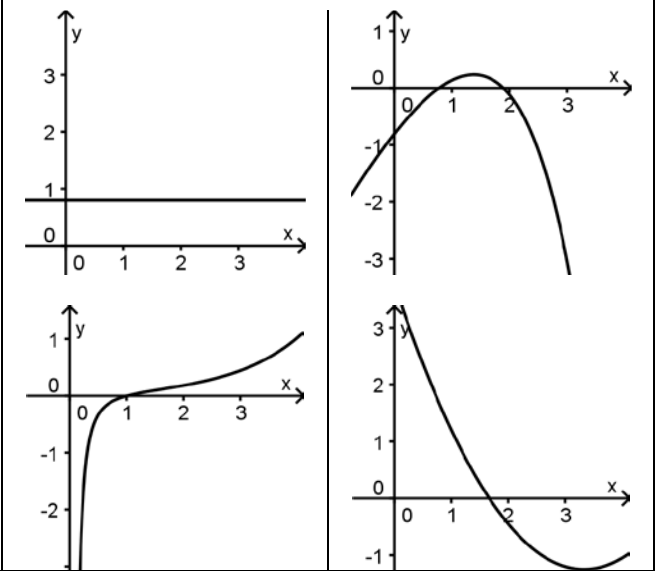
Aufgabe 3

Ordne den Graphen der Funktion und die zugehörige Ableitungsfunktion zu.
Begründe jeweils, warum der Graph passt und warum er zu keiner der anderen Funktionen gehören kann.

Graphen der Funktionen



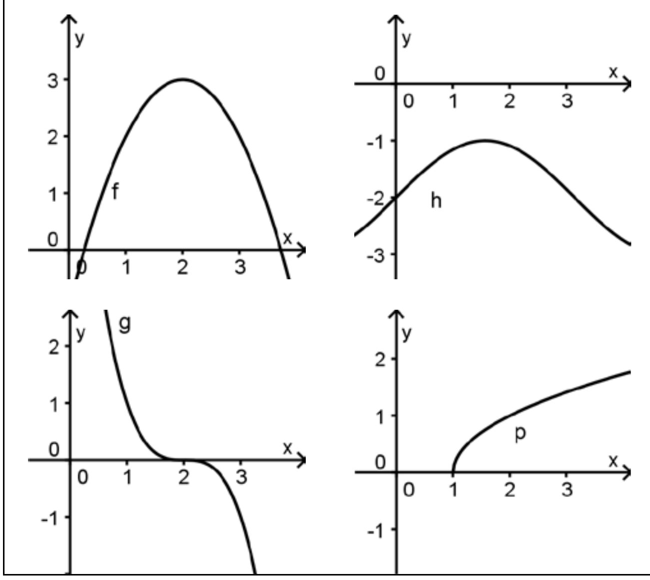
Graphen der Ableitungsfunktionen



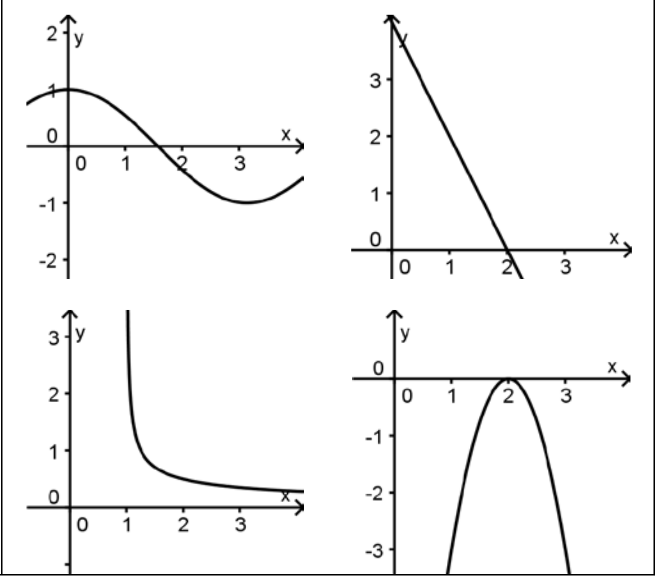
Aufgabe 4

Ordne den Graphen der Funktion und die zugehörige Ableitungsfunktion zu.
Begründe jeweils, warum der Graph passt und warum er zu keiner der anderen Funktionen gehören kann.

Graphen der Funktionen



Graphen der Ableitungsfunktionen



9. Klassenarbeitsaufgaben

Aufgabe 1

Bei einer Radtour wurde jede Stunde der Kilometerstand des Tachometers notiert. Insgesamt wurden also 48 km zurückgelegt.

t in h	s in km
0	0
1	8
2	26
3	30
4	40
5	48

a) Berechne die Durchschnittsgeschwindigkeiten der gesamten Tour und für jede Stunde einzeln.
b) Skizziere das Diagramm für die Funktion Zeit → Weg unter der Annahme, dass die Radler jeweils eine Stunde konstant mit der jeweiligen Durchschnittsgeschwindigkeit fahren.
c) Die Annahme in b ist nicht ganz realistisch. Skizziere in dieses Koordinatensystem einen realistischen Verlauf der Tour.
d) Gibt es Zeitpunkte, zu denen die Geschwindigkeit oberhalb der größten Durchschnittsgeschwindigkeit liegt? Gib diese an und begründe kurz.

Aufgabe 2

Zu untersuchen ist die Funktion mit der Gleichung $f(x) = x^3 - 2 \cdot x^2$.

a) Berechne nur mithilfe der Gleichung die Sekantensteigung für die Intervalle [-1;1] und [1;3].
b) Gib ein Intervall an, in dem die Sekantensteigung m=0 ist.
c) Beschreibe kurz, wie man zur lokalen Änderungsrate an der Stelle x = 3 gelangt, und gib den exakten oder einen guten Näherungswert an.

Aufgabe 3

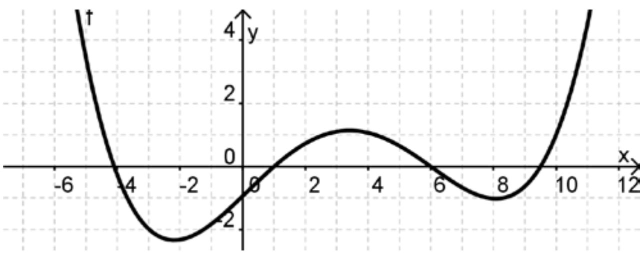
In der Zeitung liest man öfter Äußerungen, wie die folgenden (zum Beispiel im Hinblick auf Umsatzentwicklung):

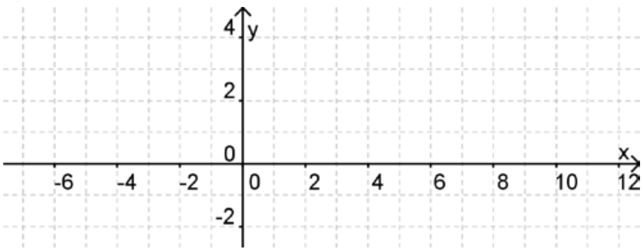
I) Die Talfahrt ist gebremst **II) Der Aufschwung gewinnt an Fahrt**

a) Skizziere den Graphen für den Bestand (etwa den Unternehmensumsatz in Abhängigkeit von der Zeit).
b) Beschreibe, wie sich die Änderungsrate entwickelt.

Aufgabe 4

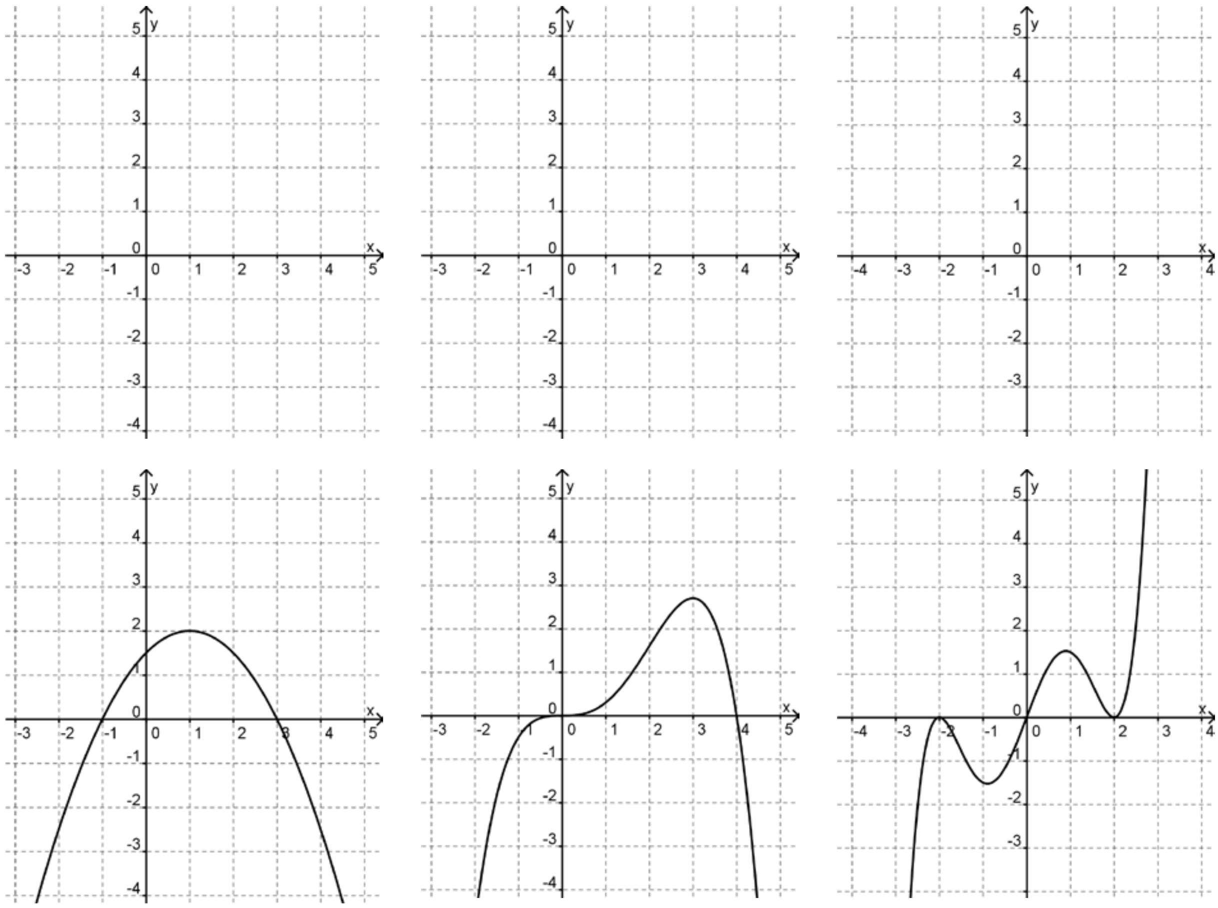
Skizziere den Graphen der zugehörigen Ableitungsfunktion f‘ für -4 < x <10.





Aufgabe 5

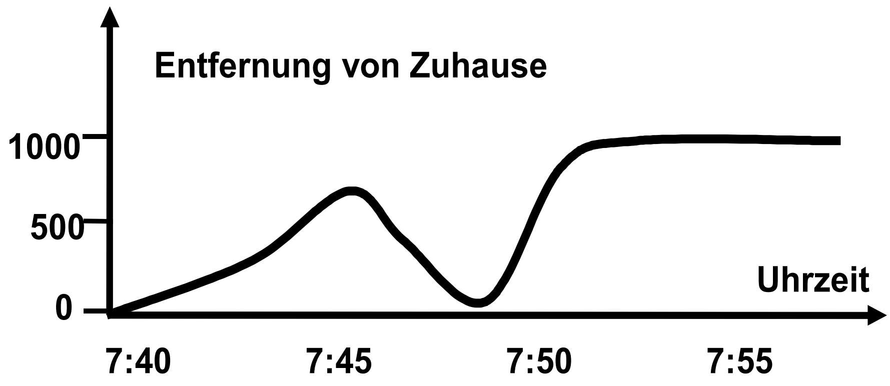
Skizziere den Graphen einer Funktion f, die den abgebildeten Graphen darunter als Graph der Ableitungsfunktion f‘ hat.



Aufgabe 6

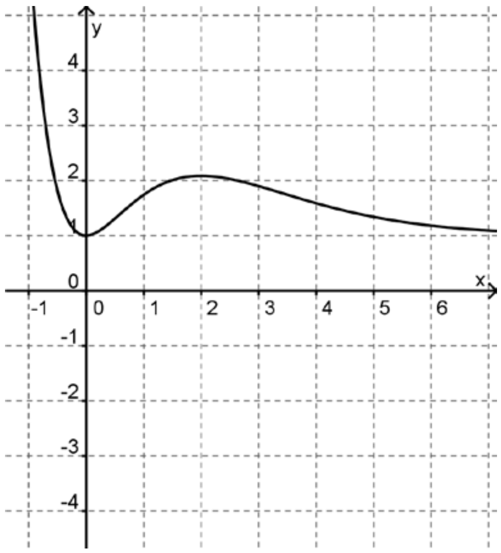
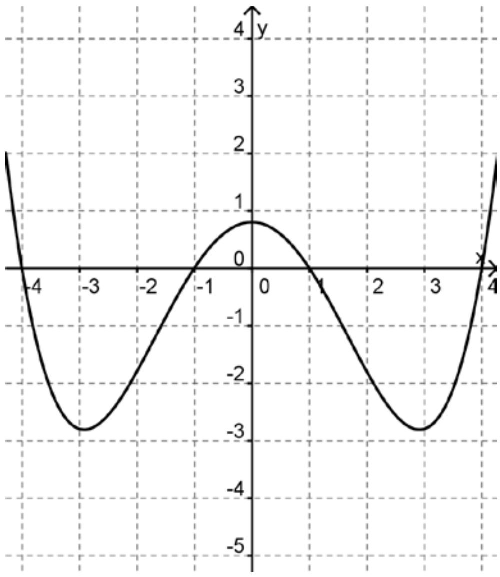
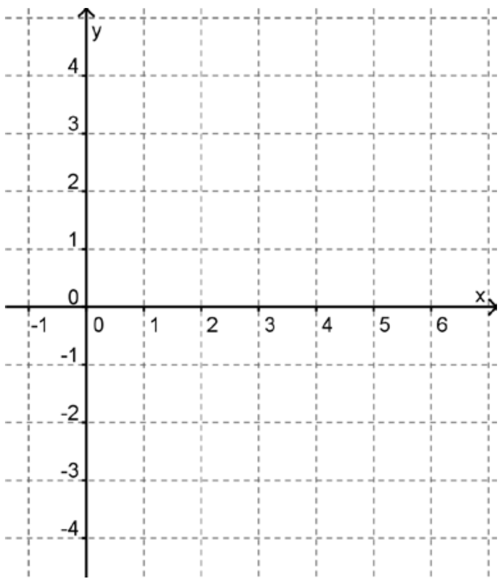
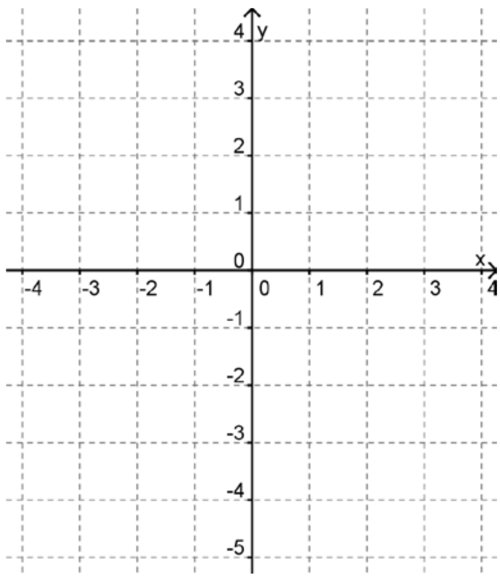
Der folgende Graph beschreibt den Schulweg von Giovanni. Die Hochachse gibt die Entfernung in Metern an.

a) Entnimm dem Graphen Informationen über den Schulweg.
b) Skizziere den zugehörigen Graphen der lokalen Änderungsrate und beschreibe die Zusammenhänge zum Ausgangsgraphen.



Aufgabe 7

Gegeben ist der Graph einer Funktion f. Skizziere den Graphen der Ableitungsfunktion f‘.

Aufgabe 8

a) Bestimme jeweils die Ableitung unter Angabe der Zwischenschritte und Ableitungsregeln:

$f(x) = 3x^5 - 2x$ $\qquad g(x) = \dfrac{1}{x^4}$ $\qquad h(x) = \dfrac{3}{(x+7)^2}$.

