Wilhelm Weiskirch

Materialverflechtung; eine Abituraufgabe aus Niedersachsen

Klausur- und Abituraufgaben spiegeln Inhalte eines Unterrichtsgangs wider. Deshalb soll im Folgenden kurz dargestellt werden, welche Inhalte in vier Semestern den Unterricht geprägt haben.

<u>Kursinhalte:</u>

12.1 Untersuchung von Interpolationsproblemen, Spline Funktionen, höhere Ableitungsregeln. Rationale Funktionen, Exponential- und Logarithmusfunktionen , lokale Approximation von Funktionsgraphen durch Kreise, Krümmung von Graphen Anwendungen im Straßenbau, Integrationsverfahren mit Anwendungen (Volumen, Bogenlänge, Fläche, Oberfläche) Hauptsatz mit Anwendungen

12.2 Berechnung von Hüllfunktion, Kegelschnitte, Kegelschnitte als Hüllfunktionen, Vektoren, Geraden und Ebenen, Linearkombinationen, Abstands- und Winkelberechnungen, Skalar- und Vektorprodukt, Verknüpfung zur Analysis durch parametrisierte Darstellung von Funktionen, parallele Kurven, Spiegelung einer Geraden punktweise an einer Parabel, besondere Kurven (wie z.B. die Konchoide)

13.1 Tabellen und Matrizen, Materialverflechtung und Marktforschung, besondere Matrizen, Gesetze für das Rechnen mit Matrizen, lineare Gleichungssysteme, inverse Matrizen, Codierung, Stücklisten - Problem, Input - Output – Analyse Wachstumsprobleme und Differentialgleichungen

13.2 Matrizen in der Abbildungesgeometrie, Matrizenpotenzen, Eigenvektoren, Maschinenüberwachung, Irrfahrten, Populationsdynamik magische Quadrate, Linearkombination, lineare Hülle, Vektorraum.

Die Lösung der Aufgabe erfordert eine entsprechend umfangreiche textliche Auseinandersetzung mit den gegebenen Problemen. Dies ist den Schülern allerdings nicht neu, da es im Unterricht und allen Klausuren Bestandteil der Aufgabenstellungen war. Die Schüler haben alle einen TI 92 in Dauerausleihe, d.h., dass im Unterricht, Zuhause und in den Klausuren der Rechner zur Verfügung stand. Die Rechner werden von mir vorher eingesammelt und alle mit den gleichen zusätzlichen Bausteinen gespeist, die wir im Unterricht erarbeitet haben. Über deren Einsatz können die Schüler dann selbst entscheiden.
Bei dieser Aufgabe handelt es sich um einen von zwei Aufgaben gleichen Umfangs für einen Leistungskurs, so dass die Schüler ca 150 min Zeit für die Bearbeitung hatten. Die Aufgabe ist von mir konzipiert. Teile erhielt ich auf einer Tagung von Josef Böhm.

Die Aufgabe

In einem Unternehmen werden die Grundmodule G1, G2 und G3 hergestellt und zunächst zu den Baugruppen B1, B2, und B3 zusammengestellt, um dann schließlich in einem weiteren Fertigungsprozess die beiden Endprodukte E1 und E2 zu erzeugen. Die beiden Tabellen geben die jeweiligen Zusammenhänge wieder.

	B1	B2	B3
G1	4	2	0
G2	1	3	1
G3	5	0	4

	E1	E2
G2	0	2
B1	3	0
B2	7	1
B3	0	2

a) Stellen Sie den Produktionsprozess in einem Gozintographen dar und bestimmen Sie den für die Bestellung von 100 ME von G1, 200 ME von G3, 400 ME von B1, 300 ME von B2, 800 ME von B3, 1000 ME von E1 und 2000 ME von E2 benötigten Produktionsvektor.
Erläutern Sie dabei Ihr Verfahren zur Bedarfsermittlung.
Erläutern und vergleichen Sie in diesem Zusammenhang $(E - V)^{-1} \cdot \vec{y} = \vec{x}$ bzw.
$\left(E + GOZI + GOZI^2 + GOZI^3 + ...\right) \cdot \vec{y} = \vec{x}$

b) In der folgenden Tabelle werden die Rohstoffkomponenten R1 bis R5 für die einzelnen Produkte und die Einkaufspreise pro Materialeinheit dargestellt.

