Thème : Analyse

Fabrication d'une boîte à coût minimal

TI-82 Advanced Edition Python

TI-83 Premium CE Edition Python

Enoncé

Une entreprise souhaite fabriquer une boîte de 256 cm³ de volume de la forme d'un pavé droit à base carrée.

Crédit photo : www.pexels.com – Monstera

Le fond et le couvercle lui reviennent à 2 centimes d'euro le cm² et les faces latérales à 4 centimes d'euro le cm². On note x la longueur en cm du côté de la base et h la hauteur en cm de la boîte.

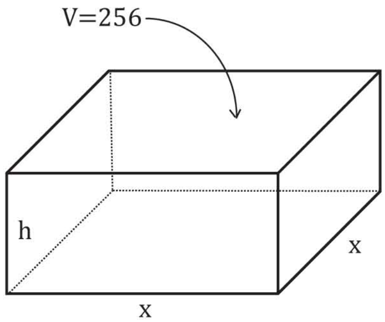
1. Exprimer h en fonction de x et montrer que le prix de revient de la boîte, en centimes d'euro, est : $p(x) = 4x^2 + \frac{4096}{x}$.

2. Etudier les variations de la fonction $\boldsymbol{p}$ sur $]0\,;\,+\infty[$. On utilisera le sens de variation de la fonction cube $x \mapsto x^3$ sur $\mathbb{R}$.

3. Donner les dimensions de la boîte pour que le prix de revient soit minimal. Un client achète 50 boîtes à l'entreprise à 10 € l'unité. Quel est le bénéfice réalisé par l'entreprise ?

1. Prix de revient

Sachant que le volume de la boîte est $V = 256\,cm^3$ mais aussi que $V = L \times l \times h$ avec dans notre cas $L = l = x$ nous obtenons l'égalité $256 = x \times x \times h$ soit :



$$h = \frac{256}{x^2}.$$

Pour exprimer le prix de revient de la boîte, nous devons calculer les aires en cm² de chaque face du pavé droit. Le fond et le couvercle sont des carrés de côté x donc leur aire est égale à x^2. Les quatre faces latérales sont des rectangles de dimensions x et h, leur aire est donc égale à $x \times h = x \times \frac{256}{x^2} = \frac{256}{x}$.

Ainsi le prix de revient, en centimes d'euro, est égal à :

$$p(x) = 2 \times 2 \times x^2 + 4 \times 4 \times \frac{256}{x} = 4x^2 + \frac{4096}{x}.$$

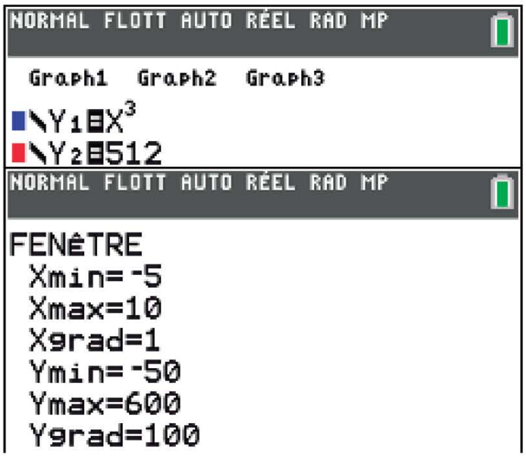
2. Etude de variations

Nous calculons d'abord la dérivée $\boldsymbol{p'}$ de la fonction $\boldsymbol{p}$ en remarquant que $\boldsymbol{p}$ est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ en tant que combinaison linéaire d'une fonction polynomiale de degré 2 et de la fonction inverse.

D'où $p'(x) = 8x + 4096 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{8x^3 - 4096}{x^2}$ soit $p'(x) = \frac{8(x^3 - 512)}{x^2}$.

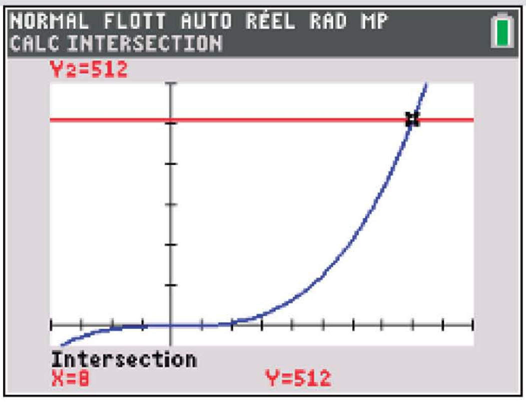
Ainsi $p'(x)$ est du signe de $x^3 - 512$ sur $]0\,;\,+\infty[$: c'est ici que l'on utilise le sens de variation de la fonction cube $x \mapsto x^3$: on sait que cette fonction est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, on résout alors l'équation $x^3 - 512 = 0$.

Deux possibilités, par méthode graphique en utilisant les fonctionnalités de la calculatrice.



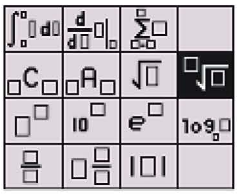
Fabrication d'une boîte à coût minimal

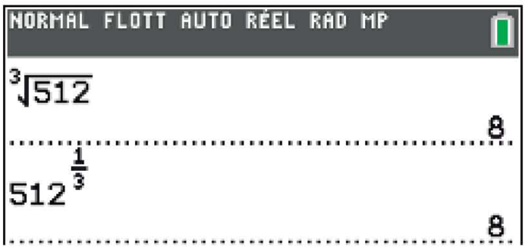
Nous entrons la fonction x^3 dans $\mathbf{Y_1}$ et la fonction constante égale à 512 dans Y_2. On représente alors ces deux fonctions avec [graphe] après avoir configuré la fenêtre d'affichage. Puis on choisit le menu `calculs`, à l'aide des touches [2nde] [trace] et on sélectionne la commande `5:intersection`. De retour au graphique, on valide avec [entrer] le choix de Y_1, celui de Y_2 et enfin la valeur initiale en se plaçant près du point d'intersection recherché. On trouve $x = 8$, c'est l'unique solution de l'équation $x^3 = 512$.



Deuxième méthode, par calcul, pour résoudre $x^3 = 512$ on utilise la racine cubique $x = \sqrt[3]{512} = 512^{\frac{1}{3}} = 8$.

On calcule cette valeur à l'aide des touches [2nde] [fraction]





On obtient ainsi que $p'(x) \leq 0$ sur $]0\,;8]$ et $p'(x) \geq 0$ sur $[0\,;\,+\infty[$ d'où le tableau de variations :

x	0		8		$+\infty$
$p'(x)$		$-$	0	$+$	
$p(x)$		↘	768	↗	

3. Coût minimal

D'après l'étude précédente, la fonction prix de revient $\boldsymbol{p}$ admet un minimum lorsque $x = 8$. Donc pour fabriquer une boîte de volume 256 cm^3, celle qui revient la moins chère à l'entreprise avec cette forme, est obtenue avec une base carrée de côté 8 cm. Quant à la hauteur de cette boîte, elle est égale à $h = \frac{256}{8^2}$ soit à 4 cm.

Enfin, l'entreprise revend ces boîtes ainsi fabriquées à 10 € l'unité.

Or, nous savons d'après la précédente question que le coût unitaire minimal est de 768 centimes d'euros soit 7,68 €.

Si un client achète 50 boîtes de ce type, le bénéfice réalisé par l'entreprise est égal à (10–7,68) x 50 = 116 €.