

# ► CAYEN – Neue Wege zur Algebra mit oder ohne CAS

$$c(a) = ye + n$$

Bärbel Barzel, Matthias Zeller



## Was ist CAYEN?

**Blau oder Grau?** „Ich will lieber den Blauen!“ Für Jana aus der 7a ist die Sache klar, für ihren Lehrer allerdings nicht. Die Wahl zwischen der grauen CAS- und der blauen non-CAS-Version des TI-Nspire™ beruht natürlich nicht auf der Farbe, sondern auf der Entscheidung „CAS oder nicht“. Um Argumente dafür zu bekommen, wird der Einsatz von Computeralgebra im Rahmen des Projekts CAYEN an der Pädagogischen Hochschule Freiburg untersucht. Verschiedene nationale wie internationale Studien haben den Mehrwert des Einsatzes von Grafikrechnern (GTR) sowie von Rechnern mit Computeralgebrasystemen (CAS) insbesondere in höheren Schulstufen bereits gezeigt, unklar ist jedoch, welche Rolle CAS bereits beim Lernen elementarer Algebra spielt.

## Welche Ziele hat CAYEN?

CAS YES or NO? Ist es gewinnbringend CAS bereits beim Lösen von Gleichungen und beim Umformen von Termen in der Sekundarstufe I einzusetzen? Beide TI-Nspire™ Modelle bieten in gleichem Maße graphische und numerische Möglichkeiten, die beim Lernen von funktionalem Denken und Algebra genutzt werden können. Das Privileg, symbolische Darstellungen umzuformen, bietet allerdings nur der TI-Nspire™ CAS. Ausdrücke mit Variablen, beispielsweise im Kontext elementarer Rechengesetze oder dem schrittweisen Lösen von Gleichungen, können auf Knopfdruck verändert werden. Ob Schülerinnen und Schüler durch die schnelle Verfügbarkeit von Ergebnissen lernen zielgerichteter algebraische Manipulationen durchzuführen und ob die neuen Aufgabenmöglichkeiten nachhaltig zu einem tiefgreifenderen Verständnis von Variablen und Algebra verhelfen, soll herausgefunden werden.

Zunächst ist es von Interesse, welche Zugangsweisen und Applikationen Schülerinnen und Schülern beim Lösen von Aufgaben auf welche Art verwenden. Bei der Bearbeitung offener Aufgaben beispielsweise, können unterschiedliche Wege gewählt und unterschiedliche Ergebnisse hervorgerufen werden.

## Wie werden diese Ziele erreicht?

Im Frühjahr dieses Jahres wurden bereits drei siebte Klassen beim Lernen von Algebra im Rahmen von funktionalen Zusammenhängen begleitet. Dabei wurde das entwickelte Material verwendet und die Auswirkungen des integrierten Rechneinsatzes im Unterricht beobachtet. Der TI-Nspire™ wurde in zwei gymnasialen Untersuchungsklassen als CAS- und in einer Kontrollklasse als non-CAS-Version eingesetzt. In dieser ersten Phase diente die Aufnahme und Auswertung von Videos einzelner Schüler und ganzer Klassen als Grundlage zur Erkenntnisgewinnung. Der Fokus lag auf dem Verstehen der Lernprozesse und der Weiterentwicklung des Materials für eine zweite Phase des Projekts. Im Frühjahr 2010 werden die Lerneffekte nochmals in der Breite unter-

sucht, dazu wird das Unterrichtsmaterial in möglichst vielen Klassen eingesetzt und der Lernzuwachs innerhalb einzelner Klassen sowie Unterschiede zwischen CAS- und non-CAS-Klassen werden erhoben. Als Forschungsinstrumente dienen Tests vor und nach der Unterrichtssequenz im Sinne von schriftlichen Lernstandserhebungen.

## Was wird im Unterrichtsmaterial behandelt?

### Welche Aufgaben sind im Material?

Mit der folgenden Aufgabe vom Ende der Unterrichtssequenz wird ein Eindruck vermittelt, was Schülerinnen und Schüler in der Einheit lernen sollen.