	G1	G2	G3	B1	B2	B3	E1	E2	Preis/ Einheit
R1	2	1	4	0	2	0	0	0	3
R2	3	0	1	4	1	1	0	3	1
R3	1	4	0	2	7	0	0	0	5
R4	0	4	3	1	2	5	7	0	2
R5	5	4	0	3	0	0	0	0	6

Ergänzen Sie den Gozintographen aus Teil a) und erläutern Sie, dass die Matrix, die Sie unter **“Rohst“** im TI 92 aufrufen können, die zum ergänzten Graphen gehörige Gozintomatrix ist.
Erläutern Sie die Bedeutung der Matrix **“Rohst^2“**. Gehen Sie dabei insbesondere auf die erste Zeile und letzte Spalte ein.

Erläutern Sie für die Bestellung aus Teil a) ein Verfahren zur Berechnung der Kosten für die einzelnen Rohstoffe R1 bis R5.
Im Rahmen einer Kostenreduzierung bei der Produktion der Endprodukte wird auch an eine Reduzierung bei der Materialbeschaffung gedacht. Es soll erreicht werden, dass die Kosten des Endproduktes E1 maximal 2500 DM betragen.
In Verhandlungen mit dem Lieferanten sollen neue Tarife für die Rohstoffe R3 und R5 ausgehandelt werden. Geben Sie begründet einen Verhandlungsspielraum für die Preisgestaltung bei den beiden Rohstoffen.

c) Im Rohstofflager befinden sich nach der Fertigstellung der Bestellung noch je 150000 ME der Rohstoffe R1 bis R3 und je 200000 ME der Rohstoffe R4 und R5.
Erarbeiten Sie mögliche Produktionspläne für Endprodukte, wenn man beide

- in gleicher Menge
- in beliebigen Mengenzusammensetzungen haben will.

Die Matrix **Rohst**:

	R1	R2	R3	R4	R5	G1	G2	G3	B1	B2	B3	E1	E2
R1	0	0	0	0	0	2	1	4	0	2	0	0	0
R2	0	0	0	0	0	3	0	1	4	1	1	0	3
R3	0	0	0	0	0	1	4	0	2	7	0	0	0
R4	0	0	0	0	0	0	4	3	1	2	5	7	0
R5	0	0	0	0	0	5	4	0	3	0	0	0	0
G1	0	0	0	0	0	0	0	0	4	2	0	0	0
G2	0	0	0	0	0	0	0	0	1	3	1	0	2
G3	0	0	0	0	0	0	0	0	5	0	4	0	0
B1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3	0
B2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	7	1
B3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2
E1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
E2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Lösungsskizze und Erwartungshorizont

a) Die Darstellung des Produktionsprozesses ergibt als Gozintograph folgendes Bild: (5 BE)

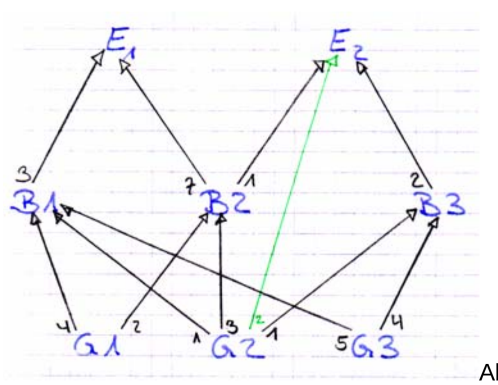

Abb. 1

Für die Bestimmung des Bedarfes bei vorgegebener Bestellung erhält man den Produktionsvektor: [32300,40100,36400,3400,9300,4800,1000,2000]. Da bei der Herstellung von E2 durch die Einbindung von G2 eine Produktionsstufe übersprungen wird, kann nicht über die Verknüpfung der Teilmatrizen der Gesamtbedarf ermittelt werden. Es ist vielmehr die Erstellung einer Verflechtungsmatrix G für den Gesamtprozess in technologisch sinnvoller Weise notwendig, d.h. die einzelnen Produktionsstufen sind auf oder ansteigend anzuordnen. (9 BE)

Die beiden Verfahren $(E-G)^{-1}\cdot\vec{y}=\vec{x}$ bzw. $\left(E+G+G^2...\right)\cdot\vec{y}=\vec{x}$ führen zum gleichen Ergebnis, wie sich leicht zeigen lässt.

$E+(G-G)+(G^2-G^2)+........+(G^n-G^n)=E \Leftrightarrow$

$\left(E+G+G^2+..+G^n\right)-\left(G+G^2+..+G^n+G^{n+1}\right)=E$,

denn bei n Prodiktionsstufen ist G^{n+1} die Nullmatrix.