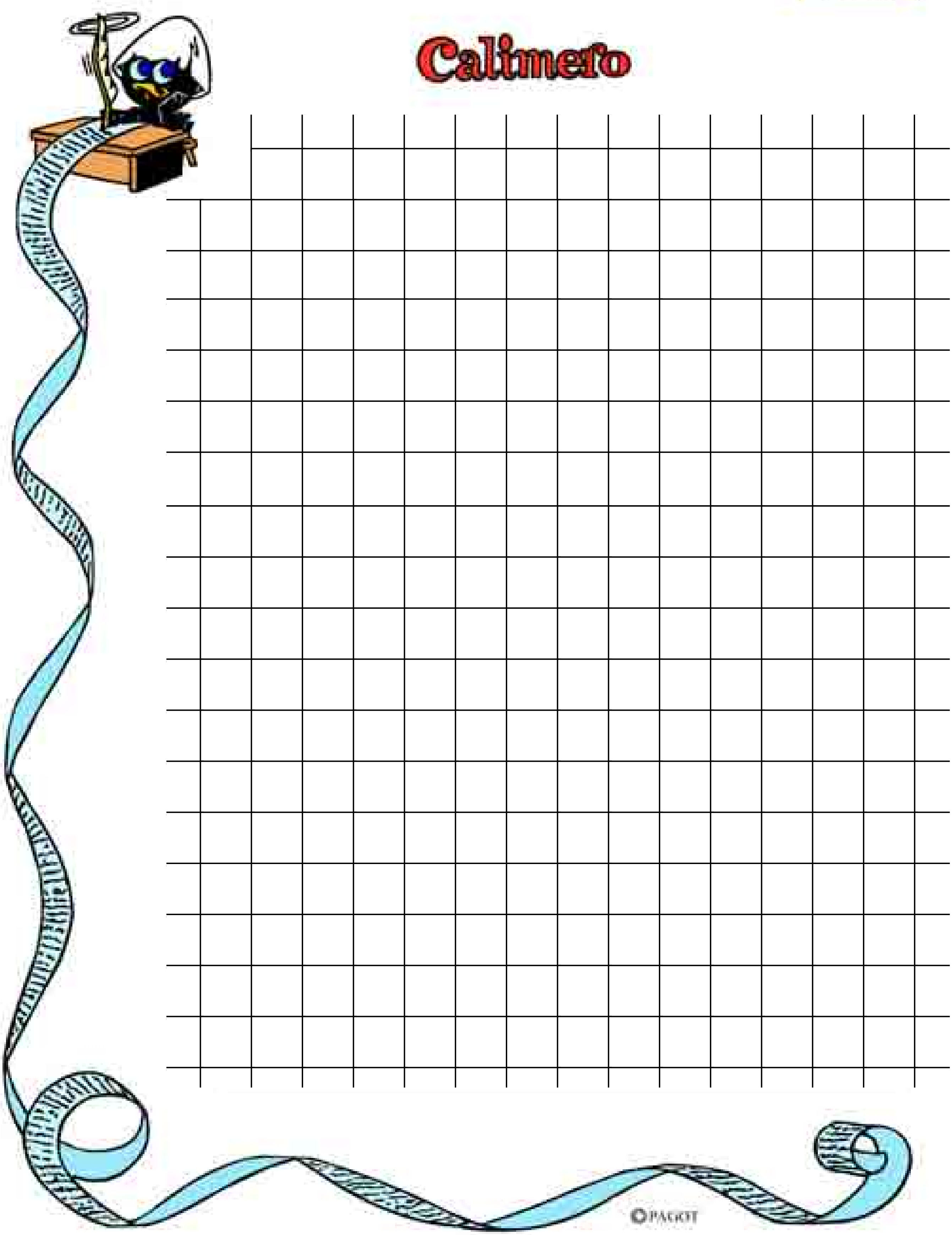
b) a sei eine beliebige reelle Konstante. Gib jeweils die Ableitung der Funktionen f, g und h an. Erläutere die Auswirkung des Parameters a auf den graphischen Verlauf von g und h im Vergleich zum Graphen von f und die durch a bewirkte Änderung bei den Ableitungen g’ und h’ im Vergleich zu f’.

$f(x) = x^5$ $\qquad g(x) = x^5 + a$ $\qquad h(x) = (x+a)^5$

c) Gegeben sind zwei Ableitungen. Gib jeweils einen Term der Ausgangsfunktionen f und g an.

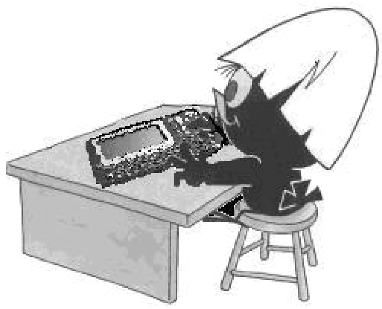
$f'(x) = 2x + 6x^2$ $\qquad g'(x) = \cos(x)$

Katrin hat in beiden Fällen einen anderen Term als Du gefunden. Nimm Stellung.


Calimero
©PAGOT

C A l i M E R O

Computer-Algebra im Mathematikunterricht
Entdecken, Rechnen, Organisieren

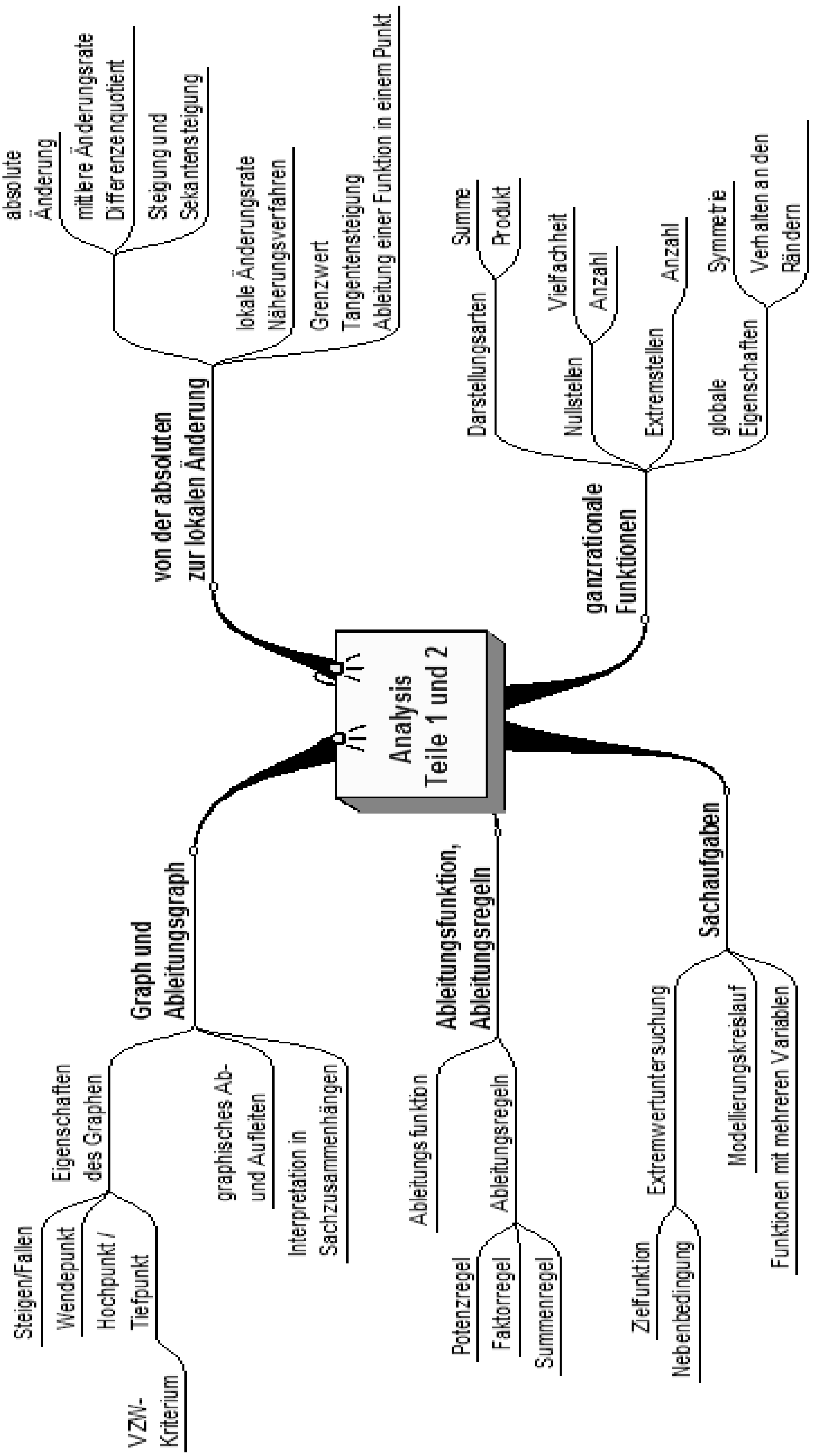


Ganzrationale Funktionen

L e h r e r m a t e r i a l i e n

Überblick über den Unterrichtsverlauf

Mind Map


Analysis Teile 1 und 2
von der absoluten zur lokalen Änderung
absolute Änderung
mittlere Änderungsrate
Differenzenquotient
Steigung und Sekantensteigung
lokale Änderungsrate
Näherungsverfahren
Grenzwert
Tangentensteigung
Ableitung einer Funktion in einem Punkt
ganzrationale Funktionen
Darstellungsarten
Summe
Produkt
Nullstellen
Vielfachheit
Anzahl
Extremstellen
Anzahl
globale Eigenschaften
Symmetrie
Verhalten an den Rändern
Graph und Ableitungsgraph
Eigenschaften des Graphen
Steigen/Fallen
Wendepunkt
Hochpunkt / Tiefpunkt
VZW-Kriterium
graphisches Ab- und Aufleiten
Interpretation in Sachzusammenhängen
Ableitungsfunktion, Ableitungsregeln
Ableitungsfunktion
Ableitungsregeln
Potenzregel
Faktorregel
Summenregel
Sachaufgaben
Extremwertuntersuchung
Zielfunktion
Nebenbedingung
Modellierungskreislauf
Funktionen mit mehreren Variablen

Prozessbezogene Kompetenzen

Anhand dieses Unterrichtsmaterials können bei entsprechender methodischer Umsetzung folgende prozessbezogenen Kompetenzen des Kerncurriculums von den Schülerinnen und Schülern schwerpunktmäßig erworben werden:

Mathematisch argumentieren	Probleme mathematisch lösen	Mathematisch modellieren	Mathematische Darstellungen verwenden	Mit symbolischen, formalen, …	kommunizieren
erläutern präzise mathematische Zusammenhänge und Einsichten unter Verwendung der Fachsprache kombinieren mathematisches Wissen für Begründungen und Argumentationsketten und nutzen dabei auch formale und symbolische Elemente und Verfahren geben Begründungen an, überprüfen und bewerten diese	wählen geeignete heuristische Strategien zum Problemlösen und wenden diese an nutzen mittlere und lokale Änderungsrate zur Problemlösung	wählen, variieren und verknüpfen Modelle zur Beschreibung von Realsituationen analysieren und bewerten verschiedene Modelle im Hinblick auf die Realsituation		nutzen Tabellen, Graphen, Terme und Gleichungen zur Bearbeitung funktionaler Zusammenhänge formen Terme um, ggf. auch mit einem Computer-Algebra-System nutzen ein CAS-System zur Darstellung und Erkundung mathematischer Zusammenhänge sowie zur Bestimmung von Ergebnissen	teilen ihre Überlegungen anderen verständlich mit, wobei sie vornehmlich die Fachsprache nutzen präsentieren Problembearbeitungen, auch unter Verwendung geeigneter Medien verstehen Überlegungen von anderen zu mathematischen Inhalten, prüfen diese auf Schlüssigkeit und Vollständigkeit und gehen darauf ein beurteilen und bewerten die Arbeit im Team und entwickeln diese weiter

Inhaltsbezogene Kompetenzen

Mit diesem Unterrichtsmaterial werden folgende inhaltsbezogenen Kompetenzen vermittelt:

Zahlen und Operationen	Größen und Messen	Raum und Form	funktionaler Zusammenhang	Daten und Zufall
			• identifizieren und klassifizieren Funktionen in Tabellen, Termen, Gleichungen und Graphen • stellen Funktionen durch Terme und Gleichungen dar und wechseln zwischen den Darstellungen Term, Gleichung, Tabelle, Graph • modellieren Sachsituationen durch Funktionen • wenden die Eigenschaften von Funktionen auch unter Verwendung des eingeführten Taschenrechners zur Lösung von Problemen an und bewerten die Lösungen • bestimmen die Funktionsgleichung aus dem Graphen • entwickeln Graphen und Ableitungsgraphen auseinander, beschreiben und begründen Zusammenhänge und interpretieren diese in Sachzusammenhängen • bestimmen die Ableitungsfunktion von ganzrationalen Funktionen bis 4. Grades • wenden die Summen- und Faktorregel zur Berechnung von Ableitungsfunktionen an • lösen mit der Ableitung von ganzrationalen Funktionen Sachprobleme, insbesondere Optimierungsprobleme, auch unter Verwendung des eingeführten Taschenrechners • untersuchen Funktionen und ihre Graphen unter Verwendung der Ableitung, auch unter Verwendung des eingeführten Taschenrechners	

Hinweise zu rechnerspezifischen und rechnerfreien Fertigkeiten

Rechnerfreie Fertigkeiten

Obwohl die Einheit ‚Ganzrationale Funktionen' mit Verwendung des TC als Werkzeug unterrichtet wird, sollen bestimmte Fähigkeiten von den Schülerinnen und Schülern auch rechnerfrei erworben und beherrscht werden. Diese Fertigkeiten sollen in Klassenarbeiten oder in Kurztests nachgewiesen bzw. abgeprüft werden. Folgende rechnerfreie Fertigkeiten erscheinen uns relevant:
Die Schülerinnen und Schüler sollen

1. Achsensymmetrie zur y-Achse und Punktsymmetrie zum Ursprung erkennen.
2. die maximale Anzahl von Nullstellen, Extrempunkten und Wendepunkten angeben können.
3. bei einem faktorisierten Funktionsterm die Nullstellen der Funktion und deren Vielfachheit angeben können.
4. den Zusammenhang zwischen Vielfachheit einer Nullstelle und dem Verlauf des Graphen in der Umgebung dieser Nullstelle beschreiben können.
5. in einfachen Fällen die Linearfaktorzerlegung durchführen können.

CAS-Fertigkeiten

Im Umgang mit dem TC sollen die Schüler am Ende der Einheit über folgende Fertigkeiten verfügen:

1. mit dem ‚factor'-Befehl die Linearfaktorzerlegung geeigneter Funktionen durchführen können.
2. für gegebene Funktionen mithilfe des Ableitungsbefehls und des ‚Solve'-Befehls Kandidaten für Extremstellen bestimmen können.

Thema 1.0: Untersuchung ganzrationaler Funktionen – Motivation	**Dauer:** 1 Stunde
Zwei Anwendungsbeispiele sollen als Einführung verdeutlichen, wie man Optimierungsprobleme mit ganzrationalen Funktionen modellieren und durch Extremwertbestimmung lösen kann.	
Besondere Materialien/Technologie: SM 1.1	

Ablauf der Stunde 1

Inhalt	**Medien**	**Kommentar**
Einstieg: Lehrerinformation: Ziel der folgenden UE: Man kann mit den neu erworbenen Analysiskenntnissen Optimierungsprobleme lösen. Dazu ein (zwei) Beispiel(e)	SM 1.1 Aufg.1, 2	
Erarbeitung: Aufgabe ‚Schachtel' experimentell und theoretisch. Ergebnissicherung präsentiert die Extremwertbestimmung grafisch, tabellarisch und rechnerisch mit der Ableitung. Je nach Zeitbedarf auch die Aufgabe ‚Tischplatte' bearbeiten.		Für Aufg.1 Blätter aus A4-Format zuschneiden. Erarbeitung Aufg.1 in Partnerarbeit.
Sicherung: Wenn man einen geeigneten Funktionsterm aufstellen kann, der das Optimierungsproblem beschreibt, kann man das Problem durch Extremwertbestimmung der Funktion (grafisch, tabellarisch oder rechnerisch) lösen.		

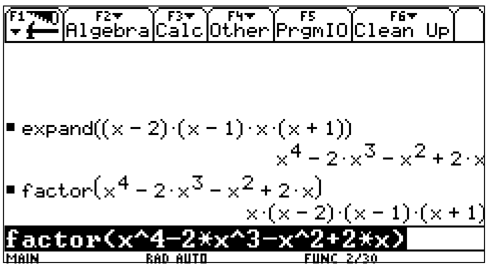
Thema 1.1: **Untersuchung ganzrationaler Funktionen – Nullstellen und globales Verhalten**	**Dauer:** 5 Stunden
Anhand der Produkte linearer Funktionsterme wird der Begriff der ganzrationalen Funktion eingeführt. Die Darstellungen als Produkt und als Summe werden aufgezeigt. Aus der Produktdarstellung heraus werden Aussagen über die Vielfachheit und die Anzahl der Nullstellen abgeleitet. Das Vorgehen ist dabei rein innermathematisch. Zur Betonung der Relevanz dieser Funktionengruppe kann eine Information durch den Lehrer darüber erfolgen, dass ganzrationale Funktionen wegen ihrer besonders guten Berechenbarkeit und der guten Anpassungsmöglichkeiten für ihre Eigenschaften besonders für Modellierungen geeignet sind, die dann im Kapitel 2 erfolgen.	
Besondere Materialien/Technologie: SM 1.2 bis SM 1.12 SM 2.1 bis SM 2.3 aus der vorherigen Einheit (Änderungsraten und Ableitungsfunktionen) Schreibfolien	

Ablauf der Stunde 2

Inhalt	**Medien**	**Kommentar**
Einstieg: Aufgabe zum Erproben und Entdecken SM 1.2, Aufgabe 3 Hilfen: • „Beschreibe Deine Beobachtungen bezüglich der Lage und der Anzahl der Nullstellen!" • „Vergleiche die Nullstellen der neuen Funktion (Produktfunktion) mit denen der linearen Funktionen!"	SM 1.2 Aufg.3	Nachdem in Einzelarbeit (a,b) die Vorkenntnisse reaktiviert wurden, werden in Partnerarbeit (c,d) verschiedene Polynome erzeugt und in der faktorisierten Form untersucht, was zu Aussagen über die Nullstellen führt.
Erarbeitung: Information: Die linearen Terme, die als Faktoren verwendet werden, nennt man **Linearfaktoren** des Funktionsterms. Ergebnisse: • Die Nullstellen der Linearfaktoren sind Nullstellen der Produktfunktion. Beispiel: $p(x) = x \cdot (x-1) \cdot (x+2)$ • Wenn derselbe Linearfaktor zweifach auftritt, besitzt die Produktfunktion an dessen Nullstelle eine Berührstelle/ Extremstelle. Beispiel: $p(x) = x \cdot (x-1)^2$ Man spricht hier von einer doppelten Nullstelle. • Wenn derselbe Linearfaktor dreifach auftritt, besitzt die Produktfunktion dort eine Nullstelle mit waagerechter Tangente, die keine Extremstelle ist. Beispiel: $p(x) = x^3$ Man spricht hier von einer dreifachen Nullstelle.	OHP- Display	Sicherung der Informationen und der Ergebnisse mit Beispielgraphen an der Tafel. Ggf. muss auch der Begriff ‚Produktfunktion' erläutert werden.

