# Amorteringar på lån

I denna aktivitet tar vi upp hur man kan göra beräkningar år från år på avbetalningar på lån som löper över längre tid. Beräkningar bygger på att man en konstant räntesats över tid men så är ju inte fallet. Idag har vi t.ex. rörligare bolåneräntor som ligger mellan 1,5 och 2 %. En fast 10-årsränta kanske ligger på drygt 3 %. 2008 hade vi boräntor på mer än 6 % t.ex.

TI-Nspire har en speciell del, *Finanslösaren*, där man kan göra en hel del ganska avancerade beräkningar. Den bör helst användas när man är någorlunda bekant med hur olika beräkningar på lån och sparande görs.

Det första problemet lyder:

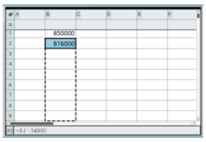
**Emma och Erik har fått ett lån i en bank för att köpa en lyxig husbil. De har båda goda inkomster och får låna 850 000 kr på 25 år till en ränta på 2,5 %. Vi räknar i detta exempel med att räntan ligger fast under hela lånetiden. Gör upp en plan för hur mycket de ska amortera och betala i ränta varje år. De ska amortera ett fast belopp varje år under hela lånetiden.**

Med amortering av ett fast belopp menas här att de ska betala av på skulden lika mycket varje år. 850 000 kr på 25 år blir 34 000 kr varje år. Instruktionerna är ganska tydliga. Vi använder kommandot **Fylla** för att göra beräkningar på varje rad.

Vi räknar med att man börjar på år 0 och alltså amorterar och betalar ränta första gången efter ett år (år 1 i kalkylbladet). Vi skriver först in 850000 i cell b1 vid år 0. Titta nu på rad 2 och 3 för cell b och cell c:

I b2 står det = **b1−34000** i cell b3 står det =**b2−34000**

Vi har alltså samma mönster hela tiden fram till rad 26 och för att åstadkomma detta så används funktionen **Fylla.** I cell b2 skriver man alltså =**b1−34000** och sedan högerklickar man i denna cell och väljer **6:Fylla** och markerar sedan med streckmarkeringen ända ner till och med rad 26. Man använder samma procedur för kolumn c men där ska det i cell c2 stå =**0,025•b1**.



Observera att vi har valt att ha med ett **år 0**, som är året då lånet tas. Vi tror att det blir tydligare så och man ser att man betalar ränta och amortering efter 1 år, 2 år osv.

I kolumn F har vl summerat totala betalningen och betalda räntor. Man ser att man på lånet betalar276 250 kr totalt. Det är nästan 33 % av lånebeloppet. Ju längre tid lånet löper på ju större blir andelen.

| | A år | B skuld | C ränta | D amortering | E totalt | F | G | H |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| = | | | | | | | | |
| 1 | 0 | 850000 | _ | _ | _ | 1126250. | | |
| 2 | 1 | 816000 | 21250. | 34000 | 55250. | 276250. | | |
| 3 | 2 | 782000 | 20400. | 34000 | 54400. | | | |
| 4 | 3 | 748000 | 19550. | 34000 | 53550. | | | |
| 5 | 4 | 714000 | 18700. | 34000 | 52700. | | | |
| 6 | 5 | 680000 | 17850. | 34000 | 51850. | | | |
| 7 | 6 | 646000 | 17000. | 34000 | 51000. | | | |
| 8 | 7 | 612000 | 16150. | 34000 | 50150. | | | |
| 9 | 8 | 578000 | 15300. | 34000 | 49300. | | | |
| 10 | 9 | 544000 | 14450. | 34000 | 48450. | | | |
| 11 | 10 | 510000 | 13600. | 34000 | 47600. | | | |

C3 =0.025· *b2*

### Problem 2

Här har vi alltså räknat med en stigande ränta. Från början är räntan 2,5 % (0,025) men sedan stiger den med 0,1 % varje år. Efter 25 år blir det då 2,5 % och totalt 5,00 %. Titta på formeln i rad 2 för ränta. Där har vi skrivit

**=0.025•*b1*+*b1*•*a1*•0.001**

Vi använder alltså data i kolumnen år för att varje år öka räntesatsen med 0,001. I övrigt gör vi exakt likadant som i Problem 1. Vi får då fram att den ränta man betalar totalt under alla år är 364 650 kr när räntesatsen successivt stiger. I Problem 1 med fast räntesats var det 276 250 kr.

