Calculs de déterminants

TI-82 Advanced
Edition Python

TI-83 Premium CE
Edition Python

Déterminant de deux vecteurs

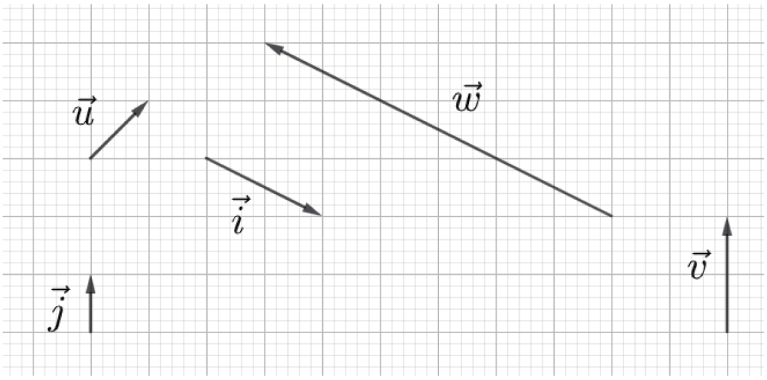
Le déterminant de deux vecteurs permet de déterminer si les vecteurs sont colinéaires (c'est-à-dire s'ils ont la même direction).

Exemple : En s'aidant de la figure ci-contre, déterminer les vecteurs qui sont colinéaires :

Solution : Les vecteurs $\vec{\imath}$ et $\vec{w}$ sont colinéaires.

Les vecteurs $\vec{\jmath}$ et $\vec{v}$ sont aussi colinéaires.

Le vecteur $\vec{u}$ n'est colinéaire à aucun des vecteurs représentés.



Définition : Soit $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$ une base de l'ensemble des vecteurs du plan. Soit $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ dans la base $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$, avec x, y, x' et y' des réels.

Le déterminant des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ se note :

$\det(\vec{u},\vec{v})$ ou encore $\begin{vmatrix}x & x'\\y & y'\end{vmatrix}$ et a pour valeur :

$\det(\vec{u},\vec{v}) = xy' - x'y$

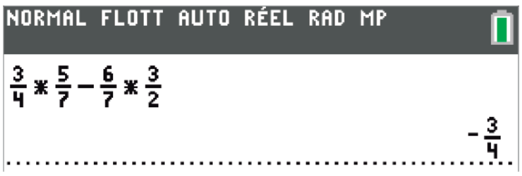
Propriété : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $\det(\vec{u},\vec{v}) = 0$

<u>Exemple 1</u> : On donne $\vec{u}\begin{pmatrix}\frac{3}{4}\\\frac{3}{2}\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}\frac{6}{7}\\\frac{5}{7}\end{pmatrix}$ dans la base $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont-ils colinéaires ?

Calculons le déterminant des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$:

$$\det(\vec{u},\vec{v}) = \begin{vmatrix}\frac{3}{4} & \frac{6}{7}\\\frac{3}{2} & \frac{5}{7}\end{vmatrix} = \frac{3}{4}\times\frac{5}{7} - \frac{6}{7}\times\frac{3}{2} = \frac{15}{28} - \frac{9}{7} = \frac{15}{28} - \frac{36}{28} = -\frac{21}{28} = -\frac{3}{4}$$

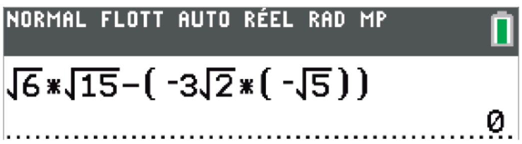
On peut s'aider de sa calculatrice pour vérifier ses calculs et vérifier aussi que la fraction obtenue est irréductible (c'est-à-dire qu'on ne peut pas plus la simplifier).
Ainsi $\det(\vec{u},\vec{v}) \neq 0$ les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.



<u>Exemple 2</u> : On donne $\vec{u}\begin{pmatrix}\sqrt{6}\\-\sqrt{5}\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-3\sqrt{2}\\\sqrt{15}\end{pmatrix}$ dans la base $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont-ils colinéaires ?