Vertiefung (eventuell als vorbereitende Hausaufgabe (1)): Multipliziere die Funktionsterme aus und vergleiche diese: Welche Gemeinsamkeiten und welche Unterschiede ergeben sich in der Termstruktur? Beschreibe, welche Potenzen vorkommen.		Vorbereitung der Definition der ganzrationalen Funktion.
Ergebnis: Alle Terme sind Summen von Potenzfunktionen. Unterschiede ergeben sich in der Höhe der auftretenden Exponenten und bei den Werten der Faktoren vor den Potenzen. Vermutung: Die Anzahl der Linearfaktoren entspricht dem Wert des höchsten Exponenten.		
Alternative Hausaufgabe (2): Die Schülerinnen und Schüler bearbeiten das SM 1.2 Aufgabe 4 (Reserve SM 1.3, Aufgabe 5)	SM 1.2 Aufg.4	Umkehrung der Aufgabenstellung

Ablauf der Stunde 3

Inhalt	Medien	Kommentar
Information (im Bezug auf die Vertiefungs-/Hausaufgabe (1)): **Definition:** Eine Funktion mit einer Gleichung der Art $f(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + ... + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0$ mit einer natürlichen Zahl n heißt **ganzrationale Funktion vom Grad n**. Den Funktionsterm nennt man **Polynom**. Die Zahlen a_0, …, a_n nennt man **Koeffizienten** des Polynoms. **Hinweis:** In der Definition wird die Darstellung als Summe gewählt. Manche Polynome lassen sich aber auch als Produkt von Linearfaktoren darstellen. Die Umwandlung geschieht mithilfe der Befehle ‚expand' und ‚factor'.  Den unteren Term, das Produkt, nennt man **Linearfaktorzerlegung** des Polynoms.	Wissensspeicher	Information zu den Schreibweisen durch den Lehrer. Sinnvoll ist es, Vernetzungen zu den Spezialfällen linearer und quadratischer Funktionen herzustellen. Dies kann auch mithilfe von Aufgabe 6 (SM 1.3) geschehen.
Übung: Die Begriffe und Bezeichnungen aus der Definition sollen geübt werden durch Identifikation, Vernetzung mit Bekanntem und durch Kontrastieren.	SM 1.3 Aufg. 5 - 8	

Problematisierung: „Welche Vermutungen ergeben sich aus den bisherigen Beobachtungen bezüglich der minimalen/maximalen Anzahl von Nullstellen?“ „Wähle die am besten geeignete Darstellungsform für die Untersuchung der Nullstellen!“	Folie für die Vermutungen	Mögliche Hypothesen: Grad ≤ Nullstellenanzahl Es gibt ganzrationale Funktionen ohne Nullstellen. Bei ungeradem Grad gibt es mindestens eine.
Langzeithausaufgabe: Erarbeitung des Globalverlaufes (mögliche Symmetrien und Verhalten an den Rändern) ganzrationaler Funktionen.	SM 1.5 bis SM 1.9	Die Schüler haben eine Woche Zeit, sich anhand der Materialien den Sachverhalt selbst zu erarbeiten.

Ablauf der Stunde 4

Inhalt	Medien	Kommentar
Einstieg: Sammeln der Hypothesen aus der Vorstunde. Strategie: Produktdarstellung für die Untersuchung, wenn Nullstellen vorliegen.	Folie mit den Vermutungen	
Erarbeitung: Entweder die Schülerinnen und Schüler äußern Hypothesen zur minimalen und maximalen Anzahl der Nullstellen und zum Zusammenhang mit den Linearfaktoren oder man unterstützt diese mit den Aufgaben 9 und 10: • Verbindungen zu den Kenntnissen aus dem Bereich quadratischer Funktionen. • Genauere quantitative Auswertung der Experimente mit den Linearfaktoren. **Arbeitsauftrag:** „Bearbeite Aufgabe 9 und 10 und formuliere, was Du über die Anzahl der Nullstellen, die Anzahl der Linearfaktoren und den Grad herausgefunden hast!“	SM 1.3 Aufg. 9 und 10	Je nachdem, wie weit die Hypothesen der Schülerinnen und Schüler gehen, kann man auf diese aufbauend eigene Beispiele entwickeln lassen oder die vorbereiteten Aufgaben verwenden.

<table>
<tr><td>Mögliche Ergebnisse:
Es gibt ganzrationale Funktionen ohne Nullstellen, z. B. $f(x)=x^2+1$. Deren Grad ist immer gerade.
Ganzrationale Funktionen mit ungeradem Grad haben mindestens eine Nullstelle, z. B. $f(x)=x^3$.
Eine ganzrationale Funktion vom Grad n h at höchstens n Nullstellen, z. B. $f(x)=x^3-4x$.
Bei einer Zerlegung in Linearfaktoren bestimmt deren Anzahl den Grad. Linearfaktoren können auch mehrfach vorkommen; dann ist die Anzahl der Nullstellen kleiner als der Grad der Funktion, z. B. $f(x)=(2x-1)\cdot(x+2)\cdot(x+2)=(2x-1)\cdot(x+2)^2$.</td><td>Tafel</td><td>Die Polynomdividion steht nicht zur Verfügung.
Deshalb ist die Abspaltbarkeit des Linearfaktors einer Nullstelle höchstens eine Lehrerinformation ohne Beweis.
Auf die Eindeutigkeit der Zerlegung in Analogie zur ebenfalls unbekannten Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung wird nicht eingegangen.</td></tr>
<tr><td>Optional:
Information: Ist die Funktion f eine ganzrationale Funktion mit Grad n und x_1 eine Nullstelle, dann kann man f als Produkt des Linearfaktors $(x-x_1)$ und der ganzrationalen Funktion g vom Grad $n-1$ schreiben: $f(x)=(x-x_1)\cdot g(x)$.
Folgerung:
Also lässt sich diese ‚Abspaltung‘ eines Linearfaktors höchstens n-mal durchführen. Deshalb kann die Zahl der Nullstellen auch höchstens so groß wie der Grad der Funktion sein.
Wenn ein Linearfaktor mehrfach vorkommt oder ein Faktor der Art (x^2+1) auftaucht (ohne Nullstellen), dann ist die Zahl der Nullstellen von f kleiner als der Grad.</td><td></td><td></td></tr>
</table>

Ablauf der Stunden 5 und 6

<table>
<tr><th colspan="2">Inhalt</th><th>Medien</th><th>Kommentar</th></tr>
<tr><td colspan="2">Übungen zu Nullstellen und Linearfaktorisierung</td><td rowspan="5">SM 1.4</td><td rowspan="5">In den Übungen werden die vielfältigen Informationen der letzten Stunden gefestigt und auf ihre Belastbarkeit hin überprüft.</td></tr>
<tr><td>Aufgabentyp</td><td>Aufgabennummer</td></tr>
<tr><td>Darstellungsformen bewerten</td><td>SM 1.4
Aufgabe 11/12</td></tr>
<tr><td>Bestimmung des Terms aus dem Graphen</td><td>SM 1.4 Aufgabe 13</td></tr>
<tr><td>Ermittlung von Eigenschaften aus dem Term</td><td>SM 1.4
Aufgaben 14/15</td></tr>
<tr><td colspan="2">Vorbereitende Hausaufgabe:
Stelle mithilfe der Aufgaben aus SM 2.1 bis 2.3 aus der vorherigen Einheit (Änderungsraten und Ableitungsfunktionen) alle Informationen zu Hoch- und Tiefpunkten zusammen.
Bereite einen kurzen Bericht vor.</td><td></td><td></td></tr>
</table>

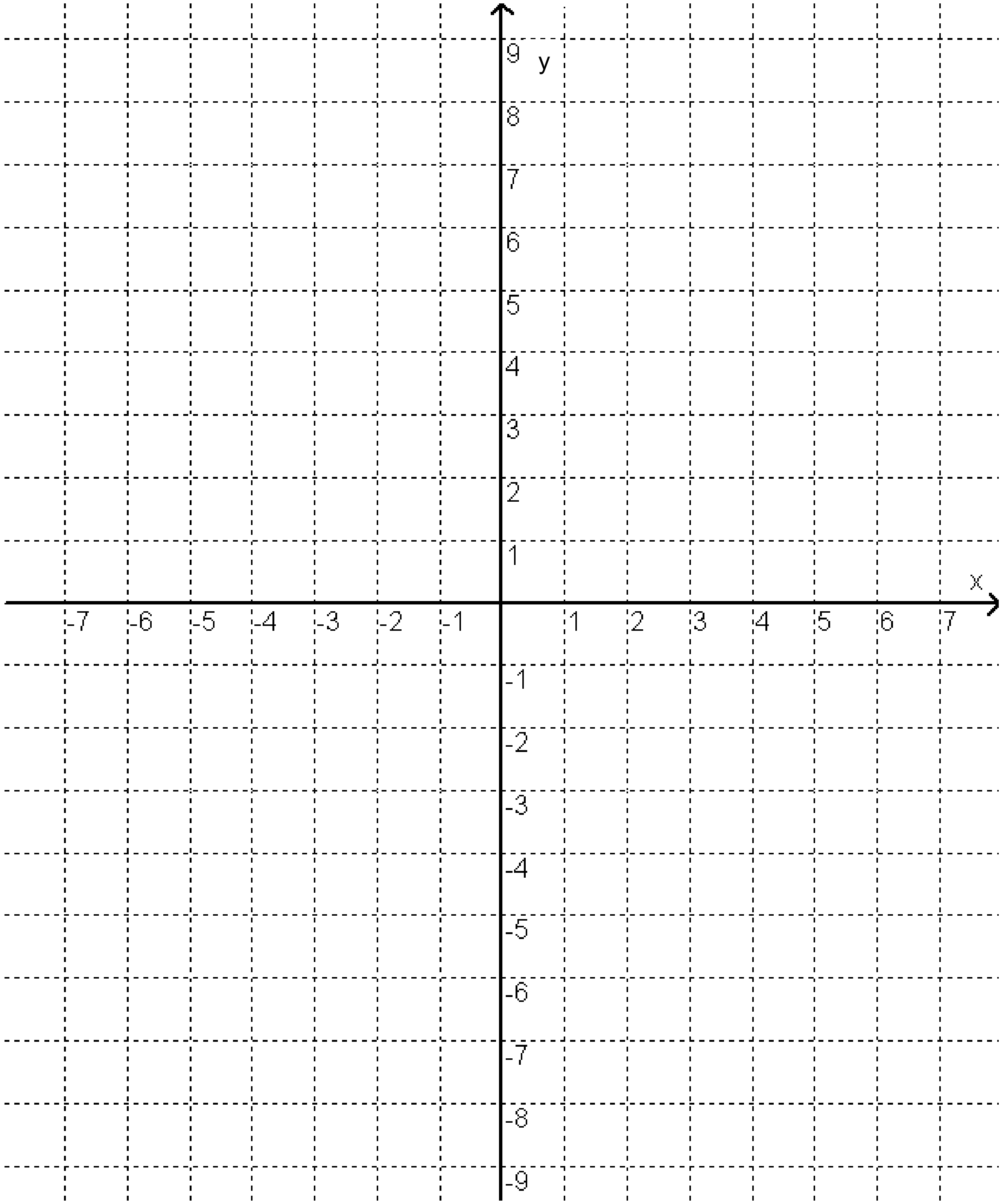
<table>
<tr><td>1.2 Untersuchung ganzrationaler Funktionen – Extremstellen</td><td>Dauer: 4 Stunden</td></tr>
<tr><td colspan="2">Dieser Abschnitt baut thematisch auf dem Wissenstand der vorherigen Einheit ‚Änderungsraten und Ableitungsfunktionen‘ über Extrem- und Wendestellen auf. Während dort der grafische Aspekt im Vordergrund stand, soll nun hier im Zusammenhang mit ganzrationalen Funktionen eine Betrachtung auf algebraischer Ebene stattfinden. Wendepunkte werden im Kontext der Untersuchung des Krümmungsverhaltens von Funktionsgraphen im ersten Semester der Qualifikationsphase zentral thematisiert und sind vor diesem Hintergrund kein Inhalt des Kercurriculums der Sek I. Dennoch bietet es sich im vorliegenden Unterrichtsgang (optional) an, zumindest die ‚Kandidaten‘ für Wendestellen algebraisch zu bestimmen.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Besondere Materialien/Technologie:
LM 1.1 Kopiervorlage sowie LM 1.2a und LM 1.3a/b Folienvorlagen
SM 1.10 und SM 1.11
Stifte, Tafelmagnete oder Klebeband</td></tr>
</table>

Ablauf der Stunden 7 bis 9

Inhalt	**Medien**	**Kommentar**
Einstieg: In der kurzen Besprechung der vorbereitenden Hausaufgabe rekapitulieren die Schülerinnen und Schüler ihr Wissen über Extrem- und Wendepunkte. Die Lehrkraft leitet zur Betrachtung von ganzrationalen Funktionen (z. B. Folie von LM 1.2a) über und teilt das Ziel der Stunde mit: Wir suchen eine Methode, mit der man Extrem- und Wendestellen algebraisch bestimmen kann. Einen Überblick über die Graphen bietet LM 1.2b Auftrag: „Überprüfe, wie man mithilfe der 1. Ableitung eindeutig entscheiden kann, ob der Graph einer Funktion an einer Stelle x einen Tief- oder Hochpunkt oder einen Wendepunkt hat.“	LM 1.2a SM 1.10 Aufg. 23	Unterrichtsgespräch
Erarbeitung: Vorschlag für die Organisation: Die Funktionen f, g und h werden an relativ leistungshomogene Gruppen verteilt: f einfacher, g mittlerer und h höherer Schwierigkeitsgrad. Dabei werden die Funktionen doppelt vergeben. Zur Präsentation werden die Plakate mit den Graphen der Ausgangs- und Ableitungsfunktion untereinander an der Tafel befestigt. Die gedoppelten Gruppen ergänzen einander. Die Plakate können anschließend im Klassenraum verbleiben. Hinweis: Die Arbeitsphase soll sicherstellen, dass alle Schülerinnen und Schüler die Ergebnisse der letzten Unterrichtseinheit wiederholt haben. In leistungsstarken Lerngruppen kann diese gekürzt werden.	Kopien von LM 1.1, Stifte, Magnete oder Klebeband	arbeitsteilige Gruppenarbeit evtl. Hinweis auf TC-Hilfe zur Bestimmung der Ableitung

Auswertung: Die Präsentation sollte folgende Ergebnisse erbringen: • Wenn eine Funktion an einer Stelle x eine Extremstelle hat, dann hat die Ableitungsfunktion an der Stelle eine Nullstelle. • Die Umkehrung gilt nicht, wie die Stelle -2 bei der Funktion g oder 0 bei der Funktion h zeigt (Stellen mit Sattelpunkt). • Mit der Bedingung $f'(x) = 0$ findet man die möglichen Kandidaten für eine Extremstelle (notwendige Bedingung). • Ändert der Graph der Ableitungsfunktion in einer Umgebung der Nullstelle x_0 sein Vorzeichen, dann liegt eine Extremstelle vor. • Wechselt die Ableitungsfunktion an der Nullstelle x_0 das Vorzeichen von Plus (+) zu Minus (-), dann hat der Graph der Ausgangsfunktion einen Hochpunkt. • Wechselt die Ableitungsfunktion an der Nullstelle x_0 das Vorzeichen von Minus (-) zu Plus (+), dann hat der Graph der Ausgangsfunktion einen Tiefpunkt. • Die Feststellungen setzen voraus, dass die Funktion an der Stelle x_0 überhaupt differenzierbar ist. • An den Wendestellen des Ausgangsgraphen hat der Ableitungsgraph jeweils einen Hoch- oder Tiefpunkt. (**Wiederholung aus der Einheit Änderungsraten**) • Die Frage nach der algebraischen Berechnung der Wendestellen führt zur Berechnung der Extremstellen der Ableitungsfunktion.	Plakate	Schülervortrag Unterrichtsgespräch
Sicherung: Die Ergebnisse werden im Wissensspeicher gesichert.	Wissens- speicher	
Erarbeitung: Das VZW-Kriterium wird an Beispielen angewendet (‚Extremstellen-Casting‘). Hierbei muss der Begriff ‚Umgebung der Nullstelle‘ konkretisiert werden, indem zwei Stellen rechts und links von der Nullstelle so ausgewählt werden, dass die nächste Nullstelle nicht überschritten wird. Eine Veranschaulichung am Zahlenstrahl bietet sich an.	SM 1.10 Aufg. 24a	Lehrervortrag Partnerarbeit
Übungen: Bei den Übungsaufgaben stellt die Aufgabe 26 eine besondere Herausforderung dar. Hier bietet sich auch in Verbindung mit der Langzeitaufgabe zur Symmetrie ein Anknüpfungspunkt.	SM 1.10 Aufg. 24b bis 26	Partnerarbeit
Hausaufgabe: Zur Vorbereitung der Besprechung der **Langzeithausaufgabe** zur ‚Symmetrie‘ und ‚Globalverlauf‘ werden die Schülerinnen oder Schüler mit der Präsentation einzelner Aufgaben beauftragt (Ergebnisse auf Folie schreiben, den TC ‚füttern‘).	Folien LM 1.3a/b	

LM 1.1 Kopiervorlage für das Koordinatensystem. Vorher auf DIN-A3 kopieren.



LM 1.2a Folienvorlage

Aufgabe 24

$$f(x) = 0{,}125x^3 - 1{,}125x^2 + 1{,}875x + 3{,}125$$

$$g(x) = -0{,}25x^4 - x^3 + 4x + 2$$

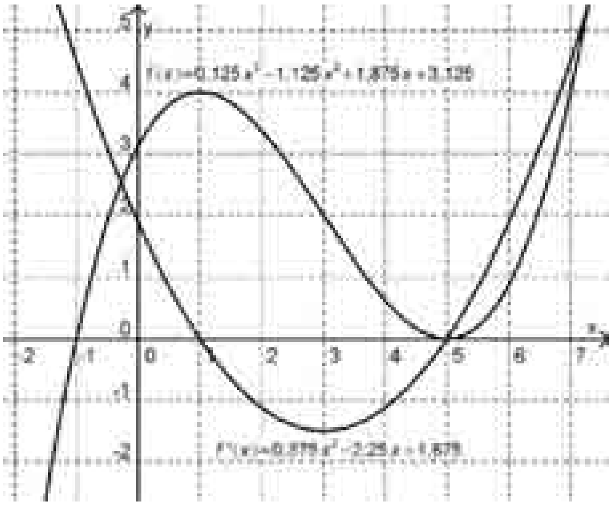
$$h(x) = -0{,}1x^5 + 0{,}67x^3 - 1$$

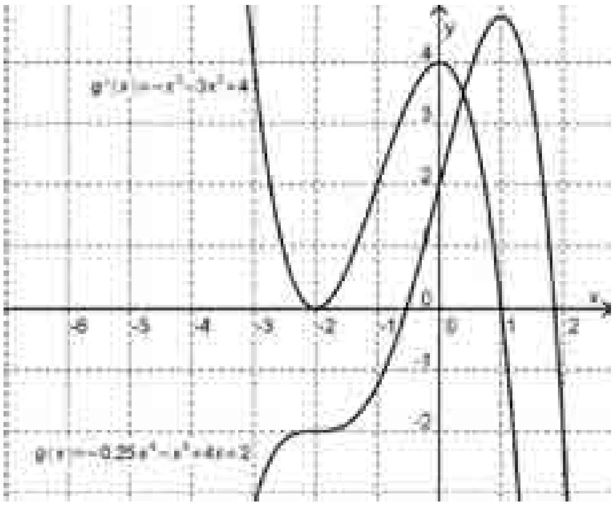
Stelle die Graphen der Funktion und ihrer Ableitungsfunktion jeweils in einem Koordinatensystem dar. Lege die Koordinatensysteme untereinander.