***Fråga:* Hur ska man beräkna vilken *fast* räntesats man skulle ha om den totala räntan under alla år blir just 364 650 kr?**

| | A år | B skuld | C ränta | D amortering | E totalt | F | G | H |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| = | | | | amortering | | | | |
| 1 | 0 | 850000 | _ | _ | _ | 1214650. | | |
| 2 | 1 | 816000 | 21250. | 34000 | 55250. | 364650. | | |
| 3 | 2 | 782000 | 21216. | 34000 | 55216. | | | |
| 4 | 3 | 748000 | 21114. | 34000 | 55114. | | | |
| 5 | 4 | 714000 | 20944. | 34000 | 54944. | | | |
| 6 | 5 | 680000 | 20706. | 34000 | 54706. | | | |
| 7 | 6 | 646000 | 20400. | 34000 | 54400. | | | |
| 8 | 7 | 612000 | 20026. | 34000 | 54026. | | | |
| 9 | 8 | 578000 | 19584. | 34000 | 53584. | | | |
| 10 | 9 | 544000 | 19074. | 34000 | 53074. | | | |
| 11 | 10 | 510000 | 18496. | 34000 | 52496. | | | |

A1 0

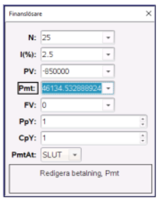
Här har vi gjort en liten justering av beräkningsmodellen såtillvida att räntan inte är konstant utan stiger med 0,1 % varje år. Totalt betalar man då 364 650 kr i räntor. Det betyder att man med denna beräkningsmodell betalar

(364 650/276 250 – 1)·100= 32 % mer i räntor. Det motsvarar då en räntesats på 2,25·1.32 % = 3,30 %. En

uppgift kan vara att göra en beräkning med denna räntesats och se att det stämmer.

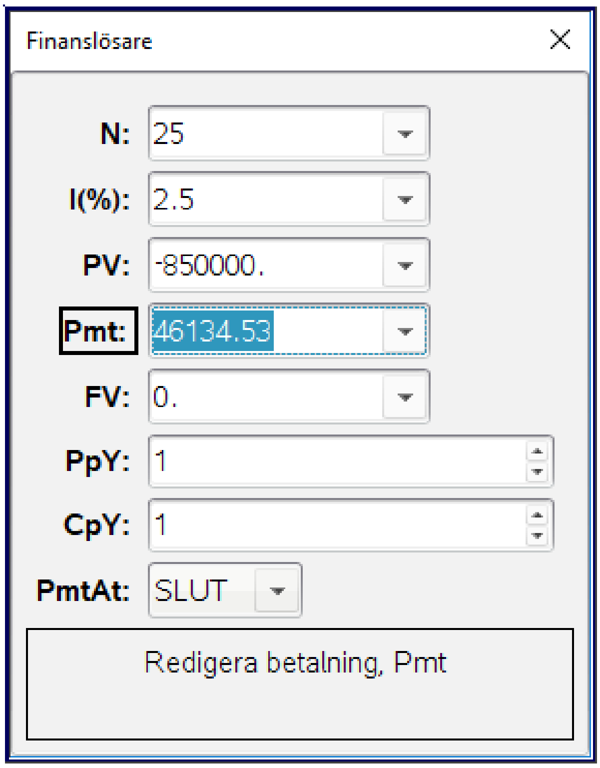
**Problem 3**

Här gå vi nu igenom en annan och vanligare typ av lån där man betalar ett fast belopp, som då inkluderar både amortering på lånet och ränta. Att räkna ut detta fasta belopp innebär att man använder s.k. **geometriska talföljder.** I gymnasiets första kurser tar man inte upp detta. Programmets *Finanslösare* klarar att räkna ut detta fasta belopp på en gång. För lånet på 850 000 kr ska vårt par alltså betala ett fast belopp på **46134,52** kr. Vi visar hur man kommer fram till detta belopp  i Problem 4.



Här visar vi också hur s.k. annuitetslån fungerar. Då betalar man totalt ett fast belopp varje år 8 eller månad). Att beräkna detta fasta belopp kräver egentligen kunskap om s.k. geometriska talföljder men i ämnesplanerna så tas detta upp först senare, vilket är synd.

Vi har här låtit *Finanslösaren* beräkna annuiteten. Det blir 46 134,53 kr för att vara exakt.




Gå igenom med eleverna hur beräkningarna görs i kalkylmodellen.  Den bygger på att man först räknar ut räntan i cell c2 och därefter amorteringen i cell d2.

Då kan man sedan beräkna återstående skuld i b2. Funktionen **Fylla** används sedan.

| | A år | B skuld | C ränta | D amortering | E | F | G |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| = | | | | | | | |
| 1 | 0 | 850000 | _ | _ | | | |
| 2 | 1 | 825115.5 | 21250. | 24884.53 | 46134.53 | | |
| 3 | 2 | 799608.8 | 20627.89 | 25506.64 | | | |
| 4 | 3 | 773464.5 | 19990.22 | 26144.31 | | | |
| 5 | 4 | 746666.6 | 19336.61 | 26797.92 | | | |
| 6 | 5 | 719198.7 | 18666.67 | 27467.86 | | | |
| 7 | 6 | 691044.2 | 17979.97 | 28154.56 | | | |
| 8 | 7 | 662185.7 | 17276.1 | 28858.43 | | | |
| 9 | 8 | 632605.9 | 16554.64 | 29579.89 | | | |
| 10 | 9 | 602286.5 | 15815.15 | 30319.38 | | | |
| 11 | 10 | 571209.1 | 15057.16 | 31077.37 | | | |

B2 =b1−d2

Här har vi beräknat vad man betalar i ränta *totalt*. Det blir ca 303 000 kr. Varför blir detta belopp större än det belopp man får betala vid s.k. rak amortering?

