
Thema: Gegenseitige Lage dreier Ebenen und deren Darstellung

Franz Schlöglhofer

☒ TI-TI-NSPIRE™ CAS

Schlagworte: Ebenengleichung, Punkte einer Ebene, Gleichungssystem lösen, Lage einer Ebene im Koordinatensystem, Parameterdarstellung einer Geraden, 3D-Grafik

Unterrichtsmaterial

Aufgaben:

- 1) Gegeben sind die drei Ebenen $ea := 2x - y + z = 1$, $eb := -x + y - 2z = 3$ und $ec := x - 2y - z = 2$. Begründe durch Berechnung des Schnittpunkts der Ebenen, dass sich die Ebenen in einem Punkt schneiden. Berechne den Schnittpunkt ohne Rechner.

Stelle die drei Ebenen in der 3D-Grafik mit TI-NSPIRE dar.

Berechne den Schnittpunkt mit Hilfe des TI-NSPIRE. und stelle sie ebenfalls grafisch dar. Beschreibe die Berechnungen, die in der beigelegten .tns-Datei zur Darstellung der Ebenen verwendet werden.

- 2) Gegeben sind jeweils drei Ebenengleichungen. Berechne (falls existiert) den Schnittpunkt der drei Ebenen. Stelle die Ebenen mit dem TI-NSPIRE dar und. Beschreibe die Lage der Ebenen insbesondere für die Fälle, dass kein Schnittpunkt der drei Ebenen existiert.

$$\text{a) } \begin{cases} x + y - z = 2 \\ -x + 2y + z = 7 \\ -y + z = -1 \end{cases}, \text{ b) } \begin{cases} -x + 2y - 3z = -4 \\ 2x - y + z = 1 \\ 2x - y + z = -1 \end{cases}, \text{ c) } \begin{cases} x + 2y - z = -4 \\ -x - 2y + z = -4 \\ 2x + 4y - 2z = -8 \end{cases},$$

$$\text{d) } \begin{cases} x + z = 0 \\ y + 2z = 0 \\ x + 3y - z = 0 \end{cases}, \text{ e) } \begin{cases} 9x + 5y + 20z = -30 \\ x - 5y + 5z = 5 \\ 6x + 20y + 5z = 30 \end{cases}$$

Unterscheide dabei die folgenden Fälle und begründe, unter welchen Bedingungen kein einzelner Schnittpunkt existiert:

Die drei Ebenen schneiden sich in einem Punkt.

Die drei Ebenen sind parallel.

Die drei Ebenen fallen zusammen.

Zwei der drei Ebenen sind parallel oder zusammenfallend.



Didaktischer Kommentar

Zunächst sollen die Berechnungen ohne TI-NSPIRE durchgeführt und dabei genauer auf das Gleichungssystem eingegangen werden. Anschließend sollen Berechnungen mit TI-NSPIRE folgen. Einerseits kann die fertige TI-NSPIRE-Datei verwendet werden. Dann brauchen nur die Gleichungen eingegeben werden. Die automatischen Berechnungen mit NOTES in der .tns-Datei sollen dabei beschrieben und erklärt werden. Fortgeschrittene Schüler und Schülerinnen können die .tns-Datei selbständig erstellen.