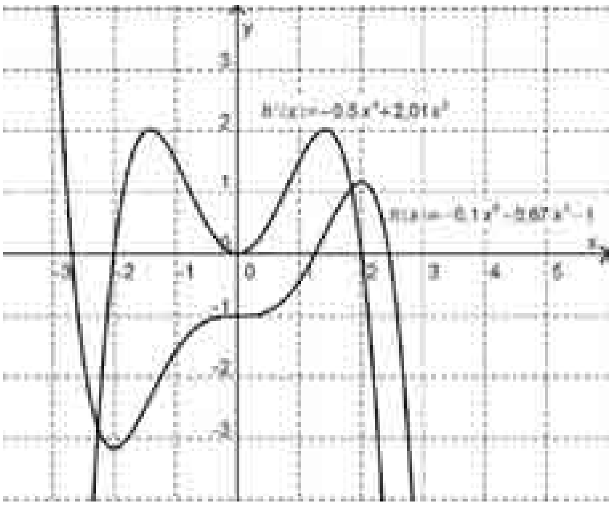
Überprüfe, wie man mithilfe der 1. Ableitung eindeutig entscheiden kann, ob der Graph einer Funktion an einer Stelle x einen Tief- oder Hochpunkt hat.

LM 1.2b Lösungen zu SM 1.10 Aufgabe 24

Aufgabe 24



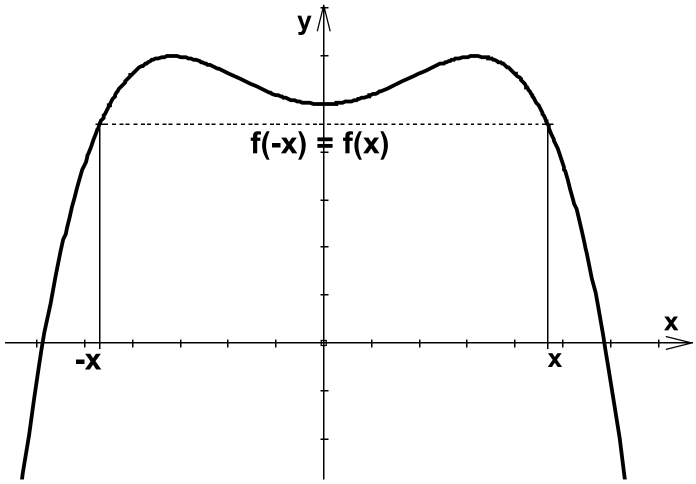




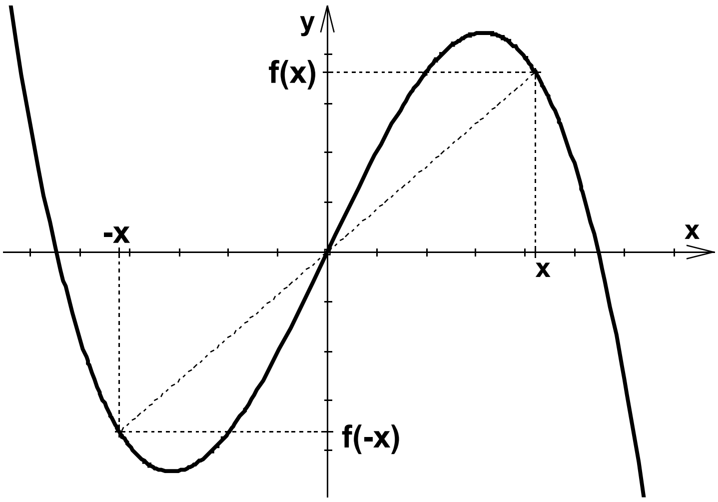
LM 1.3a Folienvorlage

Aufgabe 21

Gilt für alle x: $f(-x) = f(x)$, so ist der Graph der Funktion f achsensymmetrisch zur y-Achse.

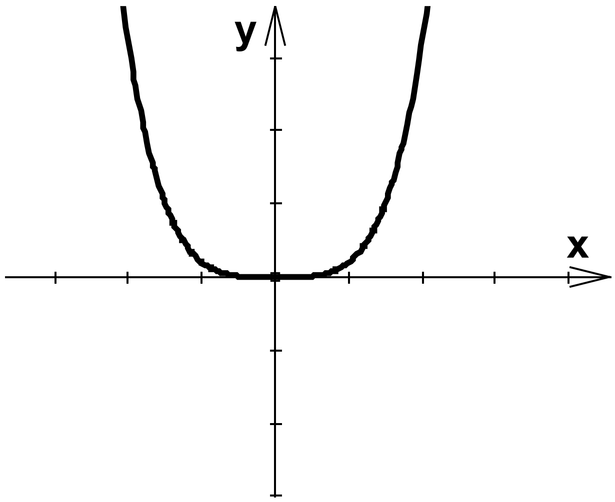


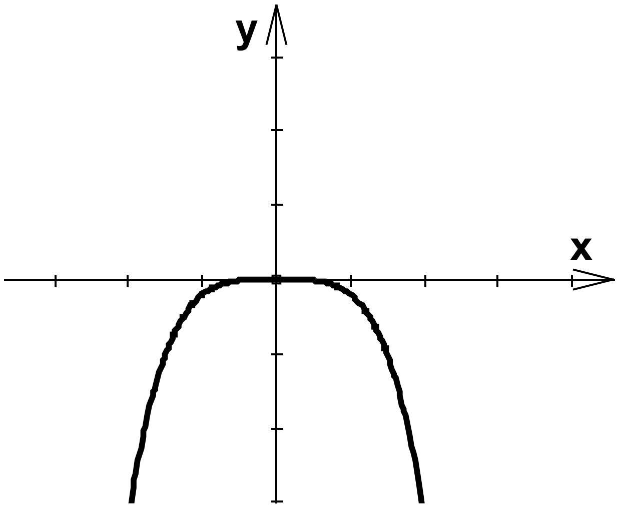
Gilt für alle x: $f(-x) = -f(x)$, so ist der Graph der Funktion f punktsymmetrisch zum Ursprung.



LM1.3b Folienvorlage

Aufgabe 18

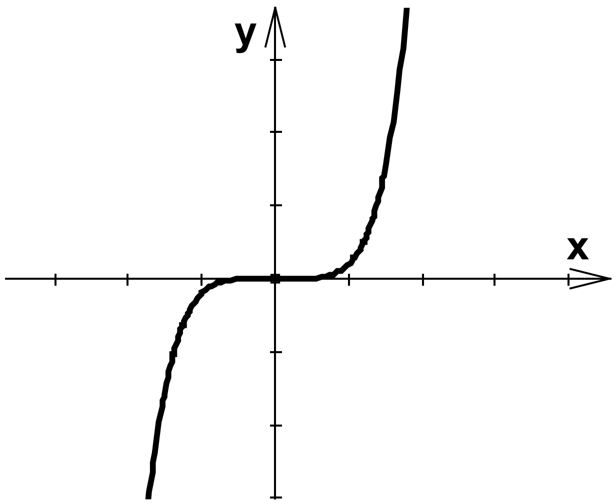


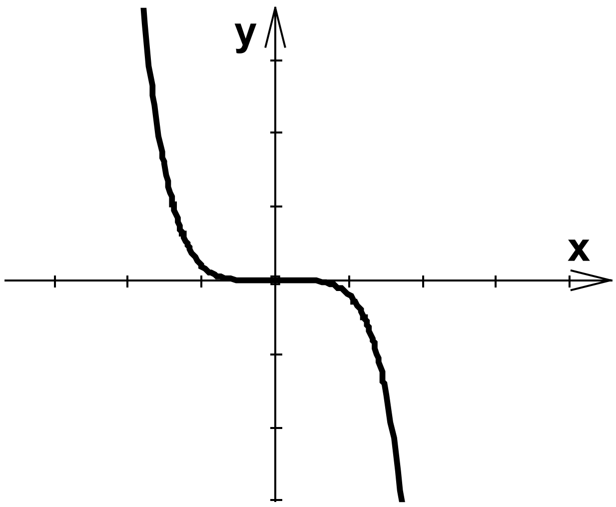


n gerade, $a_n > 0$

$f(x) \to \infty$ für $x \to \infty$

$f(x) \to \infty$ für $x \to -\infty$





1.3 Untersuchung ganzrationaler Funktionen - Langzeithausaufgabe	**Dauer:** 1 Stunde
Die Ergebnisse der Langzeithausaufgabe zur Symmetrie und zum Globalverlauf	
Besondere Materialien/Technologie: LM 1.3a/b (Folienvorlagen) SM 1.5 bis SM 1.9	

Ablauf der Stunde 10

Inhalt	Medien	Kommentar
Langzeithausaufgabe – Besprechung Die Experten präsentieren die zugeteilten Aufgaben. Die übrigen Schülerinnen und Schüler ergänzen oder stellen Nachfragen. Wichtig ist eine zusammenfassende Rückschau: • „Was haben wir über die Symmetrie und das Verhalten an den Rändern bei ganzrationalen Funktionen gelernt?” • „Welche Vorteile bieten diese Kenntnisse bei der Bestimmung von Extremstellen?”	SM 1.5 bis SM 1.9 Wissens- speicher	Schülervortrag Unterrichtsgespräch
Übung / Hausaufgabe Lösungshilfe zu Aufg. 27 Linker Graph: $TP_1(-12\|-858)$, $HP_1(0\|6)$, $TP_2(3\|-14{,}3)$, Rechter Graph: $TP(-1\|-18{,}1)$, $HP(12\|165)$	SM 1.11 Aufg. 27	

1.4 Untersuchung ganzrationaler Funktionen – Übungen	**Dauer:** 2 Stunden
Besondere Materialien/Technologie: LM 1.4 Lösungshinweise SM 1.12 und SM 1.13	

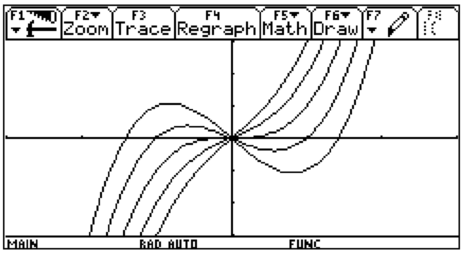
Ablauf der Stunden 11 und 12

Inhalt	Medien	Kommentar
Übungen: Das Schülermaterial bietet vielfältige Aufgaben zur Übung im Umgang mit ganzrationalen Funktionen. Einen Überblick erhält man durch die Tipps und Lösungen in LM 1.4 Die Aufgaben 29 und 30 sind zur Differenzierung gedacht.	SM 1.11/ 1.12 Aufg 28 bis 34 LM 1.4	Die Aufgabenbearbeitung kann gut arbeitsteilig im Expertensystem oder als Stationenlernen organisiert werden.

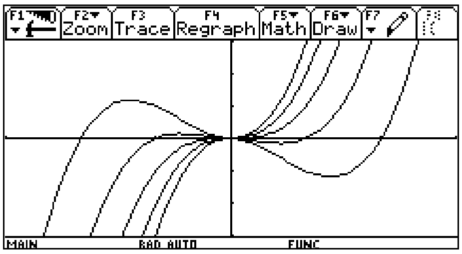
LM 1.4 Lösungshinweise zu SM 1.11 – 1.12
(In den Schülerlösungen müssen ausführlichere Begleittexte erscheinen!)

Aufgabe 29

a) Im Ursprung befindet sich stets eine Nullstelle und die Wendestelle (Punktsymmetrie zum Ursprung). Für $b < 0$ gibt es stets zwei Extremstellen und drei Nullstellen (je kleiner b, desto größer die „Ausschläge" des Graphen), für $b \geq 0$ keine Extremstellen und nur die Nullstelle im Ursprung (je größer b, desto steiler der Graph).

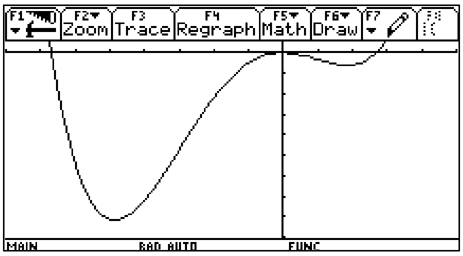


b) Fälle $a = 0$ und $b = 0$ einfach.
Für $a \neq 0 \neq b$ ist stets eine doppelte Nullstelle im Ursprung, die auch Extremstelle ist.
Für $a = 1$, $b < 0$ stets Max. im Ursprung, Min. im 4. Quadrant (je kleiner b, desto kleiner y_E). Für $a = 1$, $b > 0$ stets Min. im Ursprung, Max. im 2.Quadrant (je größer b, desto größer y_E)

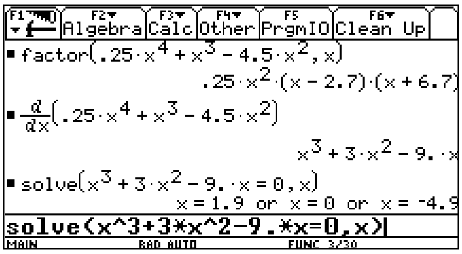


Für $a = -1$ gleiche Ergebnisse, gespiegelt an der y-Achse.
Der Faktor a streckt die Kurve, ohne die Zahl der Nullstellen oder Extremwerte zu ändern.

Aufgabe 30



$(-8 \leq x \leq 5; -90 \leq y \leq 5)$

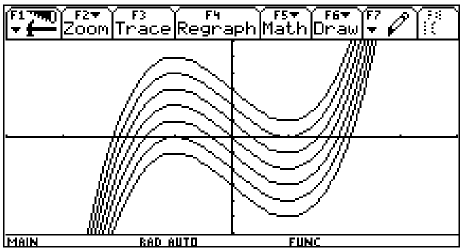


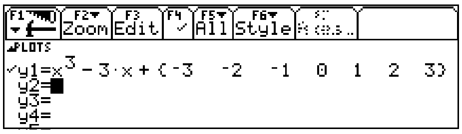
Aufgabe 31

a) Erklärt sich aus Verhalten für $x \to \pm\infty$:
Grad ungerade → mindestens eine Nullstelle; Grad gerade → mindestens eine Extremstelle
b) Benachbarte Extrempunkte müssen unterschiedliches Krümmungsverhalten haben. Also gibt es dazwischen einen Punkt mit Krümmung Null.
c) Die Steigung der Funktion für $x \to \pm\infty$ wird (betragsmäßig) unendlich groß (siehe Ableitungsterm!). Also muss sie sich dazwischen zunächst verkleinern und dann vergrößern (oder umgekehrt). Das bedeutet einen Wechsel des Krümmungsverhaltens.
d) Spiegelsymmetrie zur y-Achse bedeutet, dass die Tangente an den Graphen in $x = 0$ die Steigung Null haben muss. Diese waagerechte Tangente kann außerdem nicht zu einem Wendepunkt gehören.

Aufgabe 32

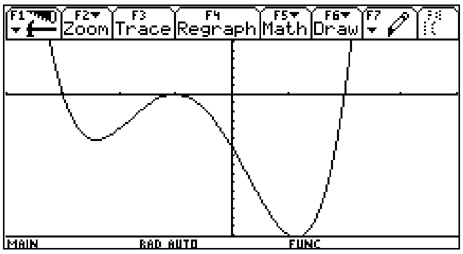
a) Die Extremstellen liegen stets bei x = - 1 und x = 1: Zwei Nullstellen entstehen, wenn die zugehörigen Extrempunkte die x-Achse berühren. Dies trifft zu für a = - 2 und a = 2.





Für a < - 2 oder a > 2 nur eine Nullstelle, für – 2 < a < 2 drei Nullstellen.

b) Bestimmung der Extremwerte:
(- 2,397 | - 5,174); (- 1 | 0); (1,147 | - 16,31).
Also: g(x) + a hat
0 Nullstellen für a > 16,31
1 Nullstelle für a = 16,31
2 Nullstellen für 5,174 < a < 16,31
3 Nullstellen für a = 5,174
4 Nullstellen für 0 < a < 5,174
2 Nullstellen für a < 0



Aufgabe 33

Wenn der Wendepunkt bezweifelt wird, könnte es sich nur um zwei nahe beieinander liegende Extremstellen $x_1 < x_2$ handeln, deren Funktionswerte sich kaum unterscheiden. Dann müsste bei x_1 ein Maximum und bei x_2 ein Minimum vorliegen.

a) Zoomen bringt keine Aufklärung. fMin und fMax bringt teilweise falsche Ergebnisse (z. B. T(4,5 | 1124); H(5,5 | 1128) !).
b) Aufklärung klappt mit Algebra (Ableitung = 0) und ausreichender Kommazahl: H(5,09902 | 1127,01330001); T(5,1 | 1127,0133). Allerdings muss das mit dem VZW geprüft werden. Eleganter geht es, wenn man den Ableitungsterm in Linearfaktoren zerlegt:
$f(x) = 0{,}4\,(x - \sqrt{26})\,(x + \sqrt{26})\,(10\,x - 51)$

Aufgabe 34

Grundsätzlich:
Man kann keine Aussage über die Zahl der Nullstellen treffen!
Man setzt ferner voraus, dass der Bildausschnitt alle „interessanten“ Teile des Polynoms zeigt!

a) quadratische Funktion, nach oben geöffnet, Minimum bei x = 2
b) quadratische Funktion, nach unten geöffnet, Maximum bei x = 3
c) Polynom dritten Grades, Minimum bei x = 1, Maximum bei x = 4, Wendestelle bei x = 2,5; geht von + ∞ nach - ∞.
d) Polynom dritten Grades, keine Extremstellen, Wendestelle bei x = 2,5 (mit horizontaler Tangente); geht von - ∞ nach + ∞; im Vergleich zu c) flacher, d.h. der Faktor bei x^3 ist kleiner.
e) Gerade mit Steigung 1,5
f) Polynom vierten Grades, Minimum bei x = - 4,8 und x = - 1, Maximum bei x = - 3; Wendestellen bei x = - 4 und x = - 1,8; der Graph ist nach oben geöffnet.

(Aussagen jeweils begründen!)