### Klassenfeier

Sommerferien! Das Schuljahr geht dem Ende zu und das soll gefeiert werden. Ihr wollt einen Raum mieten und für jeden Gast soll es etwas zu essen geben. Auch für Unterhaltung wird gesorgt. Dazu bekommt ihr drei verschiedene Angebote:

Anbieter	Party	Event	Location
Essen / Person	24 €	15 €	20 €
Raummiete	400 €	2300 €	900 €
Musikanlage	350 €	400 €	-
Dekoration	-	200 €	300 €

- Ihr feiert mit eurer Klasse, den Eltern und natürlich mit euren Lehrern. Welchen Anbieter wählt ihr aus? Trefft eine Annahme wie viele Besucher kommen werden.
- Ihr feiert mit der ganzen Stufe. Für welchen Anbieter entscheidet ihr Euch jetzt?
- Stellt für andere Klassen dar, bei wie vielen Gästen welcher Anbieter am günstigsten ist. Welche Kosten entstehen insgesamt?

### Welche Grundsätze standen bei der Konzeption im Vordergrund?

Algebraische Ausdrücke sollten beim Einstieg in die Thematik nicht isoliert auftreten, sondern „mit Leben gefüllt“ sein. Dazu können Zahlenfolgen einbezogen werden, die aus inner- und außermathematischen Kontexten entstehen, geometrische Probleme können mit Variablen formuliert werden oder, wie in diesem Fall, kann die Einbettung von Alltagskontexten herangezogen werden. Realitätsnahe Probleme ermöglichen es, dass abstrakte symbolische Terme mit Vorwissen verbunden werden und ihren eigenen Sinn bekommen. Aus diesen Gründen hat Sinnstiftung einen hohen Stellenwert in der gesamten Einheit.

Funktionale Zusammenhänge bieten leicht zugängliche Anwendungsbezüge, die zu Termen mit Variablen führen können. Verbale, numerische und graphische Beschreibungen treten dabei in Verbindung miteinander auf. Nicht nur das Verständnis für die einzelnen Darstellungen, sondern auch deren Vernetzung sind für funktionales Denken und für

das Verstehen von Mathematik allgemein von großer Bedeutung. Der TI-Nspire™ unterstützt diese Herangehensweise mit seinen technischen Möglichkeiten. Dabei ist von Vorteil, dass die Festlegung einer Funktion für alle Applikationen eines Dokuments übernommen wird. Im TI-Nspire™ CAS ist die Umformung algebraischer Ausdrücke in gleichem Maße möglich wie die Manipulation von Graphen und Tabellen.

Viele der verwendeten Aufgaben sind offen, in dem Sinne, dass verschiedene Lösungswege möglich sind. Deshalb erfordert das Material, dass Schülerinnen und Schüler Zeit haben, sich mit den Aufgaben auseinander zu setzen, um individuelle Lösungsideen zu entwickeln. Die verschiedenen Herangehensweisen müssen mit anderen besprochen werden und dies bringt die Bearbeitung in Gruppen mit sich.

Der Rechner sollte für Schülerinnen und Schülern immer verfügbar sein. Das Material bietet Aufgabentypen, die gar keinen Rechneinsatz erfordern, die Bearbeitung anderer hingegen ist ohne den Rechner gar nicht möglich. Zwischen diesen Extremen gibt es eine Fülle von Aufgaben, welche sich mit oder ohne Rechner lösen lassen, das Beispiel zeigt nur eine davon. Besonders bei der Bearbeitung dieser offenen Aufgaben wird die Fähigkeit, den Rechner als individuelles Werkzeug einzusetzen, gefördert. Ob dieses Werkzeug mit algebraischen Ausdrücken umgehen kann, steht natürlich in Bezug zur Wahl des Lösungsweges.

