Mit dem GTR zu politischer Bildung: Eine Wählerstrom-Analyse

Heinz Pichler

Vorbemerkung

Nach Bekanntwerden von Wahlresultaten kommt in politischen Diskussionen mit Schülern nicht selten das Thema "Wählerstromanalyse" zur Sprache. Dabei wird oft eine diffuse Skepsis gegenüber Wahlauswertungen artikuliert.

Ein Problem liegt wohl im geringen Wissen unserer Schülerinnen und Schüler über anwendungsorientierte Mathematik und die Möglichkeiten, solche Wahlauswertungen aufzuklären. Dieses Beispiel ist eine treffliche Gelegenheit, Wesen und Macht mathematischer Werkzeuge aufzuzeigen. Die Listen- und Matrizenfunktionen des TI-84 Plus[1] leisten dabei unerwartet Hilfe ... .

Die Ausgangssituation und das Problem

Nehmen wir der Einfachheit halber an, dass bei der aktuellen Wahl "B" nicht nur dieselben drei Parteien P_1, P_2 und P_3 wie bei der vorangegangenen Wahl "A" angetreten sind, sondern dass in den drei ausgesuchten Wahlkreisen S_1, S_2 u. S_3 überdies wieder dieselben Wähler wie ursprünglich zur Urne geschritten sind! Die Wahlergebnisse der alten Wahl sind in der Matrix [A] (Abb.1a) festgehalten, jene der aktuellen Wahl in Matrix [B] (Abb.1b), wobei jede Zeile für einen Sprengel und jede Spalte für eine Partei steht.

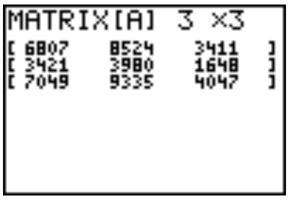

Abb. 1a

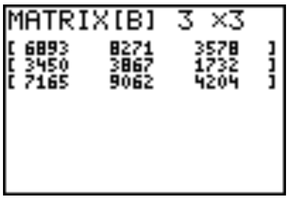

Abb. 1b

Diesen Tafeln, wie auch einer graphischen Darstellung, die durch Ausführung des Programms BARMATRX[2] zustande gekommen ist (Abb. 2 a,b mit Ymax=11000), ist vorderhand nicht viel mehr zu entnehmen, als dass P_2 in allen 3 Sprengeln die stimmenstärkste und P_3 die stimmenschwächste Partei war und ist, und dass in allen 3 Sprengeln P_1 und P_3 (auf Kosten von P_2) bescheiden dazugewonnen haben. (Geeignete graphische Darstellungen können Schülerinnen und Schüler im Unterricht z.B. auch selbst erstellen.)

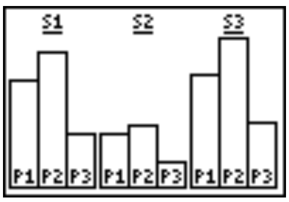

Abb. 2a

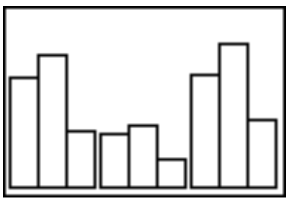

Abb. 2b

Entsprechend schwer fällt daher die Vorstellung, daraus die Prozentsätze c_{ij} jener Wähler filtern zu können, die gegenüber der letzten Wahl von Partei P_i zu Partei P_j gewechselt sind (Wählerstromanalyse).

Lösungsversuch

Die Anzahl der von Partei P_i zu Partei P_j wechselnden Wähler ΔW_{ij} steht zum Kundenstock A_i der Partei P_i bei der alten Wahl in einem proportionalen Verhältnis, sodass gilt

$$\Delta W_{ij} = - c_{ij} \cdot A_i \qquad (i \neq j)$$

mit c_{ij} als gesuchtem Wechselwähler-Prozentsatz. Über den Index i aufsummiert, belaufen sich die Stimmverschiebungen zwischen Alt- und Neuwahl für die drei Parteien somit auf:

$$\begin{aligned}
\Delta W_1 &= -A_1 \cdot (c_{12} + c_{13}) + A_2 \cdot c_{21} + A_3 \cdot c_{31} = B_1 - A_1 \\
\Delta W_2 &= A_1 \cdot c_{12} - A_2 \cdot (c_{21} + c_{23}) + A_3 \cdot c_{32} = B_2 - A_2 \qquad (1) \\
\Delta W_3 &= A_1 \cdot c_{13} + A_2 \cdot c_{23} - A_3 \cdot (c_{31} + c_{32}) = B_3 - A_3
\end{aligned}$$

Die Konstanz der Stimmengesamtheit $\Delta W_1 + \Delta W_2 + \Delta W_3 = 0$ macht die letzte Gleichung von den beiden anderen linear abhängig, sodass sie aus den folgenden Betrachtungen herauszufallen hat.

Einigen wir uns bei den unbekannten Wählerstromraten auf die Reihenfolge c_{12}, c_{13}, c_{21}, c_{23}, c_{31}, c_{32}, so erhalten die beiden Gleichungen aus (1) die matrizenähnliche Form:

$$\begin{array}{lllllll}
-A_1 \cdot c_{12} & -A_1 \cdot c_{13} & +A_2 \cdot c_{21} & & +A_3 \cdot c_{31} & & = B_1 - A_1 \\
+A_1 \cdot c_{12} & & -A_2 \cdot c_{21} & -A_2 \cdot c_{23} & & +A_3 \cdot c_{32} & = B_2 - A_2
\end{array}$$

Auf alle drei Wahlsprengel angewandt, führen sie zu der in den Rechner einzugebenden Matrix [E]=[$e(A_k)$] der Abb. 3 a,b und zur Stimmendifferenzmatrix [D]=[B_k-A_k] der Abb.3c.