Thema 2.1: Optimierung – Einführung	**Dauer:** 4 Stunden
Die Aufgaben zu den Sach- und Optimierungsproblemen lassen sich in drei Abschnitte unterteilen. Die ersten vier Aufgaben dienen der Einführung in die Problematik der Optimierung. Die Fragestellungen sind geeignet, um von den Schülern zunächst eigenständig bearbeitet zu werden.	
Besondere Materialien/Technologie: SM 2.1 bis SM 2.3 DIN-A4-Blätter	

Ablauf der Stunde 1

Inhalt	Medien	Kommentar
Einstieg: Von den Schülern werden offene Schachteln (Aufgabe 1) erstellt und jeweils ihr Volumen bestimmt. Anschließend werden die einzelnen Ergebnisse verglichen. Die ermittelten Werte werden in einer Tabelle an der Tafel festgehalten. Es bieten sich unterschiedliche Wege zur Bestimmung des Extremums an. Die Ergänzung der Tabelle ist ein erster Schritt. Ziel ist die funktionale Beschreibung und Extremwertbestimmung mithilfe der ersten Ableitung.	SM 2.1 Aufg. 1 DIN A4-Blatt	Gruppenarbeit Hier bietet sich auch die ‚Ich-Du-Wir'-Methode an. Unterrichtsgespräch
Hausaufgabe:	SM 2.1 Aufg. 2	

Ablauf der Stunden 2 bis 4

Inhalt	Medien	Kommentar
Besprechung der Hausaufgabe: Sicherung des Vorgehens bei Extremwertaufgaben am Beispiel von Aufgabe 2: $A(a,b) = a \cdot b$ Zielfunktion $30 = 2a + 2b \Rightarrow a = \frac{30-2b}{2}$ Nebenbedingung $A(b) = \frac{30-2b}{2} \cdot b$ Festlegung des Definitionsbereichs	SM 2.1 Aufg. 2	Unterrichtsgespräch

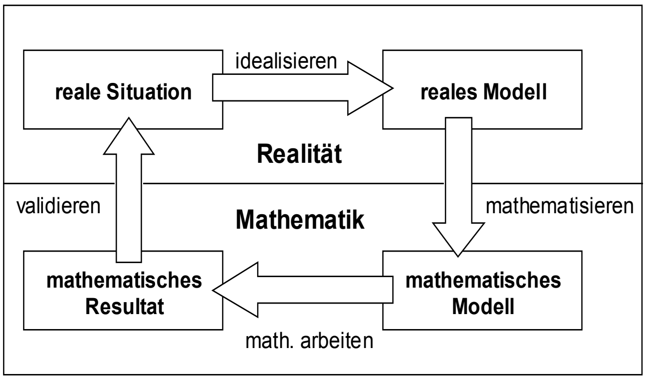
Weitere Erarbeitung: An den A ufgaben 3 u nd 4 soll das Aufstellen der Extremalbedingung („Welches ist die zu optimierende Größe?“), die Formulierung der Zielfunktion und die Herleitung der Nebenbedingung geübt werden. Die Abhängigkeit einer Funktion von zwei Variablen wird in diesem Themenkomplex erneut aufgegriffen. Mithilfe der Nebenbedingung wird die Abhängigkeit auf eine Variable zurückgeführt. Beispiel Aufgabe 3: $A(a,b) = a \cdot b + \pi\left(\frac{a}{2}\right)^2$ $U = a + 2b + \pi \cdot a \Rightarrow b = \frac{U - a(1+\pi)}{2}$ $A(U,a) = a \cdot \frac{U - a(1+\pi)}{2} + \pi\left(\frac{a}{2}\right)^2$ Die Aufgabe 4 di ent der Vertiefung und Einübung des vorher besprochenen Vorgehens. Eine weitere mögliche Aufgabe zur Festigung des Gelernten ist die Aufgabe 8	SM 2.1 Aufg. 3, 4 SM 2.3 Aufg. 8	Partnerarbeit

Thema 2.2: Optimierung – Modellierung	**Dauer:** 3 Stunden
Der zweite Abschnitt stellt die Modellierung der Problemstellung in den Vordergrund. Hierbei soll den Schülern der Modellierungskreislauf bewusst gemacht werden.	
Besondere Materialien/Technologie: LM 2.1 (nur bei Ausweitung des Themas Verpackungen) SM 2.1 und SM 2.2 Dosen, Milchtüten ohne Giebel, Netze von Quader (aufgeschnittene Milchtüte) und Zylinder	

Ablauf der Stunden 5 bis 7

Inhalt	Medien	Kommentar
Erarbeitung: **Modellierung und Optimierung einer Dachrinne**		
Aufgabe 5: Die Suche nach der maximalen Querschnittsfläche A kann nun auf unterschiedliche Arten angegangen werden. • Ausprobieren verschiedener Werte für die Breite der Rinne und Bestimmung des zugehörigen Flächeninhalts und grafische Darstellung der Wertepaare • Systematische Suche mithilfe einer Wertetabelle bei Verringerung der Schrittweite • Grafische Darstellung der Funktion A bei fest gewählter Breite des Blechstreifens und Bestimmung des Maximums mithilfe des Maximum-Befehls im ‚Math'-Menü (F5) • Bestimmung der Maximums mithilfe der 1. Ableitung für beliebige Blechbreite	SM 2.1 Aufg. 5	Partnerarbeit Hier bietet sich auch die ‚Ich-Du-Wir'-Methode an.
Bei der Bearbeitung der Aufgaben 6 und 7 wird das Vorgehen bei einer Modellierungsaufgabe eingeübt. Zur Visualisierung sollten bei der Dose und der Milchtüte Netze der Körper im Original oder als Tafelbild einbezogen werden. Zur Vereinfachung sollten Milchtüten ohne Giebel verwendet werden. Der erste Modellierungsschritt wird sich einer idealisierten, quaderförmigen Milchtüte bedienen, erst im zweiten Schritt werden die Klebefalze und „Zipfel" berücksichtigt. Eine Milchtüte mit rechteckiger Grundfläche führt zu einer Oberflächenfunktion mit zwei Variablen und erfordert spezielle Lösungsstrategien. Bei den Modellierungsschritten sollte den Schülerinnen und Schülern die im nachfolgenden Diagramm dargestellte Vorgehensweise erneut bewusst gemacht werden.	SM 2.2 Aufg. 6, 7 Dosen, Milchtüten und Netze	Partnerarbeit Unterrichtsgespräch

<table>
<tr>
<td>
Modellierungskreislauf



Dabei muss im Unterricht herausgearbeitet werden, dass ein mathematisches Modell immer nur einen Teilaspekt der Realität abbildet. Die mithilfe des Modells gefunden Ergebnisse müssen somit immer an der Realität überprüft werden. Gegebenenfalls muss das Modell verbessert werden und eine erneute Überprüfung der jetzt erhaltenen Ergebnisse stattfinden. Es kann notwendig sein, diesen Vorgang mehrfach zu wiederholen.
</td>
<td></td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>
Alternative Behandlung der Aufg. 6 und 7:
Die Problemstellungen lassen sich zu einem kleinen Projekt ‚Verpackungen‘ ausweiten. Hier sollte dann auch Zeit eingeplant werden für die Überlegungen:

- ästhetische Aspekte, Handhabung (in-die-Hand-nehmen) und Platz für Produktaufdruck
- Art des verpackten Produkts (Spargelstangen oder Erbsen, lange Würstchen oder Butterkekse)
- Produktionsverfahren (Druckbahnen und Tiefziehen)
- Transport der Verpackungen auf Trays und Paletten.
</td>
<td>LM 2.1</td>
<td>Projekt</td>
</tr>
</table>

LM 2.1 Cola-Dose

Antwort von Coca-Cola auf eine Schüleranfrage

... wir beziehen uns hiermit auf Ihren Brief vom 9. September 1996 und möchten uns zunächst bei Ihnen als Vertreter Ihres Mathematikleistungskurses für Ihr Interesse an den Produkten unseres Hauses bedanken.

Wir haben Ihre beigefügten Unterlagen durchgesehen und möchten dazu wie folgt Stellung nehmen:

Sie gehen bei Ihren Berechnungen von einem rein zylindrischen Behältnis mit glattem Boden sowie einer glatten Deckelfläche aus und kommen daher auf ein Volumen von 350 ml. Wenn Sie sich die derzeit im Markt befindlichen Dosen ansehen, so werden Sie feststellen, dass diese eine Wölbung am Boden sowie eine leichte Wölbung am Dosendeckel aufweisen. Unter Berücksichtigung dieser beiden Aspekte hat die Dose ein eigentliches Volumen (wir bezeichnen es als Randvollvolumen) von ca. 342 ml, also deutlich geringer als das von Ihnen berechnete Volumen.

Der gewölbte Boden sowie der leicht gewölbte Deckel sind erforderlich, um Druckschwankungen auszugleichen, ohne dass es zu Beschädigungen einer Dose kommt. Bei kohlensäurehaltigen Getränken ist der Innendruck abhängig von der Temperatur, das heißt, bei höheren Temperaturen steigt der Innendruck an.

In Ihrer Berechnung gehen Sie von einem volumenoptimierten Behältnis aus, was grundsätzlich richtig und auch zu begrüßen ist. Die Volumenoptimierung alleine ist jedoch nicht unbedingt ein Indiz dafür, dass auch ein optimaler Materialverbrauch gewährleistet ist. Aufgrund der bestehenden Fertigungsverfahren für Leerdosen (Ziehen des Dosenbleches) hat sich die jetzige Dosenform, welche übrigens von der gesamten Industrie eingesetzt wird, als extrem günstig erwiesen. Bei dem von Ihnen errechneten zylindrischen Dosenkörper mit glattem Boden und glattem Dosendeckel müssten dickere Bleche eingesetzt werden, um die gleiche Stabilität zu gewährleisten wie bei der von uns verwendeten Dosenform. Dadurch wird ein höherer Materialverbrauch verursacht.

Ein weiterer wichtiger Punkt ist die optimale Auslastung der zum Vertrieb eingesetzten Paletten. Wichtig zu erwähnen ist hierbei, dass der Handel aus Logistikgründen (Transport, Lagerung, Kosten, etc.) keine extremen Palettenunterstande und auf gar keinen Fall Palettenüberhänge dulden. Für uns bedeutet das, dass wir eine optimale Auslastung der zur Verfügung stehenden Fläche einer Palette von 1200 mm x 800 mm (Euro-Palette) garantieren müssen. Bei der von uns eingesetzten Dosenform ist dieses unter Berücksichtigung der zur Verpackung eingesetzten Kartonagen (Trays) gewährleistet. Es werden insgesamt 216 Dosen pro Palettenlage untergebracht.

Bei der von Ihnen vorgeschlagenen Dose kommen wir nur auf ca. 150 Dosen pro Palettenlage. Dabei würde die Palette nicht optimal ausgelastet.

Wir hoffen, dass Ihnen unsere Ausführungen verständlich machen konnten, welche Faktoren mit für den Einsatz der heutzutage verwendeten Dosenform verantwortlich sind.

Sollten Sie weitere Rückfragen haben, so können Sie sich selbstverständlich an uns wenden.

Mit freundlichen Grüßen
COCA-COLA GmbH
Öffentlichkeitsarbeit Essen, 27. September 1996

(Quelle: www.mathekiste.de)

Thema 2.3: Optimierung - Übung und Vertiefung	**Dauer:** 4 Stunden
Im dritten Abschnitt finden sich vermischte Übungsaufgaben. Die Aufgaben aus unterschiedlichen Sachzusammenhängen dienen zur Festigung und zur Vertiefung.	
Besondere Materialien/Technologie: SM 2.3 bis SM 2.5	

Ablauf der Stunden 8 bis 12

Inhalt	Medien	Kommentar
Übung: Aufgaben aus unterschiedlichen Sachzusammenhängen dienen zur Übung. Hierbei gilt: Aufgaben 9, 10, 11 und 13 sind Beispiele aus der Wirtschaft Aufgaben 8, 12, 14 und 15 sind Beispiele aus dem Alltag Aufgaben 16, 17 und 18 betonen den funktionalen Aspekt. Eine geeignete Auswahl ist in das Ermessen des unterrichtenden Kollegen gestellt und sollte nach dem Interesse und dem Leistungsvermögen der Schüler erfolgen. Dabei ist jedoch darauf zu achten, dass alle drei Bereiche im Unterricht angesprochen werden. Lösungshinweis zu Aufg. 18: Geeignet ist $y = a \cdot x^3 + b \cdot x^2$ (c = 0 und d = 0 wegen Maximum in (0|0)). Wegen $y = x^2 \cdot (a \cdot x + b)$ ist ferner $e = -\frac{b}{a}$. Minimum bei v liefert für die 1. Ableitung: $0 = v(3av + 2b) \Leftrightarrow v = -\frac{2b}{3a} = \frac{2}{3}e$	 SM 2.3 bis SM 2.5 Aufg. 9 - 18	

3. Wissensspeicher

Zunahme- oder Abnahmeprozesse werden als Wachstumsvorgänge bezeichnet.
Wachstumsvorgänge können rekursiv oder explizit beschrieben werden. Die Darstellung gibt an, wie sich die wachsende Größe pro Zeiteinheit (z. B. in einem Jahr oder an einem Tag) verändert.
Durch die Darstellung ergibt sich eine Folge von Werten u(0), u(1), u(2), … .
u(0) ist der Startwert der Folge, u(1), u(2), … nennt man erstes, zweites, … Folgenglied.

Definition einer ganzrationalen Funktion

Eine Funktion mit einer Gleichung der Art
$f(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + ... + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0$ mit einer natürlichen Zahl n
heißt **ganzrationale Funktion vom Grad n**.
Den Funktionsterm nennt man **Polynom**. Die Zahlen a_0, …, a_n nennt man **Koeffizienten** des Polynoms.
Beispiel: $f(x) = 3 \cdot x^3 + 2 \cdot x + 1$; Koeffizienten: $a_3 = 3$; $a_2 = 0$; $a_1 = 2$; $a_0 = 1$ Grad: 3

Vielfachheit von Nullstellen

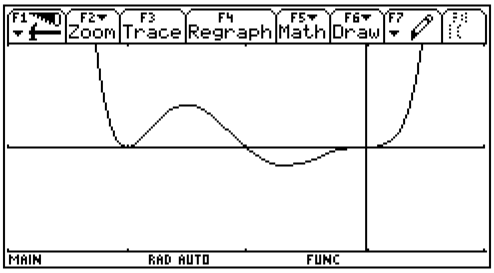
Kommen die zu Nullstellen gehörigen Linearfaktoren mehrfach vor, so spricht man von mehrfachen Nullstellen oder von der Vielfachheit der Nullstellen. Die Vielfachheit entscheidet darüber, ob es bei der Funktion zu einem Vorzeichenwechsel (VZW) kommt oder nicht.

Beispiel: $f(x) = (x+2)^2 \cdot (x+1) \cdot x^3$

x = –1 heißt einfache Nullstelle (Vielfachheit/Exponent 1)

x = –2 heißt doppelte Nullstelle (Vielfachheit/Exponent 2)

x = 0 heißt dreifache Nullstelle (Vielfachheit/Exponent 3)



einfache Nullstelle -1:	Schnittpunkt (VZW)
doppelte Nullstelle -2:	Berührpunkt (kein VZW)
dreifache Nullstelle 0:	Schnittpunkt (VZW) mit waagerechter Tangente

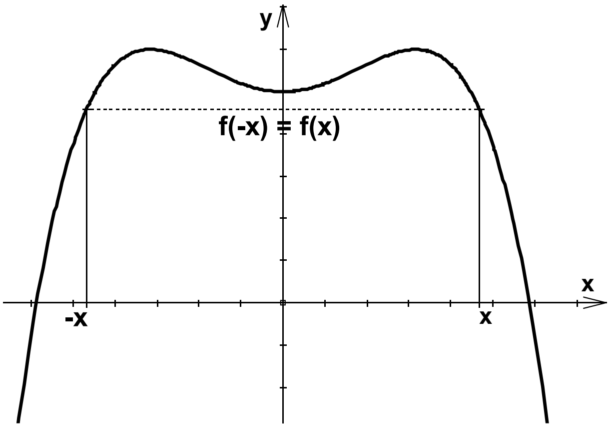
Anzahl der Nullstellen

Sei f eine ganzrationale Funktion mit dem Grad n.

- Zu jeder Nullstelle gehört ein Linearfaktor. Also gibt es höchstens n Nullstellen für f.
- Lässt sich der Term von f als Produkt von Linearfaktoren schreiben, spricht man bei diesem Produkt von einer **Linearfaktorzerlegung**.
- Gibt es mehrfache Nullstellen, ist die Zahl der Nullstellen kleiner als der Grad n.
- Lässt sich der Term nicht vollständig in Linearfaktoren zerlegen, dann gibt es weniger als n Nullstellen.

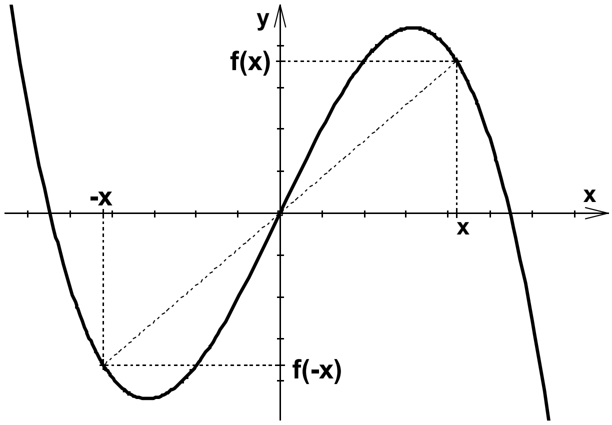
Symmetrie

Gilt für alle x: $f(-x) = f(x)$, so ist der Graph der Funktion f achsensymmetrisch zur y-Achse.



Ist f eine ganzrationale Funktion, so ist der Graph zu f achsensymmetrisch zur y-Achse, wenn im Term von f nur Potenzen von x mit geradem Exponenten vorkommen.

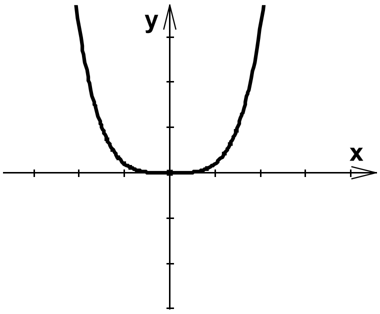
Gilt für alle x: $f(-x) = -f(x)$, so ist der Graph der Funktion f punktsymmetrisch zum Ursprung.



Ist f eine ganzrationale Funktion, so ist der Graph zu f punktsymmetrisch zum Ursprung, wenn im Term von f nur Potenzen von x mit ungeradem Exponenten vorkommen.