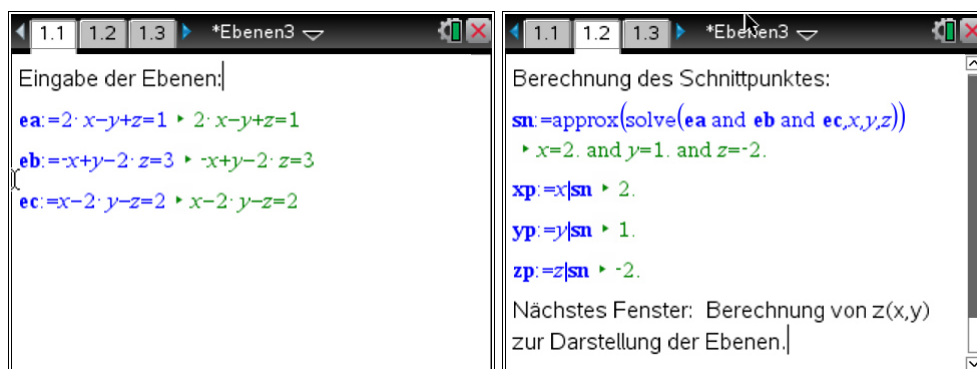
Vorschlag zur Umsetzung

Aufgabe 1) Gleichungssystem der drei Ebenengleichungen:
$$\begin{cases} 2x - y + z = 1 \\ -x + y - 2z = 3 \\ x - 2y - z = 2 \end{cases}$$

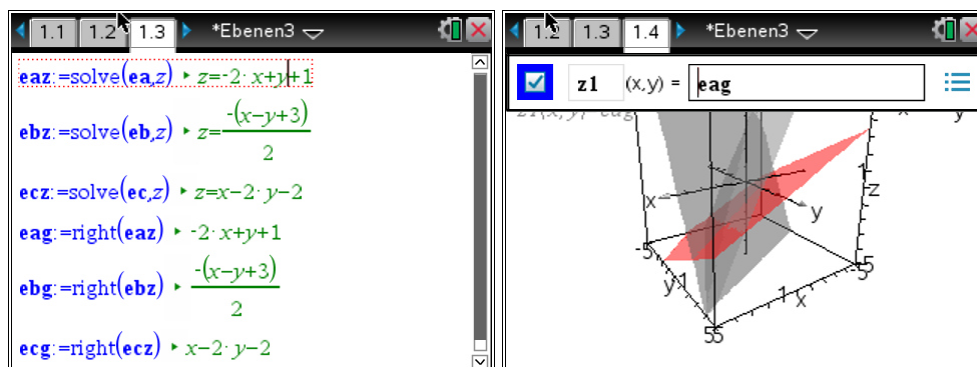
Lösung des Gleichungssystems: $x = 2$, $y = 1$, $z = -2$

Schnittpunkt $S = (2; 1; -2)$

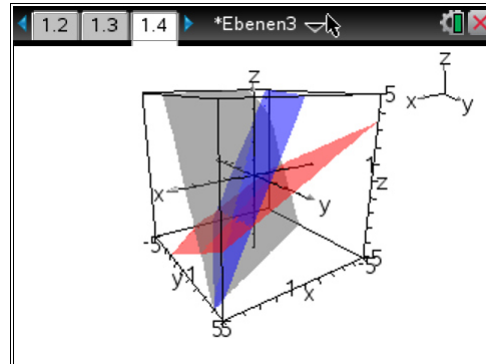
Eingabe der Ebenen im Fenster 1.1 und Berechnung des Schnittpunktes im Fenster 1.2.



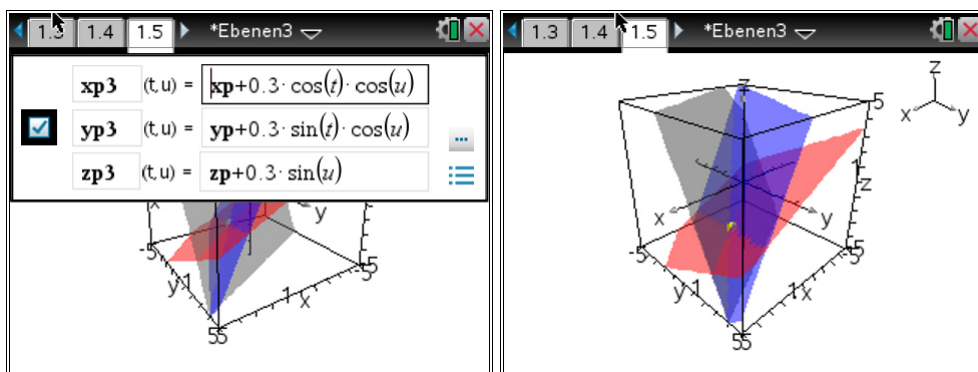
Darstellung als Funktion $z(x,y)$. Berechnung z.B. für die Ebene ea: Zunächst wird aus der Ebenengleichung z berechnet (eaz). Anschließend verwendet man nur die rechte Seite der Gleichung und erhält damit einen Ausdruck für $z(x,y)$ (Berechnung von eag). Neben eag werden analog ebg und ecg berechnet.