Calculons $\det(\vec{u},\vec{v}) = \begin{vmatrix}\sqrt{6} & -3\sqrt{2}\\-\sqrt{5} & \sqrt{15}\end{vmatrix} = \sqrt{6}\times\sqrt{15} - \left(-3\sqrt{2}\times\left(-\sqrt{5}\right)\right)$

$$= \sqrt{90} - 3\sqrt{10} = \sqrt{9\times 10} - 3\sqrt{10}$$
$$= \sqrt{9}\times\sqrt{10} - 3\sqrt{10} = 3\sqrt{10} - 3\sqrt{10}$$



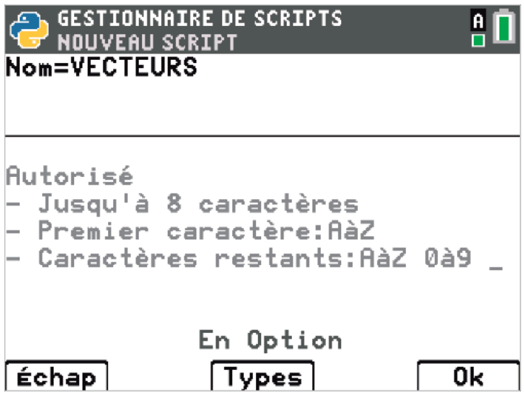
Donc $\det(\vec{u},\vec{v}) = 0$ les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

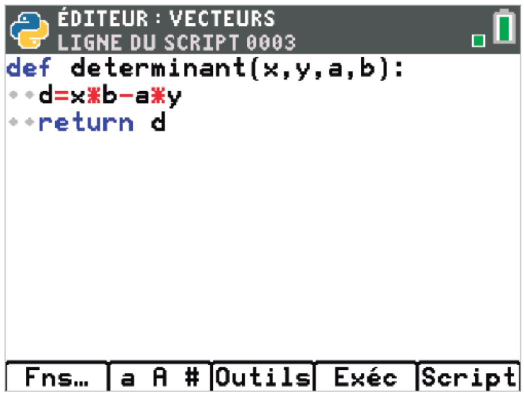
Script Python pour calculer le déterminant

Il est possible d'automatiser le calcul du déterminant à l'aide d'un script simple en Python :

```
def determinant(x,y,a,b) :
••d=x*b-a*y
••return d
```

Nommons notre script **VECTEURS** et entrons le script précédent :





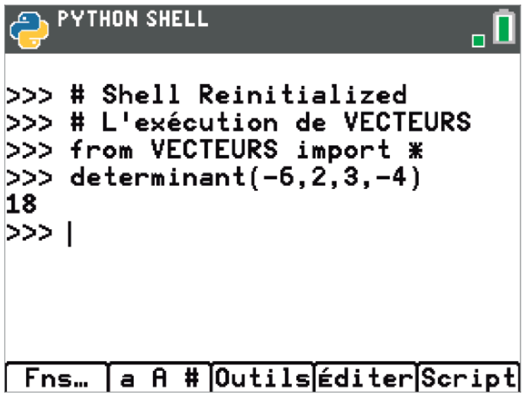
Utilisons maintenant notre fonction **determinant** dans l'exemple suivant :

<u>Exemple 3</u> : Calculer le déterminant des vecteurs $\vec{u}\binom{-6}{2}$ et $\vec{v}\binom{3}{-4}$ dont les coordonnées sont données dans une base $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

On commence par exécuter notre script en appuyant sur **Exéc** puis, dans la console, on va appeler notre fonction **determinant** qui est maintenant en mémoire.

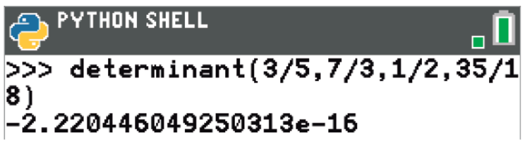
Dans la console, pour accéder rapidement aux fonctions de notre script on appuie sur [var] puis on entre les arguments de la fonction **determinant**.

Conclusion : $\det(\vec{u},\vec{v}) \neq 0$.



<u>Exemple 4</u> :A l'aide de notre script Python précédent, calculer le déterminant des vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}\frac{3}{5}\\ \frac{7}{3}\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{35}{18}\end{pmatrix}$ dont les coordonnées sont données dans une base $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$, puis déterminer s'ils sont colinéaires.

Dans la console on écrit (voir copie d'écran ci-contre) :



Attention ! Lorsqu'on ne travaille pas avec des nombres entiers, Python utilise un mode de calcul approximatif. Si le résultat d'un calcul est 0, il se peut que le résultat affiché soit un nombre excessivement proche de 0 (mais pas 0…). Il faudra donc l'interpréter comme 0 (ce qu'on obtiendrait avec un calcul « à la main »).

Ainsi on peut affirmer que $\det(\vec{u},\vec{v}) = 0$ donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.