Globalverlauf

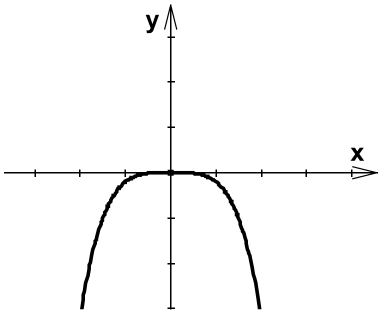
Für das Verhalten der Funktionswerte für $x \to \infty$ und $x \to -\infty$ einer ganzrationalen Funktionen f mit $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x^1 + a_0 x^0$; $a_n \neq 0$, das man auch den Globalverlauf der Funktion nennt, sind folgende vier Fälle zu unterscheiden:



n gerade, $a_n > 0$

$f(x) \to \infty$ für $x \to \infty$

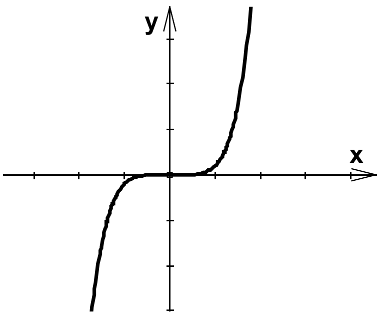
$f(x) \to \infty$ für $x \to -\infty$



n gerade, $a_n < 0$

$f(x) \to -\infty$ für $x \to \infty$

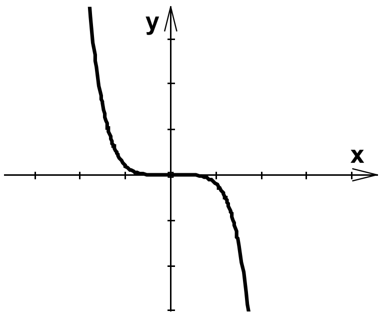
$f(x) \to -\infty$ für $x \to \infty$



n ungerade, $a_n > 0$

$f(x) \to \infty$ für $x \to \infty$

$f(x) \to -\infty$ für $x \to -\infty$



n ungerade, $a_n < 0$

$f(x) \to \infty$ für $x \to -\infty$

$f(x) \to -\infty$ für $x \to \infty$

Extremstellen-Casting

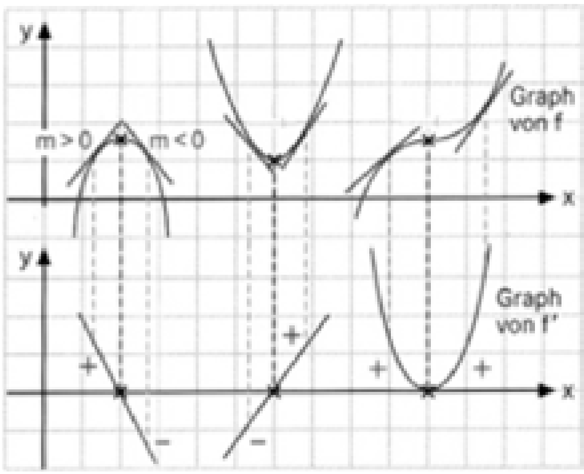
1. Kandidatensuche (notwendige Bedingung)
Die Lösung(en) von $f'(x)=0$ liefern die möglichen Kandidaten für Extremstellen, d.h. man bestimmt die Nullstellen der Ableitungsfunktion.

2. Kandidatenauswahl
(Vorzeichenwechselkriterium)

VZW-Kriterium

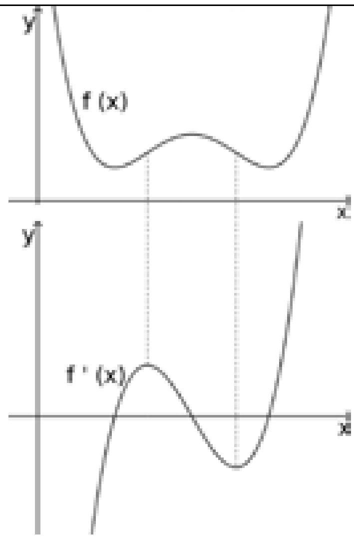
Wechselt die Ableitungsfunktion an der Nullstelle a das

- Vorzeichen von Plus (+) zu Minus (-), dann hat der Graph der Ausgangsfunktion einen Hochpunkt.
- Vorzeichen von Minus (-) zu Plus (+), dann hat der Graph der Ausgangsfunktion einen Tiefpunkt.
- Vorzeichen nicht, dann l iegt keine Extremstelle vor.

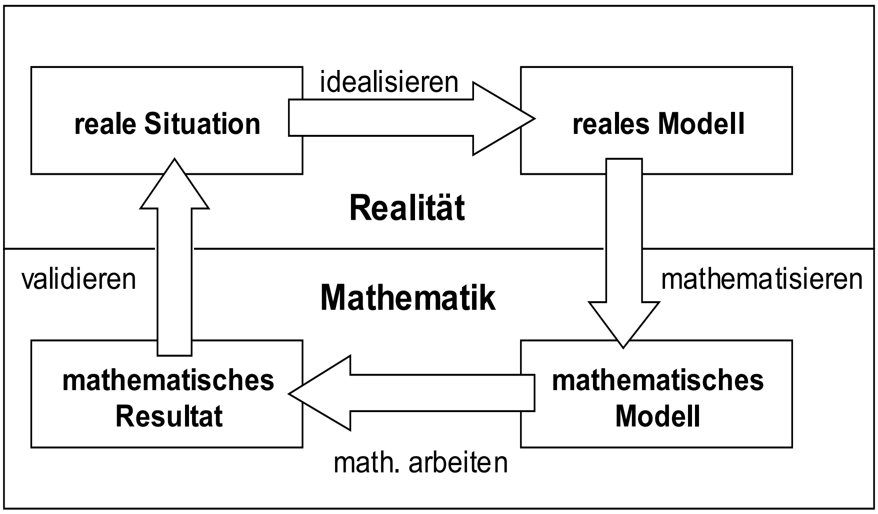


Wendestellen

An den Wendestellen des Ausgangsgraphen hat der Ableitungsgraph jeweils einen Hoch- oder Tiefpunkt. Suche nach dem Verfahren des **Extremstellen-Castings** die Extremstellen der Ableitungsfunktion.



Modellierungskreislauf



4. Selbsteinschätzung

Schätze deine Kenntnisse ein und mache ein Kreuz in der entsprechenden Spalte.

Ich kann	kann ich gut	muss ich noch üben	ich brauche Hilfe
• bei einer ganzrationalen Funktion n-ten Grades die höchstmögliche Anzahl von Nullstellen erkennen. *Beispiel:* $f(x) = 2x^4 + 7x^3 + 5x^2$			
• bei einem faktorisierten Funktionsterm die Nullstellen der Funktion und deren Vielfachheit angeben. *Beispiel:* $f(x) = (2x-3) \cdot (x+5)^2 \cdot x$			
• in einfachen Fällen für ganzrationale Funktionen die Linearfaktorzerlegung durchführen und die Nullstellen der Funktion angeben. *Beispiel:* $f(x) = x^3 + 4x^2 + 4x$			
• in geeigneten Fällen die Linearfaktorzerlegung ganzrationaler Funktionen mit dem TC durchführen. *Beispiel:* $f(x) = 3x^4 - 6x^3 - 24x^2 + 54x - 27$			
• den Zusammenhang zwischen der Vielfachheit einer Nullstelle und dem Verlauf des Graphen in der Umgebung dieser Nullstelle beschreiben. *Beispiel:* $f(x) = (x+2)^3 \cdot (x-1)^2 \cdot (x+3)$			
• für eine gegebene Funktion die möglichen Extremstellen mithilfe der ersten Ableitung bestimmen. *Beispiel:* $f(x) = 0{,}25x^4 - 1{,}5x^2 + 2x + 3$			
• mithilfe des VZW-Kriteriums die Existenz und Art von Extrempunkten nachweisen. *Beispiel:* $f(x) = 0{,}25x^4 - 1{,}5x^2 + 2x + 3$			
• die Bedeutung des Grades des Polynoms für den globalen Verlauf des Funktionsgraphen nennen.			
• Achsensymmetrie (zur y-Achse) und Punktsymmetrie (zum Ursprung) anhand des Polynoms rechnerisch nachweisen. *Beispiele:* $f(x) = x^3 - x - 5$; $g(x) = x^4 - 2x^2 + 1$; $h(x) = x^3 - x$			
• zu Extremwertproblemen für die zu optimierende Größe eine Zielfunktion aufstellen.			
• in der Zielfunktion die Variablenanzahl mithilfe von Nebenbedingungen reduzieren.			
• Extremwerte und -stellen bestimmen.			
• Wendestellen bestimmen.			

5. Lernprotokoll

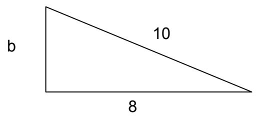
Lernprotokoll 1 – Ganzrationale Funktionen
Im Lernprotokoll soll in kurzer schriftlicher Form das wesentlich Neue der vergangenen Stunde festgehalten werden. Somit dient es dir zur Kontrolle deines eigenen Lernzuwachses. Bearbeite dazu die folgenden Aufgaben.

1. Gib unterschiedliche Darstellungsformen einer ganzrationalen Funktion an und erläutere Vorteile der jeweiligen Darstellungsform.
2. Erläutere, wie viele Nullstellen eine ganzrationale Funktion vierten Grades haben kann und gib je ein Beispiel für eine ganzrationale Funktion vierten Grades mit 4 bzw. mit einer Nullstelle(n) an.
3. Erläutere den Zusammenhang zwischen der Extremstelle einer Funktion und der Ableitung der Funktion an dieser Stelle und in der Umgebung.
4. Zeige an einem Beispiel, dass Nullstellen der ersten Ableitung (Kandidaten) nicht immer Extremstellen der Funktion kennzeichnen.
5. Erläutere an Beispielen den Zusammenhang zwischen dem Grad einer ganzrationalen Funktion und dem Symmetrieverhalten dieser Funktion.

Lernprotokoll 2 – Ganzrationale Funktionen – Optimierungsprobleme
Im Lernprotokoll soll in kurzer schriftlicher Form das wesentlich Neue der vergangenen Stunde festgehalten werden. Somit dient es dir zur Kontrolle deines eigenen Lernzuwachses.
Erläutere an dem folgenden Beispiel die Vorgehensweise bei der Lösung eines Optimierungsproblems:

1. Veranschauliche das Problem durch eine Skizze.
2. Stelle für die zu optimierende Größe eine Zielfunktion mit geeignetem Definitionsbereich auf. Erläutere die Variablenwahl.
3. Gib Nebenbedingungen an und erläutere, inwieweit diese Nebenbedingungen zur Lösung des Problems beitragen.
4. Erläutere die abschließende Lösungsstrategie.

6. Kopfübungen

1.	Berechne $16^2 - 2^8$.	0
2.	Eine Seitenhalbierende im Dreieck wird durch S im Verhältnis 1:2 geteilt. Wie konstruiert man S? Wie lang sind die Teilstrecken, in die eine Seitenhalbierende s_c = 12 cm geteilt wird?	S = Schnittpkt. der Seitenhalbierenden. 4 cm und 8 cm
3.	Löse die Gleichung: $3 \cdot (2x - 7) = 9$.	x = 5
4.	Ein Preis ist von 50 € auf 60 € gestiegen. Um wie viel Prozent ist der Preis gestiegen?	20 %
5.	Berechne den Mittelwert von 4; 6; 8;10.	7
6.	Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit aus einem Skatspiel ein Ass zu ziehen?	$\frac{4}{32}$
7.	$(0,5x - 2y)^2 =$	$0,25x^2 - 2xy + 4y^2$
8.	Berechne b. 	6
9.	Bilde die Ableitung zu $f(x) = 0,5x^4 + 3x^2 - 5$.	$f'(x) = 2x^3 + 6x$
10.	Berechne $\frac{3}{8}$ von 24.	9

1.	Schreibe in kg: 2,03 t.	2030 kg
2.	Berechne: $15 \cdot 14 =$	210
3.	Eine verschobene Normalparabel hat den Scheitelpunkt S(-2|-3). Bestimme die Funktionsgleichung der Parabel.	$f(x) = (x+2)^2 - 3$
4.	Gib in Prozent an: 0,004.	0,4 %
5.	Bestimme drei Nullstellen der Funktion f mit $f(x) = -3 \cdot \sin(2x)$.	$x = k \cdot \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$
6.	Einem Quadrat mit a = 5 cm ist ein möglichst großer Kreis einbeschrieben. Mit welcher Formel lässt sich seine Flächengröße berechnen?	$A = \pi \cdot 2{,}5^2$
7.	Löse die Gleichung $4 \cdot x - x^2 = 0$.	x = 0 oder x = 4
8.	Die fünfstellige Zahl 3047**?** soll durch 3 teilbar sein. Bestimme eine mögliche letzte Ziffer.	1 oder 4 oder 7
9.	Ein Kapital von 500 € verzinst sich mit 3,5 %. Mit welchem Term ist das Guthaben nach 6 Jahren zu berechnen?	$500 \cdot 1{,}035^6$
10.	3,99 € + 7,99 € + 3,45 €	15,43 €

1.	Gib die Steigung der Geraden an, die durch die Punkte P_1 (2 | 4) und P_2 (5 | 10) verläuft.	$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{10-4}{5-2} = \frac{6}{3} = 2$
2.	5.000 € werden mit 4 % verzinst. Wie viel Zinsen erhält man nach drei Monaten?	200 € pro Jahr 50 € für drei Monate
3.	In einem Bus sitzen 39 Personen. Das Verhältnis von Frauen zu Männern ist 3:2. Wie viele Frauen sind in dem Bus?	$\frac{3}{5} \cdot 30 = 18$
4.	$\frac{4}{5} + \frac{1}{4} =$	$\frac{21}{20}$
5.	$\frac{9}{5} : \frac{1}{2} =$	$\frac{18}{5} = 3\frac{3}{5} = 3{,}6$
6.	Schreibe die drei binomischen Formeln auf.	$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ $(a-b) \cdot (a+b) = a^2 - b^2$
7.	Gib die Symmetrieachse an. $f(x) = 3 \cdot (x+2)^2 - 1$.	x = -2
8.	Berechne: $\sqrt{45} : \sqrt{5}$.	$\frac{\sqrt{45}}{\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{45}{5}} = \sqrt{9} = 3$
9.	Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, beim Würfeln eine Primzahl zu werden?	Primzahlen: 2, 3, 5 $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$
10.	Berechne den Mittelwert: 4, 6, -8, 10, 13.	(4+6-8+10+13):5 = 5

1.	Schreibe als Wurzel $f(x) = x^{\frac{3}{2}}$.	$f(x) = \sqrt{x^3}$
2.	Löse die Gleichung $x^2 + x = 0$.	$x \cdot (x+1) = 0$ x = 0 oder x = -1
3.	$\frac{5}{x} = \frac{10}{4}$	$\frac{x}{5} = \frac{4}{10}$ $x = \frac{4 \cdot 5}{10} = 2$
4.	Rechne um: 750 cm^2 in m^2.	1 m^2 = 100 dm^2 = 10000 cm^2 750 cm^2 = 0,0750 cm^2 = 0,075 cm^2
5.	Der Punkt A (-7 | 4) wird an der x-Achse gespiegelt. Gib die Koordinaten von A' an.	A' (-7|-4)
6.	Schreibe 70 als ein Produkt von Primzahlen.	$70 = 2 \cdot 35 = 2 \cdot 5 \cdot 7$
7.	Claudia hat für den normalerweise 80 € teuren MP3-Player 16 € weniger bezahlt. Wie viel Prozent Rabatt hat sie erhalten?	8 € entsprechen 10 % 16 € entsprechen 20 %
8.	Berechne $18^2 + 11^2$.	324 + 121 = 445
9.	Für 2 Hamster reicht das Futter 14 Tage. Es kommen 5 Hamster dazu. Wie lange reicht das Futter?	2 Hamster 14 Tage 1 Hamster 28 Tage 7 Hamster 4 Tage Antiproportionalität
10.	Berechne das 12-fache von 0,125.	0,125 = $\frac{1}{8}$ 8-fache von $\frac{1}{8}$ ist 1 4-fache von $\frac{1}{8}$ ist 0,5 12-fache von $\frac{1}{8}$ ist 1,5

6. Rechnerfreie Aufgaben

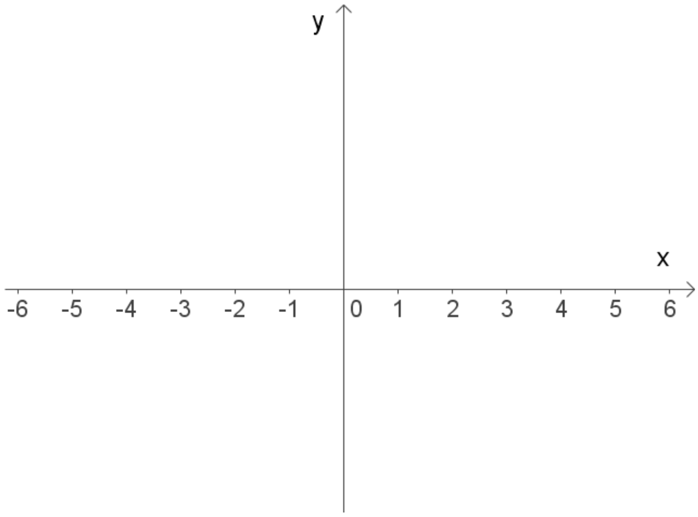
Aufgabe 1

a) Bestimme den Grad, die Nullstellen und das Verhalten für $x \to \pm\infty$.
b) Skizziere mit diesen Informationen einen möglichen Verlauf der Graphen in verschiedenen Farben.

(I) $f(x) = -(x-3)\cdot(x+2)\cdot x$

(II) $g(x) = (x-1)\cdot(x+4)\cdot(x^2+3)$

(III) $h(x) = x^4 - 9x^2$



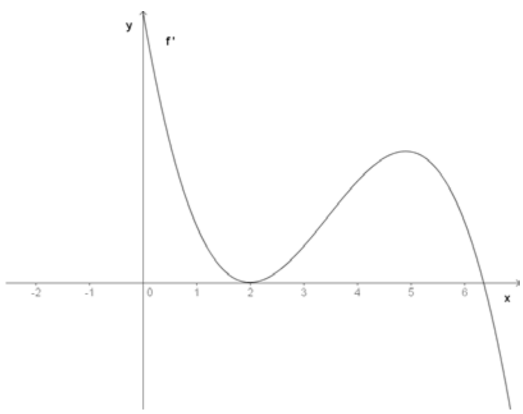
	Grad	Nullstellen	Verhalten $x \to +\infty$	Verhalten $x \to -\infty$
f				
g				
h				

Aufgabe 2

a) Untersuche $f(x) = x^3 - 12x$ auf Extremstellen.
b) Die Funktion f hat den Ableitungsterm $f'(x) = (x+2)^2 \cdot (x-3)\cdot(x-5)$. Begründe für alle möglichen Extremstellen, ob ein Minimum oder Maximum oder keines von beiden vorliegt.