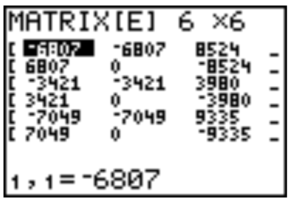

Abb. 3a

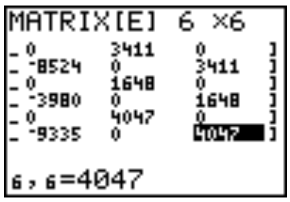

Abb. 3b

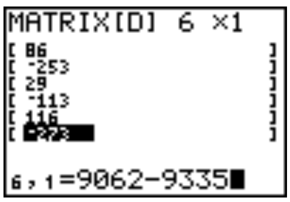

Abb. 3c

Die Lösung der Matrizengleichung [E]·[C]=[D] ergibt für die Koeffizientenmatrix [C] die Werte nach Abb.4. Sie wären – in anderer Gruppierung – auch über die Anweisung

```
rref(augment([E],[D]))
```

erhältlich. Zur graphischen Präsentation der in [C] abgelegten Wählerstromanalyse startet man abschließend das Programm WAHLDIA[2] (Abb.5); eine wichtige Aufgabe des Unterrichts wird es bleiben, dass die dargestellte Graphik auch Ergebnis eines Interpretationsprozesses der Schülerinnen und Schüler wird.

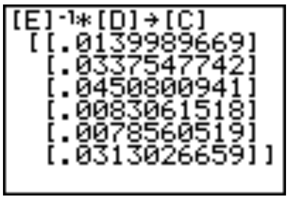

Abb. 4

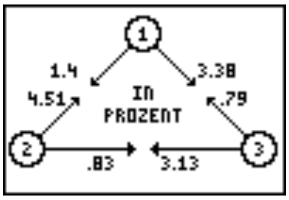

Abb. 5

Im Vergleich zum absoluten Abschneiden der Parteien nach Abb.1 a,b und Abb. 3c mag der relativ hohe Zugewinn der "Verliererpartei" P_2 aus den Reihen von P_3 überraschen. Noch eigenartiger mutet beim flüchtigen Hinsehen an, dass P_3 in Wechselbeziehung zu P_1 einen Gewinn von "3,38%-0,79%" verbuchen konnte, zu P_2 aber einen scheinbar ähnlichen Verlust von "3,13%-0,83%" hinnehmen musste und dennoch d e r Wahlsieger ist! Oder wurde in dieser Art der Interpretation ein schwerwiegender Fehler begangen?

Kontrolle

Die vorhin angestellten Betrachtungen könnten Zweifel an der Richtigkeit der Analyse-Resultate aufkommen lassen. Daher empfiehlt sich zumindest eine stichprobenartige Überprüfung, ob die gewonnenen Kennzahlen in Matrix [C] tatsächlich die eingetretenen Wahlverschiebungen nach sich ziehen. Für P_3 in S_3 sieht dies beispielsweise folgend aus:

```
7049*[C](2,1)+9335*[C](4,1)+4047-
                4047*([C](5,1)+[C](6,1))
```

Zur kompakten Verifizierung aller stattgefundenen Stimmenverschiebungen bringt man das Gleichungssystem (1) auf die Matrizenform $[A]\cdot[f(c_{ij})]=[B]$, deren linke Seite die Form

$$\begin{pmatrix} A_{S_1,P_1} & A_{S_1,P_2} & A_{S_1,P_3} \\ A_{S_2,P_1} & A_{S_2,P_2} & A_{S_2,P_3} \\ A_{S_3,P_1} & A_{S_3,P_2} & A_{S_3,P_3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1-c_{12}-c_{13} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & 1-c_{21}-c_{23} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & 1-c_{31}-c_{32} \end{pmatrix}$$

hat, gibt davon die Matrix $[f(c_{ij})]$ unter Verwendung der Elementnamen [C](1,1)...[C](6,1) in den Speicher [F] ein (Abb.6), bildet den Term [A]·[F] und vergleicht sein Resultat mit dem Ergebnis der aktuellen Wahl B (Abb.7).

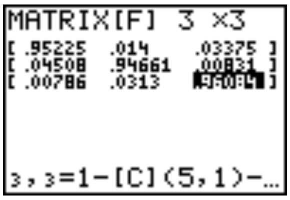

Abb. 6

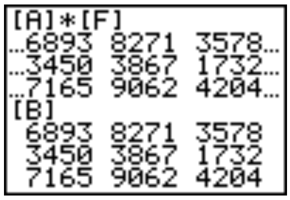

Abb. 7

Kritik

Natürlich haften dem gezeigten Lösungsverfahren eine Reihe von Mängeln an, von denen einige in einem in der TI-Materialiendatenbank zu findenden, umfangreicheren Artikel zu diesem Thema besprochen werden.

---

[1] Gleiches gilt für die Rechnermodelle TI-82 Stats, TI-83, TI-83 Plus / Silver Edition.

[2] Das Programm ist – zusammen mit einer ungekürzten Fassung dieses Artikels – von der Materialdatenbank kostenlos herunterladbar.

Autor:
Heinz Pichler, Spittal(Österreich)
pichler_h@lycos.at