$\left(E+G+G^2+..+G^n\right)-G\left(E+G+G^2+..+G^n\right)=E$

$\Leftrightarrow\ (E-G)\left(E+G+G^2+..+G^n\right)=E$. Aus der letzten Gleichung folgt, dass $E-G$ die inverse Matrix zu $\left(E+G+G^2+..+G^n\right)$ ist. (8 BE)

b) Den Graphen aus Teil a) sinnvoll ergänzen. Bei der Interpretation und Erläuterung der Gozintomatrix ist der Aufbau in seinen Grundstrukturen zu erklären – unterhalb der Hauptdiagonale nur Nullen, Elemente beinflussen ausschließlich die höherer Ordnung, durch die technologisch sinnvolle Anordnung erkennt man eine Blockbildung, die die einzelnen Verknüpfungen zwischen den Produktionsstufen sehr gut erkennbar wiederspiegelt. (9 BE)

Aus der Entstehung von *Rohst²* lässt sich an einer Aufzeichnung der Struktur von *Rohst* die Bedeutung der Zeilen und Spalten – oder der einzelnen Blöcke – gut herleiten und erklären. Waren in der Matrix *Rohst* alle unmittelbaren Mengenbeziehungen dargestellt, so zeigt die Matrix *Rohst²* Mengenbeziehungen, die über genau eine Produktionsstufe bestehen – wie folgende Abbildung von *Rohst²* zeigt:

	R1	R2	R3	R4	R5	G1	G2	G3	B1	B2	B3	E1	E2
R1	0	0	0	0	0	0	0	0	29	7	17	14	4
R2	0	0	0	0	0	0	0	0	17	6	4	19	3
R3	0	0	0	0	0	0	0	0	8	14	4	55	15
R4	0	0	0	0	0	0	0	0	19	12	16	17	20
R5	0	0	0	0	0	0	0	0	24	22	4	9	8
G1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	26	2
G2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	24	5
G3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	15	8
B1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
B2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
B3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
E1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
E2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Es fehlt die Produktionsstufe der Grundmodule. Bilden wir *Rohst³* so ergeben sich folglich Beziehungen über 2 Produktionsstufen. *Rohst*^{4} ergibt also eine Matrix mit lauter Nullen, da es bei nur insgesamt 2 Zwischenstufen 3 Produktionsstufen gibt.

Für die gesamten Mengenbeziehungen müssen entsprechend die sich unmittelbar und über die verschiedenen Stufen ergebenden Beziehungen addiert werden. Dies ergibt den sog. Sekundärbedarf.

Für die Bestimmung des Gesamtbedarfs muss noch der Bedarf bedacht werden, der von den Modulen selbst erwartet wird, der sog. Primärbedarf. Dies erreicht man durch hinzufügen der Einheitsmatrix oder *Rohst*^{0}. Der Gesamtbedarf ergibt sich folglich durch $G = \sum_{0}^{3} \text{Rohst}^n$.

Durch Multiplikation von G mit der Bestellung ergeben sich die benötigten Rohstoffe: [268900,167000,264400,322600,332100] (10 BE)

Multipliziert man den Preis als Zeilenvektor mit den Rohstoffmengen als Spaltenvektor, so erhält man lediglich die Gesamtkosten. Durch Multiplikation der benotigten Rohstoffmengen mit den Preisen als Zeilenvektor erhält man eine Matrix, in deren Diagonale der Preis ablesbar ist.

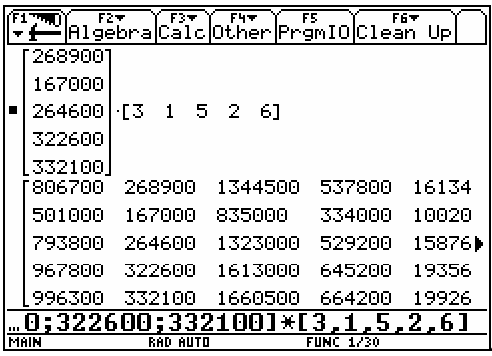

Abb. 2

Eine andere Möglichkeit die entsprechenden Kosten zu berechnen besteht darin, den Kostenvektor zu einer quadratischen Matrix mit dem Kostenvektor in der Hauptdiagonalen zu ergänzen, um mit dem Rohstoffmaterialvektor multiplizieren zu können. (8 BE)

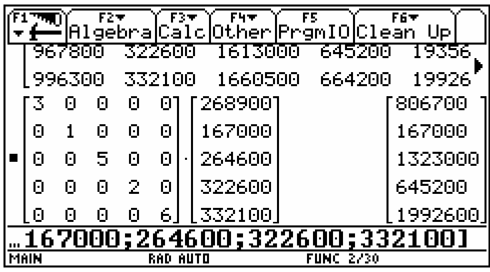

Abb. 3

Für ein Produkt E1 werden folgende Rohstoffmengen benötigt: 150 R1, 112 R2, 177 R3, 165 R4, 235 R5.