**Wie werden solche Aufgaben bearbeitet?  
Welche Wege werden gewählt?**

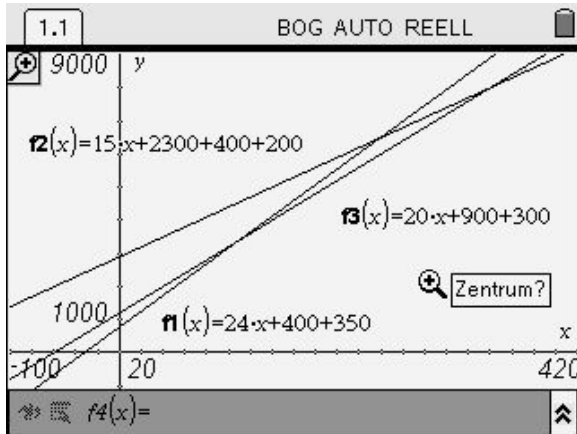


Abb. 1

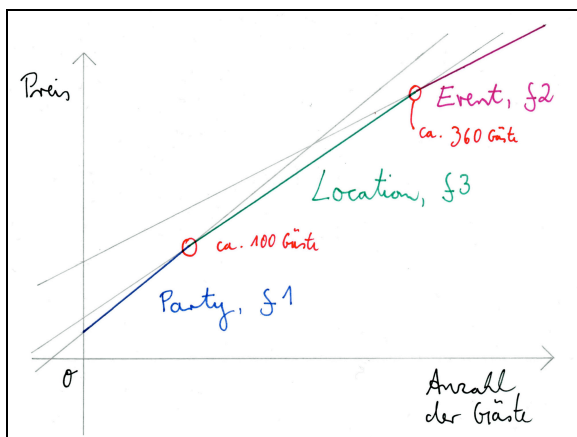


Abb. 2

Die graphische Darstellung der drei Angebote bietet einen Überblick und kann zu Beginn der Bearbeitung genutzt werden. Verschieben des Anzeigefensters und der Zoom lassen schnell ersehen, dass bei wenigen Besuchern nur die Angebote „Party“ und „Location“ miteinander konkurrieren. Erst bei größeren Besucherzahlen wird das Angebot „Event“ interessant. Die Lage der Schnittpunkte zeigt, dass „Event“ nur mit „Location“ verglichen werden muss. Für die Skizze im Heft wurde nur das Wesentliche der Graphen übernommen.

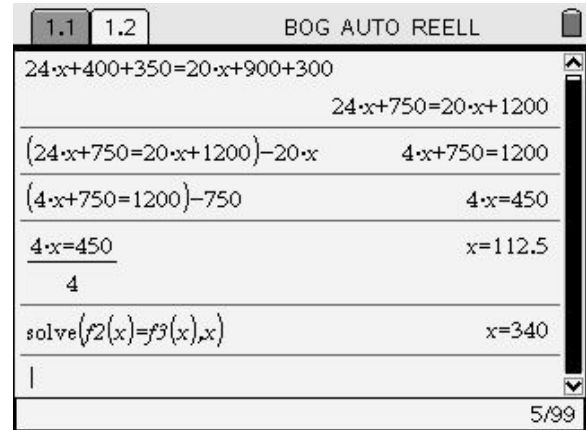


Abb. 3

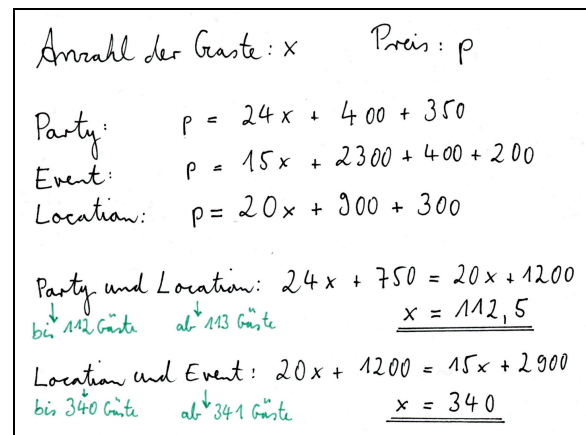


Abb. 4

Das Bedürfnis der Schülerinnen und Schüler nach einem genauen Ergebnis kann zum Anzeigen der Schnittpunkte, zur Tabelle oder, wie oben, zum algebraischen Weg führen. Beide Rechner bieten mit den Befehlen „solve“ beziehungsweise „nsolve“ die Möglichkeit zwei Funktionen gleichzusetzen und nach einer Variable aufzulösen. Mit dem TI-Nspire™ CAS können Gleichungen zudem schrittweise umgeformt und gelöst werden. Der Umgang mit Variablen wurde dabei für die Schülerinnen und Schüler selbstverständlich, obwohl diese im Unterricht noch nicht explizit eingeführt wurden.

x	f1(x):=	f2(x):=	f3(x):=
338.	8862.	7970.	7960.
339.	8886.	7985.	7980.
340.	8910.	8000.	8000.
341.	8934.	8015.	8020.
342.	8958.	8030.	8040.
343.	8982.	8045.	8060.