Aufgabe 3

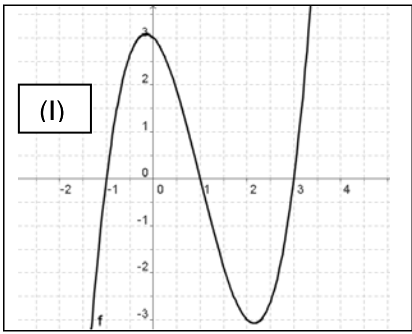
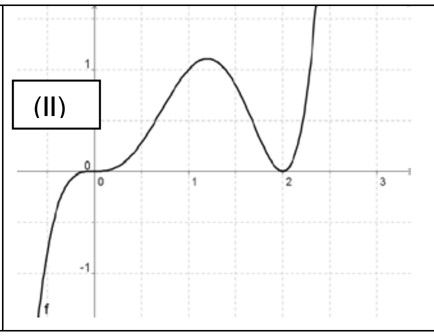
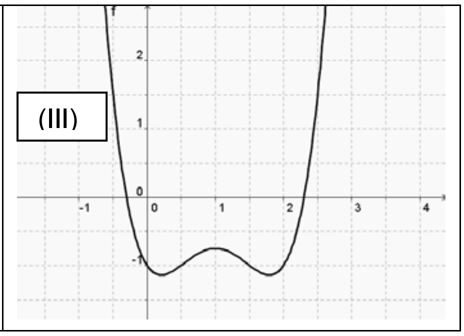
Der Graph zeigt einen Ausschnitt des Ableitungsgraphen einer Funktion f. Mache möglichst viele Aussagen über die zugehörige Ausgangsfunktion f. Begründe deine Aussagen.



7. Klassenarbeitsaufgaben

Aufgabe 1

a) Angenommen, es handelt sich in jedem der unten abgebildeten Fälle um eine ganzrationale Funktion. Welchen Grad muss diese jeweils mindestens haben? Begründe!
b) Gib einen Funktionsterm für eine ganzrationale Funktion mit einem solchen Graphen an.

Aufgabe 2

Gib jeweils eine ganzrationale Funktion an, die die folgenden Eigenschaften besitzt.

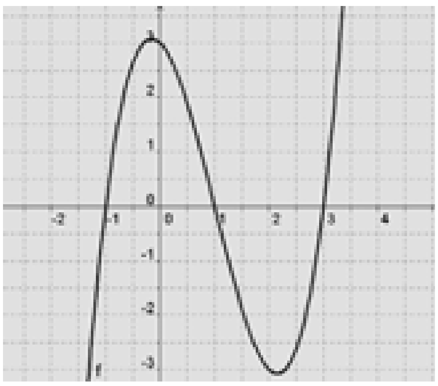
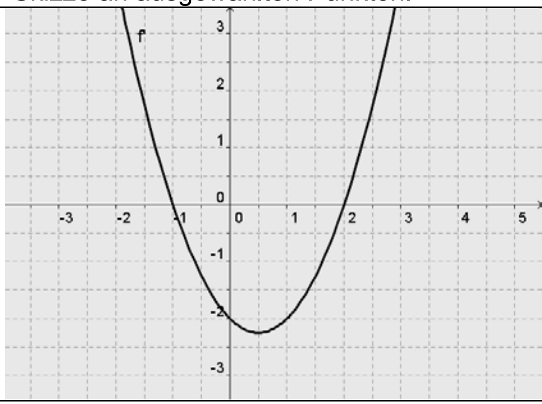
Funktion f …	Funktion g …	Funktion h…
• hat eine Berührstelle mit der x-Achse bei x = 2. • hat eine weitere Nullstelle bei x = 0.	• hat eine Nullstelle mit Vorzeichenwechsel und waagerechter Tangente bei x = 1. • besitzt keine weitere Nullstelle und den Grad 5.	• besitzt keine Nullstellen. • ist y-achsensymmetrisch.

Aufgabe 3

Untersuche mithilfe des Vorzeichenwechselkriteriums die folgenden Funktionen auf Extremstellen.

a) $f(x) = x^3 - 12x$ b) $f(x) = x^4 - \frac{4}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2$

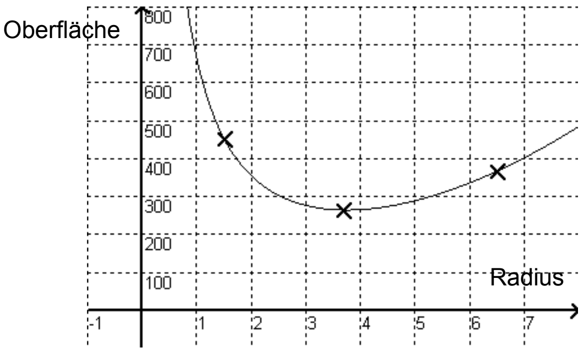
Aufgabe 4

a) Skizziere zu dem angegebenen Funktionsgraphen den Graph der Ableitungsfunktion. Erläutere deine Skizze an ausgewählten Punkten und Abschnitten.	b) Skizziere zu dem angegebenen Graphen der Ableitungsfunktion den Graphen einer möglichen Ausgangsfunktion und erläutere deine Skizze an ausgewählten Punkten.
	

Aufgabe 5

Eine Klasse hat ein Modell für den Materialverbrauch bei der Herstellung einer Cola-Dose (Inhalt 330 cm^3) aufgestellt.
Der gefundene Term der Oberflächenfunktion O und der zugehörige Graph sind hier dargestellt.

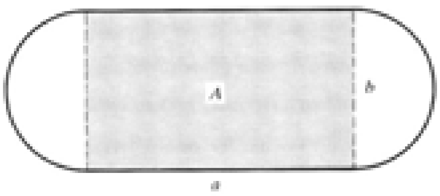
$O(r) = 2\pi r^2 + \frac{660}{r}$,r in cm, O in cm^2



a) Erläutere den Begriff ‚mathematisches Modell‘.
b) Beschreibe den Graphen vor dem Hintergrund der Situation. Skizziere zu den drei angegebenen Punkten eine passende Dosenform und begründe diese.

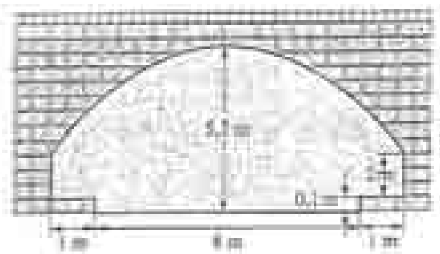
Aufgabe 6

Ein Sportstadion, das aus einer rechteckigen Spielfläche mit zwei angesetzten Halbkreisen besteht und einen Umfang von 400 m hat, soll so angelegt werden, dass das Spielfeld A eine maximale Fläche hat.
Vergleiche deine Berechnung mit den Normmaßen für Fußball-Bundesligaspiele:
$90\text{ m} \le a \le 115\text{ m}$ und $45\text{ m} \le b \le 75\text{ m}$.



Aufgabe 7

Abgebildet ist der Querschnitt einer Eisenbahnbrücke, unter der eine zweispurige Straße durchführt.
Der Brückenbogen wird bei geeigneter Wahl des Koordinatensystems durch eine Parabel der Form $a \cdot x^2 + b$ beschrieben.
Auf beiden Seiten der Straße befindet sich je ein 1 m breiter und um 10 cm erhöhter Fußweg.

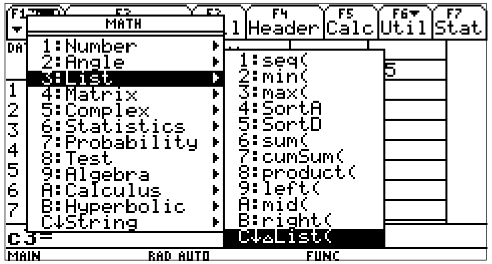
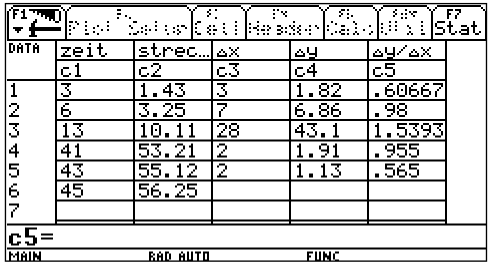


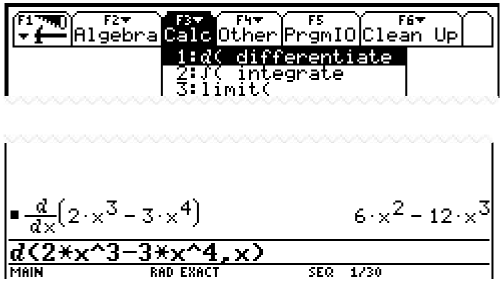
a) Zeichne das Koordinatensystem in die Skizze.
b) Formuliere die Bedingungen für die gesuchte Funktion.
c) Für welche maximale Durchfahrtshöhe darf die Durchfahrt freigegeben werden.

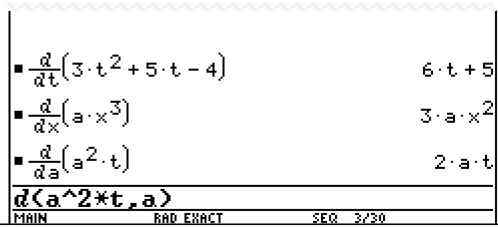
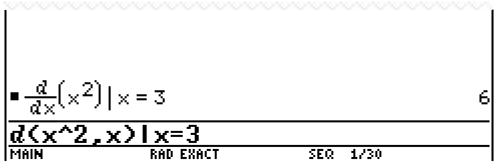
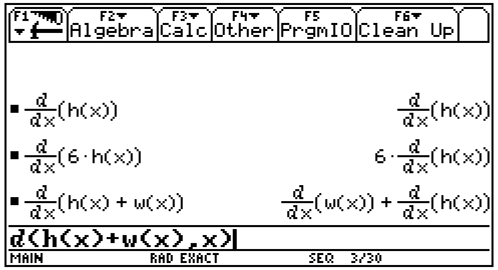
Calimero

©PAGOT

TC-Hilfe: Änderungsraten und Ableitungsfunktionen

<table>
<tr><th>Was willst Du?</th><th>Was tust Du?</th><th>Was siehst Du?</th><th>Hinweise</th></tr>
<tr>
<td>Berechnung der Änderungsrate für eine Tabelle
1. Berechnung der x-Differenzen
2. Berechnung der y-Differenzen</td>
<td>Nach Eingabe der Daten im Data-Matrix-Editor in die Spalten c1 und c2, wird in c3 die x-Differenz und in c4 die y-Differenz gebildet
Befehl: ‚ΔList()’
findet man mit [2nd] [5] im ‚Math’-Menü.</td>
<td>
</td>
<td>Der letzte Eintrag fehlt, da man für jede Differenz zwei Zellen benötigt.</td>
</tr>
<tr>
<td>Berechnung der Änderungsrate für eine Tabelle
3. Quotientenbildung</td>
<td>3. Der Quotient aus c4 und c3 wird gebildet</td>
<td>
</td>
<td>Der Rechner ordnet die Differenz zwischen erster und zweiter Zelle dem ersten x-Wert zu.
Das heißt, die mittlere Änderungsrate des Intervalls steht am Anfang des Intervalls.</td>
</tr>
<tr>
<td>Ableitung einer Funktion bestimmen</td>
<td>Im ‚Calc’-Menü (F2) des ‚Home’-Fensters die Nummer 1 auswählen:
1: d(differentiate
oder 2nd + 8

Eingabe: d(Funktionsterm,x)</td>
<td>
</td>
<td>Die unabhängige Variable (hier x) muss auch angegeben werden.</td>
</tr>
</table>

Was willst Du?	Was tust Du?	Was siehst Du?	Hinweise
Ableitung einer Funktion bestimmen, nicht unbedingt mit der Variablen x	Im ‚Calc'-Menü (F2) des ‚Home'-Fensters die Nummer 1 auswählen: 1:*d*(differentiate Eingabe: *d*(Funktionsterm,Variable)		Die unabhängige Variable muss nicht immer x sein. Man erkennt die Variable am so genannten Differential *d*x, bzw. *d*a, bzw. *d*t, bzw. …
Ableitung an einer Stelle	Im ‚Calc'-Menü (F2) des ‚Home'-Fensters die Nummer 1 auswählen: 1: *d*(differentiate Eingabe: *d*(Funktionsterm,x)| x=*Stelle*		
Ableitung einer allgemeinen Funktion	Im ‚Calc'-Menü (F2) des ‚Home'-Fensters die Nummer 1 auswählen: 1:*d*(differentiate Eingabe: *d*(Funktionsterm,x)		Hier werden die Ableitungen der allgemeinen Funktionen h und w berechnet. Der letzte Ausdruck liefert die Summenregel (h(x) + w(x))' = h(x)' + w(x)'. Der Rechner als Formelsammlung.

Das sollst Du im Kopf können

Aufgabe 1

a) Berechne $16^2 - 2^8$.

b) Eine Seitenhalbierende im Dreieck wird durch S im Verhältnis 1:2 geteilt.
Wie konstruiert man S? Wie lang sind die Teilstrecken, in die eine Seitenhalbierende s_c = 12 cm geteilt wird?

c) Löse die Gleichung: $3 \cdot (2x - 7) = 9$

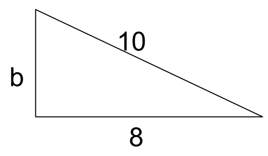
d) Ein Preis ist von 50 € auf 60 € gestiegen. Um wie viel Prozent ist der Preis gestiegen?

e) Berechne den Mittelwert von 4; 6; 8; 10.

f) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit aus einem Skatspiel ein Ass zu ziehen?

g) Bestimme: $(0{,}5x - 2y)^2 =$

h) Berechne b:



i) Bilde die Ableitung zur Funktion f mit $f(x) = 0{,}5x^4 + 3x^2 - 5$.

j) Berechne $\frac{3}{8}$ von 24.

Aufgabe 2

a) Schreibe in kg: 2,03 t.

b) Berechne: $15 \cdot 14 =$

c) Eine verschobene Normalparabel hat den Scheitelpunkt S(-2 | -3). Bestimme die Funktionsgleichung der Parabel.

d) Gib in Prozent an: 0,004.

e) Bestimme drei Nullstellen der Funktion f mit $f(x) = -3 \cdot \sin(2x)$.

f) Einem Quadrat mit a = 5 cm ist ein möglichst großer Kreis einbeschrieben.
Mit welcher Formel lässt sich seine Flächengröße berechnen?

g) Löse die Gleichung $4 \cdot x - x^2 = 0$.

h) Die fünfstellige Zahl 3047_ soll durch 3 teilbar sein. Bestimme eine mögliche letzte Ziffer.

i) Ein Kapital von 500 € verzinst sich mit 3,5 %.
Mit welchem Term ist das Guthaben nach 6 Jahren zu berechnen?

j) Berechne: 3,99 € + 7,99 € + 3,45 €.

Aufgabe 3

a) Gib die Steigung der Geraden an, die durch die Punkte $P_1(2 \mid 4)$ und $P_2(5 \mid 10)$ verläuft.

b) 5000 € werden mit 4 % verzinst. Wie viel Zinsen erhält man nach drei Monaten?

c) In einem Bus sitzen 39 Personen. Das Verhältnis von Frauen zu Männern ist 3:2.
Wie viele Frauen sind in dem Bus?

d) Berechne: $\frac{4}{5}+\frac{1}{4}=$

e) Berechne: $\frac{9}{5}:\frac{1}{2}=$

f) Schreibe die drei binomischen Formeln auf.

g) Gib die Symmetrieachse an: $f(x)=3\cdot(x+2)^2-1$.

h) Berechne: $\sqrt{45}:\sqrt{5}$

i) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, beim Würfeln eine Primzahl zu werfen?

j) Berechne den Mittelwert: 4, 6, -8, 10, 13.

Aufgabe 4

a) Schreibe als Wurzel $f(x)=x^{\frac{3}{2}}$.

b) Löse die Gleichung $x^2+x=0$.

c) Löse die Gleichung $\frac{5}{x}=\frac{10}{4}$.

d) Rechne um: 750 cm² in m².

e) Der Punkt A (-7 | 4) wird an der x-Achse gespiegelt. Gib die Koordinaten von A' an.

f) Schreibe 70 als ein Produkt von Primzahlen.

g) Claudia hat für den 80 € teuren MP3-Player 16 € weniger bezahlt.
Wie viel Prozent Rabatt hat sie erhalten?

h) Berechne: 18^2+11^2

i) Für 2 Hamster reicht das Futter 14 Tage. Es kommen 5 Hamster dazu. Wie lange reicht das Futter?

j) Berechne das 12-fache von 0,125.

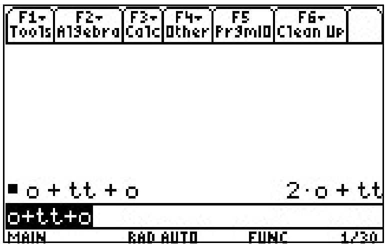
Das ist dein Basiswissen

Mit diesem Band 9 ist CAliMERO am Ende des Jahrgangs 10 angekommen. Ein besonderer Aspekt in diesem Projekt ist der Einsatz des TC – auch zur Entwicklung des funktionalen Denkens. Folgende Aufgaben aus vergangenen Bänden stellen hier exemplarisch Eckpfeiler des Basiswissens dar.

Falls du Wissenslücken feststellst, findest du weitere Aufgaben in dem entsprechenden Band.

Band 1 – ‚Mach den Otto zur Null'

Aufgabe 1



a) Variiere die Eingabe des Namens Otto mit verschiedenen Rechenzeichen. Finde einen Eingabeterm, bei dem sich besonders viel ändert.

b) Erkläre für zwei deiner Variationen, welche Rechengesetze angewendet wurden.

c) Paul hat beim Variieren den rechts abgebildeten Ausgabeterm erhalten. Er fragt sich, warum das ‚tt' nicht noch weiter vereinfacht wird. Erkläre!