Darstellung der Ebenen:

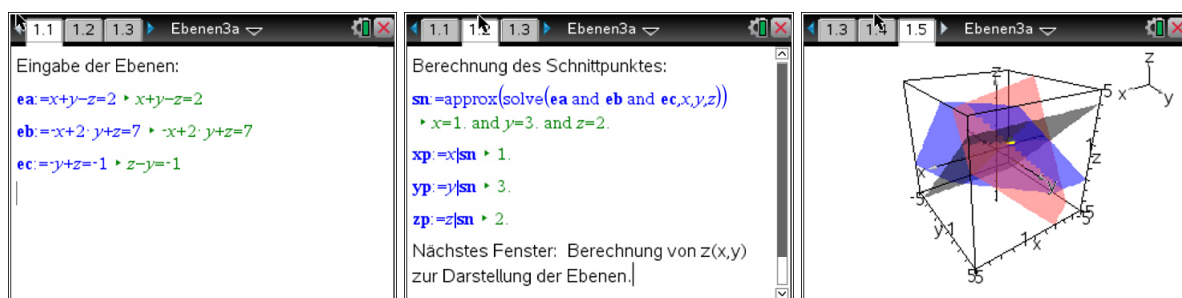


Für eine bessere Sichtbarkeit des Schnittpunktes kann um den Punkt eine Kugel dargestellt werden:

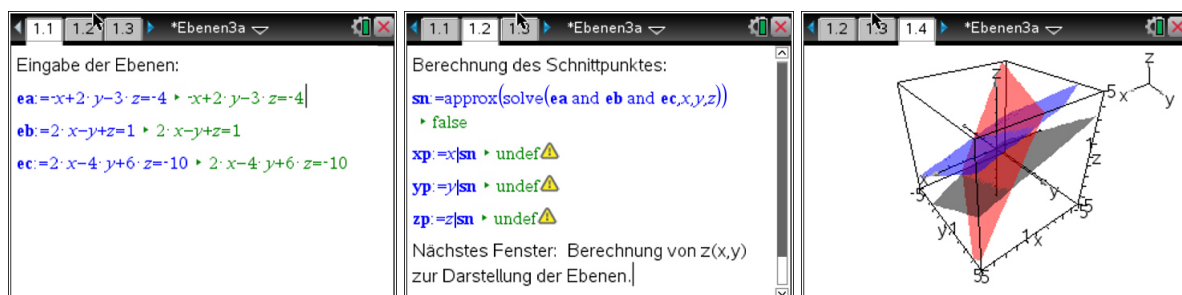


Aufgabe 2)

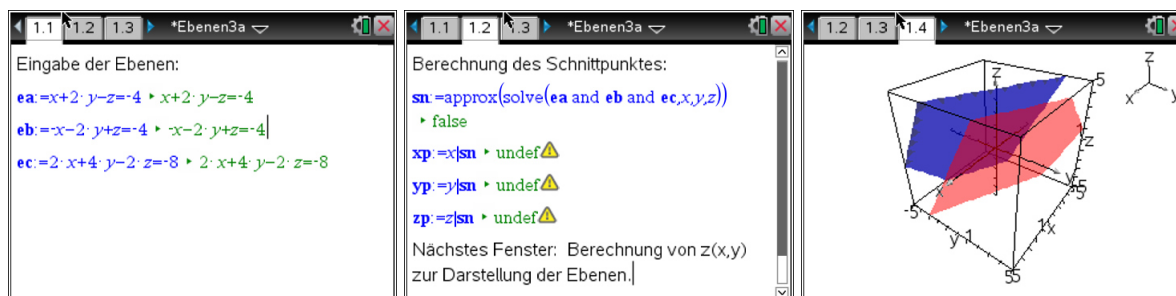
a) Die Ebenen schneiden einander im Punkt $S=(1; 3; 2)$