Die Ungleichung

$2500 > R1 \cdot 3 + R2 \cdot 1 + R3 \cdot x + R4 \cdot 2 + R5 \cdot y$

oder

$2500 > R1 \cdot 3 + R2 \cdot 1 + R3 \cdot y + R4 \cdot 2 + R5 \cdot x$

führt zu der Form

$y < -0{,}753x + 6{,}843$ oder $y < -1{,}328x + 9{,}085$

mit dem entsprechenden Lösungsgebiet für z. B.

$y < -0{,}753 \cdot x + 6{,}843$ (4 BE)

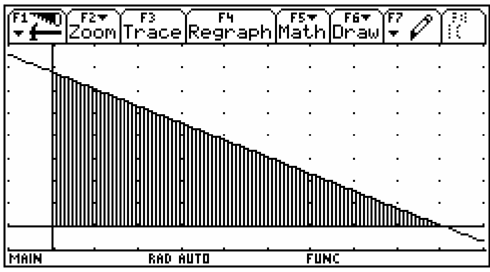

Abb. 4

(x-Bereich: [-1 .. 10]; y-Bereich: [-1 .. 8])

c) Für je ein Produkt E1 und E2 werden folgende Rohstoffmengen benötigt:
195 R1, 132 R2, 214 R3, 229 R4, 273 R5.
Dies führt zu den beiden Ungleichungen
$273x < 200000$ für die Rohstoffe R1 bis R3 und
$214x < 150000$ für die Rohstoffe R4 und R5,
sowie dem Ergebnis von 700 Stück von jedem Endprodukt.

Bei beliebiger Zusammensetzung muss noch der Rohstoffbedarf für ein Endprodukt E2 bestimmt werden, den für ein Endprodukt E1 benötigte man schon in Teil b).
Man erhält für E2 die Mengen 45 R1, 20 R2, 37 R3, 64 R4 und 38 R5. Dies führt zu den 5 folgenden 5 Ungleichungen, bei denen für E1 x und für E2 y gesetzt wird.

g1: $150x + 45y \leq 150000$

g2: $112x + 20y \leq 150000$

g3: $177x + 37y \leq 150000$

g4: $165x + 64y \leq 200000$

g5: $235x + 38y \leq 200000$

Durch die 5 Ungleichungen bekommt man ein Lösungsgebiet, das skizziert und beschrieben werden muss. (8 BE)

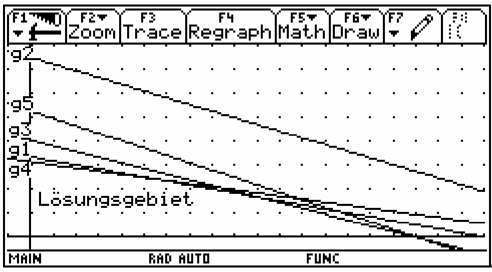

Abb. 5

($x \in$ [-50 .. 1000;50]; $y \in$ [-500 .. 8000; 1000])

Die Analyse eines neuen umfangreicheren Problems, seine graphische Umsetzung in einen Gozintographen, die Anwendung des Verflechtungsmodells auf einen Produktionsprozess, bei dem in einem Fall eine Stufe übersprungen wird, die textliche Erläuterung des Verfahrens und die Interpretation der beiden Gleichungen setzen gute Übersicht und Verständnis voraus.

Die ausführliche Erläuterung der Gozintomatrix *Rohst*, die Interpretation von *Rohst²* sind zwar grundsätzlich vom Unterricht her bekannt, erfordern aber wegen der komplexen Struktur dieses anspruchsvollen Modells gute Übersicht. Für die Kostenberechnung ist die Erstellung einer besonderen Matrix sinnvoll. In diesem Zusammenhang ist eine solche Fragestellung ebenso neu, wie die Frage nach einem Lösungsgebiet. Dies trifft auch auf den gesamten Teil c) zu. Hier ist insbesondere der zweite Teil auch noch komplexer in der Interpretation, wie das Bild zeigt.

Literatur:

W. Tysiak: Multiplikation von Produktionsmatrizen und Gozinto – Verfahren; MNU 51/4

Autor:
Wilhelm Weiskirch
Landsbergstr. 21
D-31655 Stadthagen
Schule: Ratsgymnasium Stadthagen
E-Mail: w.weiskirch@teleos-web.de