Aufgabe 2

a) Mache aus Hannah die folgenden Terme:

i) $a^2 \cdot h^2$ ii) $h^2 + a^2 – n^2$ iii) $n^2 + 2\,a$

b) Mache aus Hannah eine Null!

c) Kann man aus Hannah auch eine 1 oder eine 2 machen?

d) Erläutere anhand der Rechengesetze die Umformungen aus Teil a)

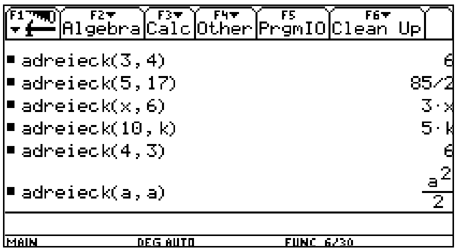
Band 1 – Flächen- und Volumenformeln

Aufgabe 1

Die Formel für den Flächeninhalt eines Dreiecks lautet

$A = \frac{1}{2} \cdot \text{Grundseite} \cdot \text{Höhe} = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h$.

Im TC soll die Formel ‚adreieck' heißen.



a) Was bedeuten die eingegebenen Ausdrücke?
b) Skizziere zu jedem Ausdruck ein bzw. einige Dreiecke.

Aufgabe 2

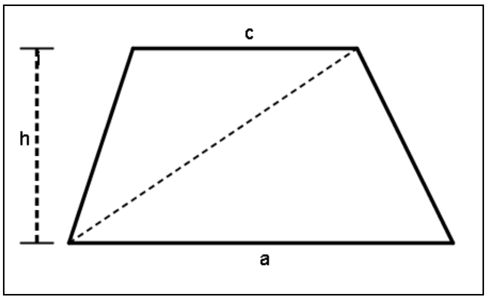
a) Es sollen Dreiecke mit Grundseiten der Länge 5 cm untersucht werden. Erstelle einen Term für die Fläche dieser Dreiecke. Bestimme damit die Fläche für die Höhen 8 / 12,5 / $\frac{17}{4}$ / 23,2.

b) Betrachte die Zuordnung Höhe → Fläche. Gib dazu im ‚y='-Editor die Formel ein.
Um was für eine Art von Zuordnung handelt es sich? Begründe.
Beantworte mit der Tabelle und/oder Graphik:
Welchen Flächeninhalt hat ein Dreieck mit der Höhe 7 cm?
Welches Dreieck hat den Flächeninhalt 40 cm^2 (6 cm^2 ; 100 cm^2)?

Band 3 – Einführung linearer Funktionen(-scharen)

Aufgabe 1

Im Baustein ´Terme´ hast du gelernt, wie man mit dem TC zum Beispiel Flächeninhalte verschiedener geometrischer Figuren mithilfe einer Formel berechnen kann.



a) Begründe geometrisch, dass

$$\text{atrapez}(a,c,h) = \frac{1}{2}ah + \frac{1}{2}ch$$

die Formel für den Flächeninhalt eines Trapezes angibt.

b) Gib die Formeln zu den unten stehenden Eintragungen an und skizziere die Zuordnungen mithilfe des y-Editors. Erkläre den Fall x = 0 geometrisch.

(1) atrapez(6,4,x) (2) atrapez(6,x,2) (3) atrapez(x,4,2)

c) Gib mindestens drei weitere Terme der oberen Art in den TC ein und notiere die TC-Ausgabe. Welche Form haben alle ausgegebenen Terme gemeinsam?

Aufgabe 2

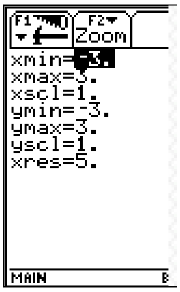
Gib jeweils Bedingungen für die lineare Funktion f mit $f(x) = m \cdot x + b$ an, so dass

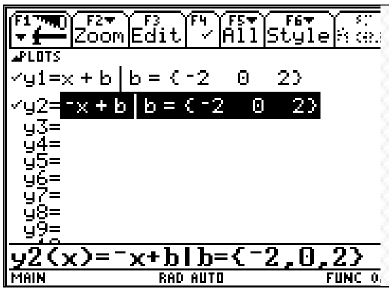
- der Graph nicht durch den 2. Quadranten verläuft.
- der Graph nur im 2. und 4. Quadranten verläuft.
- der Graph durch den 1. Quadranten verläuft.

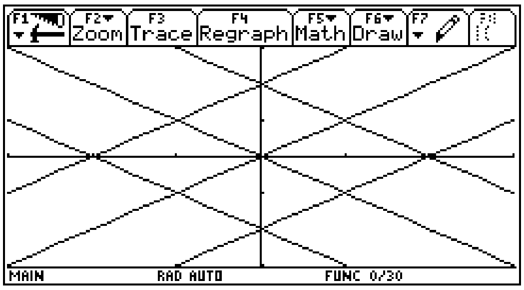
Notiere deinen Term und lasse deinen Nachbarn kontrollieren.

Aufgabe 3

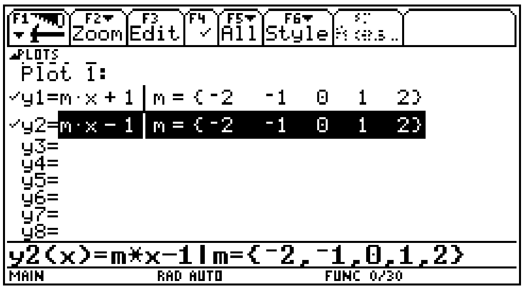
a) Katja soll das Bild auf ihrem TC zeichnen und hat folgende Eingaben gemacht. Erläutere die Eingabe und beschreibe, was sie bewirkt. Erstelle die Zeichnung mit deinem TC. (Hinweis: Wenn du schnell zeichnen möchtest, wähle xres=9.)

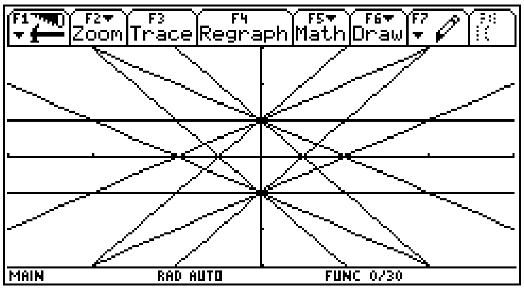






b) Jetzt gibt Katja folgendes in den y-Editor ein und erhält das rechte Bild.
Erläutere die Eingabe und die Wirkung.





Band 5 – ‚Graphenlaboratorien'

Graphenlaboratorium 1

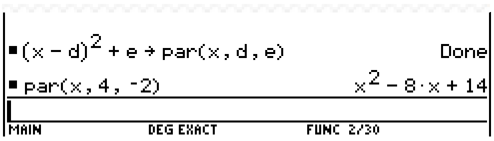
Die ‚Mutter aller Parabeln' ist die Normalparabel $y(x) = x^2$.
Sie ergibt sich aus der allgemeinen Form $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$, wenn man a = 1, b = 0 und c = 0 setzt.
Untersuche, wie sich der Graph der Funktion im Vergleich zur Normalparabel ändert, wenn man die Parameter variiert. Denke daran, die Parameter nur einzeln zu variieren. Beginne mit dem Parameter c bei konstanten Parametern b und c. Führe dann auf ähnliche Weise eine Untersuchung von $f(x) = a \cdot x^2$ für den Parameter a durch. Untersuche danach den Einfluss des Parameters b.

Graphenlaboratorium 2

Die ‚Mutter aller Parabeln' ist die Normalparabel $y(x) = x^2$.
Sie ergibt sich aus der faktorisierten Form $f(x) = a \cdot (x - m) \cdot (x - n)$, wenn man a = 1, m = 0 und n = 0 setzt.
Untersuche, wie sich der Graph der Funktion im Vergleich zur Normalparabel ändert, wenn man die Parameter variiert. Denke daran, die Parameter nur einzeln zu variieren.

Graphenlaboratorium 3

Untersuche die Scheitelpunktform $y(x) = a \cdot (x - d)^2 + e$. Benutze zur Untersuchung das Makro ‚par(x,d,e)'.



Vorsicht, der TC multipliziert sofort aus, du kannst also nach der Eingabe von par(x,4,-2) nicht mehr erkennen, dass es sich um die Form $y(x) = (x-4)^2 - 2$ handelt ($d = 4; e = -2$).

Nachfolgend ein Beispiel, wie man mit dem TC mit einer Eingabe Funktionen mit verschiedenen Parameterwerten erzeugen kann.

$y_1(x) = par(x,1,e) \mid e = \{-8,1,5\}$ $\rightarrow$

$y_1(x) = (x-1)^2 - 8$
$y_1(x) = (x-1)^2 + 1$
$y_1(x) = (x-1)^2 + 5$

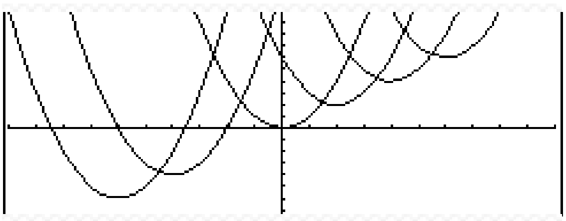
Aufgabe 1

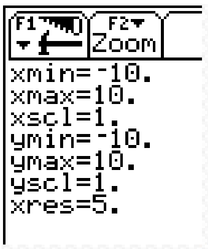
Bestimme die Parameter d und e in $par(x,d,e)$, so dass für den Scheitelpunkt S gilt:

a) $S(-3 \mid 5)$.
b) $S(6 \mid -3)$.
c) Beide Koordinaten des Scheitelpunktes sind gleich.
d) Die x-Koordinate des Scheitelpunktes ist doppelt so groß wie die y-Koordinate.

Aufgabe 2

Begründe: Die Scheitelpunkte aller Parabeln mit $y(x) = (x-d)^2 + d$ liegen auf der Ursprungsgeraden.





Tipps:
- Benutze par(x,d,d).
- Wähle für d verschiedene Werte.
- du kannst auch die Ursprungsgerade einzeichnen.

Aufgabe 8

Erzeuge mit $par(x,d,e)$ Parabeln, deren Scheitelpunkte auf der
- Geraden mit $y = 2x$ liegen,
- Geraden mit der Gleichung $y = -2x + 1$,
- Parabel mit der Gleichung $y = x^2$ liegen.

Begründe jeweils dein Vorgehen.

Band 7 – ‚Funktionenzoo‘

Aufgabe 1

a) Der Grundtyp aller kubischen Funktionen ist f mit $f(x) = x^3$. Er ergibt sich aus der allgemeinen Form $f(x) = a \cdot (x-b)^3 + c$, wenn man a = 1, b = 0 und c = 0 setzt. Untersuchen, wie sich der Graph der Funktion gegenüber dem des Grundtyps ändert, wenn man die Parameter a, b, c variiert.

b) Die allgemeine Form einer Potenzfunktion lautet $f(x) = a \cdot (x-b)^n + c$.
Erläutere die Bedeutung der Werte von a, b, c und n für den Graphen.

Aufgabe 2

Untersuche die Potenzfunktion mithilfe des Makros ‚pot’: $a \cdot (x-b)^k + c \rightarrow pot(x,k,a,b,c)$.

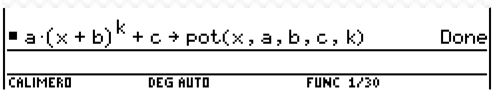
(1) Beschreibe, welche Bedeutung die einzelnen Parameter haben.

(2)
- Mit welcher Eingabe wird $f(x) = 2 \cdot (x-5)^4 - 8$ gebaut?
- Was bedeutet pot (1,3,1,-2,5)? Stelle eine Frage, für deren Beantwortung diese Eingabe eine Lösung liefert.
- Was musst du eingeben, um die Grundfunktionen f mit $f(x) = x^n$ zu erhalten?
- Mit welcher Eingabe kannst du den Funktionswert an der Stelle 3 von $f(x) = 24x^{-3} + \frac{1}{4}$ berechnen? Überprüfe dein Ergebnis durch eine Rechnung ohne Einsatz des TC.
- Was bedeutet pot(3,4,1,0,c)? Stelle eine Frage, für deren Beantwortung diese Eingabe eine Lösung liefert.
- Wie kann man mit pot die Schnittstellen mit der y-Achse bestimmen?

(3) a) Erläutere Edmunds Aussage. Was meinst du zu Martens Frage?

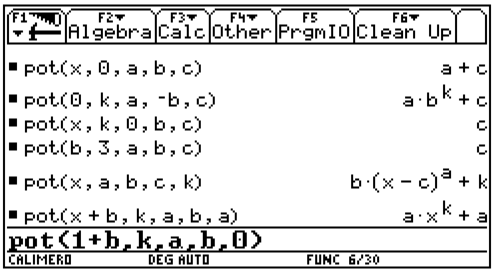
Edmund:
Mit ‚pot’ kann ich alle Funktionen, die ich bisher kennengelernt habe, bauen!

Marten:
Ich habe aus Versehen



eingegeben, ist das schlimm?

b) Erkläre die Ergebnisse des TC, auch das der Eingabezeile.



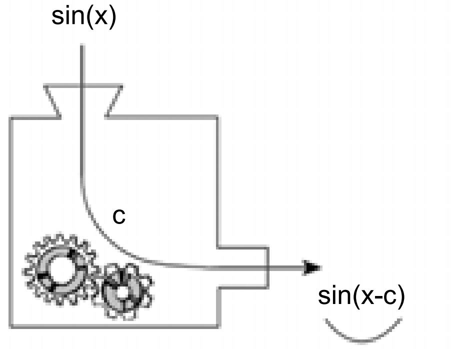
c) *Knobelaufgaben*
- Was muss man eingeben, um $mx + b$ als Ausgabe zu erhalten?
- Was muss man eingeben, um $ax^2 + bx + c$ zu erhalten?
- Gib drei Möglichkeiten an, *a* als Ausgabe zu erhalten.

Band 8 – ‚Funktionenlabor'

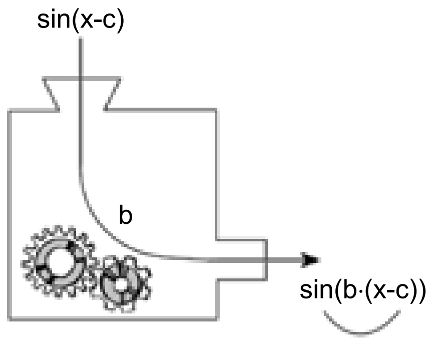
Aufgabe 1 Funktionenlabor

Untersuche die Bedeutung der Parameter im Graphen der Funktion f mit $f(x,a,b,c,d) = a \cdot \sin(b(x-c)) + d$ im Vergleich zum Graphen der Grundfunktion g mit $g(x) = \sin(x)$.
Betrachte dazu auch die ‚Funktionsmaschine' und benenne die einzelnen Teilschritte.

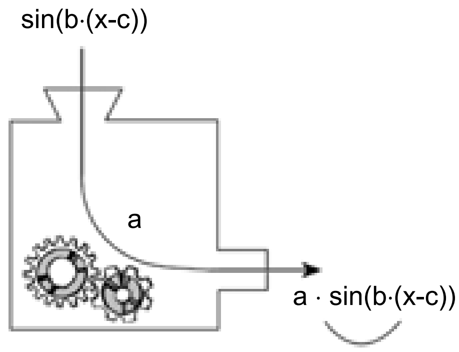
Schritt 1



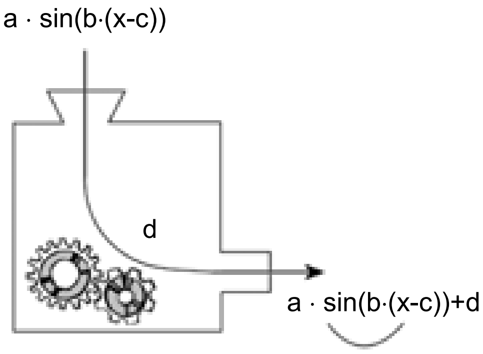
Schritt 2



Schritt 3



Schritt 4



Aufgabe 2

Vergleiche die beiden Terme

$$f_1(x) = a \cdot \sin(b \cdot (x - c_1)) + d$$
$$f_2(x) = a \cdot \sin(b \cdot x - c_2) + d$$

im Hinblick auf die Funktionsmaschine.

Rainer behauptet: „Es ist egal, welchen der beiden Terme man nimmt, um das Aussehen des Graphen der Grundfunktion g zu verändern. Die Terme sind äquivalent!"
Nimm Stellung zu seiner Behauptung.

Calimero

Teilnehmerinnen und Teilnehmer, die an der Erstellung der Materialien beteiligt sind

Name	Vorname	Dienststelle
Borggreve	Peter	Gymnasium Syke
Breidert	Lutz	Gymnasium Himmelsthür
Bremeier	Ulrich	Gymnasium Syke
Dierks	Andreas	Gymnasium Himmelsthür
Glaser	Torsten	Niedersächsisches Kultusministerium
Hagen	Marten	Gymnasium Papenburg
Körner	Henning	Studienseminar für das Lehramt an Gymnasien Oldenburg
Kronabel	Edmund	Gymnasium Papenburg
Krüger	Ulf-Hermann	Gymnasium Syke
Lampe	Hans-Ulrich	Studienseminar für das Lehramt an Gymnasien Stadthagen
Pinkernell	Guido	Technische Universität Darmstadt
Röhrkasten	Cornelia	Gymnasium Hankensbüttel
Rolfes	Rainer	Gymnasium Papenburg
Schlichting	Folkert	Studienseminar für das Lehramt an Gymnasien Göttingen
Sperlich	Thomas	Studienseminar für das Lehramt an Gymnasien Göttingen
Stenten-Langenbach	Hans-Dieter	Gymnasium Marianum Meppen
Stöber	Torsten	Gymnasium Johanneum Lüneburg
Suhr	Friedrich	Gymnasium Johanneum Lüneburg
Toth-Hohmann	Anja	Gymnasium Hankensbüttel
Vehling	Reimund	Studienseminar für das Lehramt an Gymnasien Hannover II
Weißmann	Karin	Gymnasium Hankensbüttel
Wichmann	Achim	Gymnasium Georgianum Lingen
Wierzyk	Barbara	Gymnasium Johanneum Lüneburg

CAliMERO

Computer-Algebra im Mathematikunterricht: Entdecken, Rechnen, Organisieren

METHODISCHE UND DIDAKTISCHE HANDREICHUNG
BAND 9

Kontakt:

T³ DEUTSCHLAND

www.t3deutschland.de

Kooperationspartner:

Texas Instruments

education.ti.com/deutschland

www.calimero.com