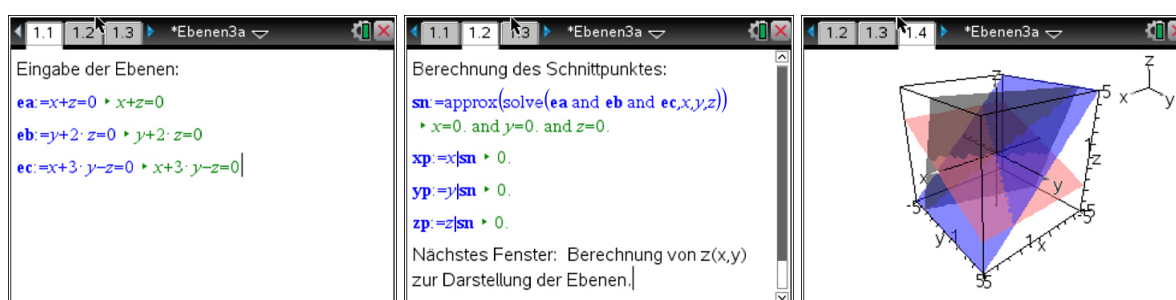
b) Zwei Ebenen sind parallel, eine Ebene schneidet die beiden anderen.



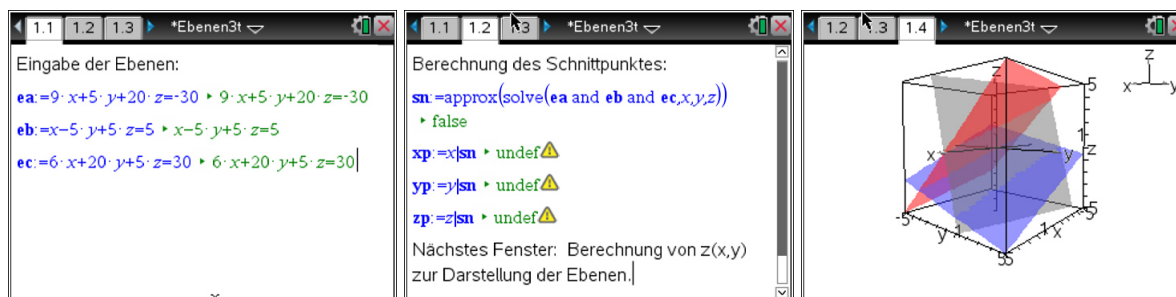
c) Zwei Ebenen fallen zusammen, die dritte Ebene ist dazu parallel



d) Die Ebenen schneiden sich im Punkt S=(0; 0; 0)



e) Jeweils zwei Ebenen schneiden sich in einer Geraden. Die Geraden sind parallel.



Technologiehilfe

Verwendung bzw. Anfertigung eines TNS-Modells zur Darstellung der Ebenen und des Schnittpunktes (falls er existiert).

Aus dem Gleichungssystem kann oft schon auf die Lage der drei Gleichungen geschlossen werden. Damit kann die Verwendung der fertigen Datei durchaus Unterstützung für den Mathematikunterricht sein. Automatisch wird der Schnittpunkt der drei Ebenen berechnet.

Anhand der Darstellung soll die geometrische Lage der Ebenen untersucht werden und im Zusammenhang mit dem Gleichungssystem gesehen werden.

Fortgeschrittenen Schülern und Schülerinnen könnte die Aufgabe gestellt werden, die TNS-Datei selbst zu erstellen.