Abb. 5

Gäste	Party	Event	Location
112	3438	4580	3440
113	3462	4595	3460
...	...	...	...
339	8886	7985	7980
340	8910	8000	8000
341	8934	8015	8020

bis 112 Gäste      zwischen 113 und 340 Gäste      ab 341 Gäste

KLASSENFESTER

Abb. 6

In einer Funktionstabelle sind schnell viele Werte verfügbar. Es lässt sich gut beobachten, wie sich die Preise zweier Angebote zeilenweise annähern, gleich werden und wieder auseinander wachsen. Eine Analyse der Schülerhefte zeigte, dass das Augenmerk bei der Dokumentation auf der Schrittweite der Werte und auf dem Finden relevanter Ausschnitte lag.

**Wie wird der Rechner eingesetzt?**

Die Lösungsideen aus der Schulpraxis zeigen wie vielfältig die Wege der Schülerinnen und Schüler bei der Bearbeitung solch offener Aufgabe sind. Eine schnelle Verfügbarkeit von Graph, Tabelle und Gleichung ermöglicht es, dass zwischen ihnen gut gewechselt werden kann. Vor- und Nachteile sowie Bezüge zwischen den Darstellungen werden nach der Bearbeitung der Aufgabe im Unterricht thematisiert. Es ist wichtig dabei, dass sowohl der Einsatz des Rechners, als auch die verwendeten Darstellungen von den Schülerinnen und Schülern frei wählbar sind. Die Lösungen werden entweder auf dem Papier, im Rechner oder in Kombination von beidem vollzogen und auch die Ergebnisse werden mit beiden Medi-

en dokumentiert. Nach den ersten Eindrücken aus der Schulpraxis bekommt der TI-Nspire™ bei einem solchen Einsatz den Charakter eines vielseitigen Problemlöseserzeuges mit ganz verschiedenen Funktionen: es kann ein erster Überblick genauso erarbeitet werden, wie Zwischen- und genaue Endergebnisse, das heißt Schülerinnen und Schüler werden auf dem gesamten Lösungsweg unterstützt. Die digitalen Dateien können um Texte ergänzt, in verschiedenen Ordnern abgespeichert und wieder abgerufen werden. Und auf den Computer übertragene und ausgedruckte Dokumente fließen in den weiteren Unterricht ein.

Zudem besteht die Möglichkeit Dateien von Rechner zu Rechner weiterzugeben. Dynamische, digitale „Arbeitsblätter“ sind schnell auf vielen Rechnern verfügbar, der Lehrer kontrolliert damit welche Applikationen genutzt werden und legt fest, auf welchen mathematischen Tätigkeiten die Aufmerksamkeit der Schülerinnen und Schüler liegt. Neue Aufgabenformate entstehen und der Charakter des Rechners wandelt sich zu einer vorgefertigten Lernumgebung.

Sowohl bei eigenen, als auch bei fremden Ergebnissen, kann der Rechner zur Kontrolle genutzt werden, wodurch eigenständiges Arbeiten stark unterstützt wird. Von Hand gefertigte Umformungen können mit dem TI-Nspire™ CAS zeilenweise kontrolliert und enthaltene Fehler entlarvt werden. Innermathematische Aufgaben, die Bezug zur Eingabe in den Rechner, zur Tastenfolge oder zum angezeigten Display nehmen, bieten Abwechslung bei der Einübung syntaktischer Fertigkeiten.

**Neugierig geworden?**

Wurde mit diesem Artikel Ihr Interesse geweckt? Unterrichten Sie im Schuljahr 09/10 eine Klasse beim Lernen von Algebra und haben Sie Spaß daran neue Wege mit oder ohne CAS auszuprobieren? Dann nehmen Sie bitte Kontakt mit uns auf. Wir würden uns freuen Sie und Ihre Klasse in der nächsten Untersuchungsphase begrüßen zu dürfen und kennenzulernen.

**Autoren:**

Prof. Dr. Bärbel Barzel,  
 Pädagogische Hochschule Freiburg  
[baerbel.barzel@ph-freiburg.de](mailto:baerbel.barzel@ph-freiburg.de)  
 Matthias Zeller  
[zeller.matthias@ph-freiburg.de](mailto:zeller.matthias@ph-freiburg.de)