Titta ordentligt på hur beloppen beräknas på rad 2. Vi har använt funktionen **Fylla** på samma sätt som tidigare.

På nästa sida ser vi i diagrammet hur amorteringen och räntan utvecklas under 25 år. Summa av dessa är alltså *konstant*. Hur stor blir den sammanlagda räntan man betalar? Det kan vi räkna ut direkt. Vi infogar en matematikruta (tryck Ctrl+M) och skriver

sum(**ränta**) ▸ **303363.4**

**Problem 4**

Här förklarar vi nu i steg hur man kan räkna ut annuiteten utan att ta till geometriska talföljder. Vi jobbar helt symboliskt med de tillfälliga variablerna *r* och *ann*.

På denna och nästa sida förklarar vi principen för att räkna ut annuiteten. Lånebelopp är 100000 kr, lånetid är 5 år och vi kallar räntefaktorn för r. Räntefaktorn är alltså

$$1+\frac{\text{ränta i procent}}{100}$$

**1)** Börja med att skriva in 100000 och tryck sedan *enter*.

**2)** Tryck gångertecken (*) och sedan **r–ann** och sedan *enter*.

**r** är räntefaktorn och **ann** är de fasta belopp vi ska betala. Det är det vi ska räkna ut sedan. Då har vi räknat ut skulden efter 1 år.

Automatiskt införs variabeln **(Ans)** före gångertecknet och det representerar värdet på den sista utförda beräkningen, dvs 100000.

3) tryck nu enter 4 gånger. Då får vi det mastiga uttrycket

$100000\cdot r^5-ann\cdot r^4-ann\cdot r^3-ann\cdot r^2-ann\cdot r-ann$

Nu har vi fått ett uttryck som vi sätter lika med noll. Skulden ska ju vara betald efter 5 år. Vi lägger också in att räntefaktorn är 1.025.

$\text{solve}\left(100000\cdot r^5-ann\cdot r^4-ann\cdot r^3-ann\cdot r^2-ann\cdot r-ann=0,ann\right)|r=1.025$

▸ **$ann=21524.69$**

Man kan också t.ex räkna ut vilken räntesats man ska ha om man vill att annuiteten ska vara 24000 kr i 5 år

$\text{solve}\left(100000\cdot r^5-ann\cdot r^4-ann\cdot r^3-ann\cdot r^2-ann\cdot r-ann=0,r\right)|ann=24000$

▸ **$r=1.064022$**

Gå nu till nästa sida och se hur vi kom fram till det mastiga uttrycket.

Så här ser det ut steg för steg:

| | |
|---|---|
| $100000$ | $100000$ |
| $100000\cdot r-ann$ | $100000\cdot r-ann$ |
| $(100000\cdot r-ann)\cdot r-ann$ | $100000\cdot r^2-ann\cdot r-ann$ |
| $(100000\cdot r^2-ann\cdot r-ann)\cdot r-ann$ | $100000\cdot r^3-ann\cdot r^2-ann\cdot r-ann$ |
| $(100000\cdot r^3-ann\cdot r^2-ann\cdot r-ann)\cdot r-ann$ | $100000\cdot r^4-ann\cdot r^3-ann\cdot r^2-ann\cdot r-ann$ |
| $(100000\cdot r^4-ann\cdot r^3-ann\cdot r^2-ann\cdot r-ann)\cdot r-ann$ | $100000\cdot r^5-ann\cdot r^4-ann\cdot r^3-ann\cdot r^2-ann\cdot r-ann$ |

Nu prövar vi med insatta värden:

| | |
|---|---|
| 100000 | 100000 |
| 100000· 1.025−21524.69 | 80975.3 |
| 80975.31· 1.025−21524.69 | 61475. |
| 61475.00275· 1.025−21524.69 | 41487.2 |
| 41487.18781875· 1.025−21524.69 | 20999.7 |
| 20999.677514219· 1.025−21524.69 | ⁻0.020548 |

Vi får en differens på två öre på slutet. Klart godkänt!!

Den här metoden med upprepade beräkningar kan man naturligtvis också göra när man sparar och sätter in ett visst belopp varje år eller månad.

| | |
|---|---|
| 1000 | 1000 |
| 1000· 1.03+1000 | 2030. |
| 2030.· 1.03+1000 | 3090.9 |
| 3090.9· 1.03+1000 | 4183.63 |
| 4183.627· 1.03+1000 | 5309.14 |
| 5309.13581· 1.03+1000 | 6468.41 |
| 6468.4098843· 1.03+1000 | 7662.46 |

© Start med 1000 kr och sedan insättning av 1000 kr varje år. Årsränta 3 %