Binomialfördelningen och utveckling av binom

Här fortsätter vi nu den andra aktiviteten som delvis handlar om att utveckla binom men framförallt om binomialfördelningen. I *aktiviteten Binomialsatsen och Pascals triangel* avslutade vi med att utveckla binomet $\left(\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b\right)^2$ och fick resultatet $\frac{a^2}{4}+\frac{a\cdot b}{2}+\frac{b^2}{4}$. Vi får koefficienterna ¼, ½ och ¼ i termerna.

Sid 1:

Det visar sig att vi får samma resultat om vi gör beräkningarna som på sid 1.

Binomialfördelningen och utveckling av binom

Här fortsätter vi från aktiviteten binomialsatsen och Pascals triangel. Där utvecklade vi binomet $\left(\frac{1}{2}\cdot a+\frac{1}{2}\cdot b\right)^2$. Vi fick expand$\left(\left(\frac{1}{2}\cdot a+\frac{1}{2}\cdot b\right)^2\right) \blacktriangleright \frac{a^2}{4}+\frac{a\cdot b}{2}+\frac{b^2}{4}$

Nu ska vi titta på hur detta hänger ihop med *sannolikheter*.

Vi kastar ett mynt 2 gånger och vill beräkna hur stor sannolikheten är att vi får exakt 0, 1 och 2 krona. Det finns 4 utfall: kr+kr, kr+kl, kl+kr och kl+kl.

Dessa sannolikheter kan beräknas så här:

nCr(2,0)$\cdot 1/2^0\cdot 1/2^2 \blacktriangleright \frac{1}{4}$ motsvarar ingen krona och två klave

nCr(2,1)$\cdot 1/2^1\cdot 1/2^1 \blacktriangleright \frac{1}{2}$ motsvarar en krona och en klave. Vi kan ju två utfall: kr+kl och kl+kr

nCr(2,2)$\cdot 1/2^2\cdot 1/2^0 \blacktriangleright \frac{1}{4}$ motsvarar två krona och ingen klave

Ett smart sätt är att använda med listor med talen 0, 1 och 2:

nCr(2,{0,1,2})$\cdot 1/2^{\{0,1,2\}}\cdot 1/2^{\{2,1,0\}} \blacktriangleright \left\{\frac{1}{4},\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right\}$

Sid 3:

Här tittar vi på sannolikheterna när vi kastar 3 mynt. Vi introducerar också instruktionen *binomPdf*.

Ett exempel till:

Vi kastar ett mynt 3 gånger och vill beräkna hur stor sannolikheten är att vi får exakt 0, 1, 2 resp. 3 krona. Denna sannolikhet kan beräknas så här:

Antal sätt att att välja ut 0, 1, 2, 3 av 3 • sannolikheten att lyckas 0, 1, 2, 3 gånger • sannolikheten att misslyckas 3, 2, 1, 0 gånger

På samma förkortade sätt som på förra sidan:

nCr(3,{0,1,2,3})$\cdot 1/2^{\{0,1,2,3\}}\cdot 1/2^{\{3,2,1,0\}} \blacktriangleright \left\{\frac{1}{8},\frac{3}{8},\frac{3}{8},\frac{1}{8}\right\}$

TI- Nspire har en *inbyggd* instruktion binomPdf (Pdf= Probability density function) för att göra denna beräkning:

binomPdf$\left(3,\frac{1}{2},2\right) \blacktriangleright 0.375$ (0,375 =3/8) Sannolikhet att lyckas få krona två gånger.

Skriver vi nu bara binomPdf$\left(3,\frac{1}{2}\right) \blacktriangleright$ {**0.125,0.375,0.375,0.125**}

får vi sannolikheten att lyckas 0, 1, 2, respektive 3 gånger. Man slipper då den långa beräkningen ovan.

Sid 4:

Här fortsätter vi beräkningar av sannolikheter. Observera hur vi med binomutveckling ser både sannolikheter och de olika utfallen i potenserna. Man kan alltså se till vilket utfall sannolikheten beräknas.

Vi kastar ett mynt fem gånger:

expand$\left(\left(\frac{1}{2}\cdot kr+\frac{1}{2}\cdot kl\right)^5\right) \blacktriangleright \frac{kl^5}{32}+\frac{5\cdot kl^4\cdot kr}{32}+\frac{5\cdot kl^3\cdot kr^2}{16}+\boldsymbol{\frac{5\cdot kl^2\cdot kr^3}{16}}+\frac{5\cdot kl\cdot kr^4}{32}+\frac{kr^5}{32}$

Här kan vi på ett väldigt tydligt sätt se att sannolikheten är 5/16=0,3125 att vi får tre krona vid 5 kast. Vi ser också alla andra sannolikheter för detta försök. Detta är ganska TUFFT. Sannolikheterna är 1/32, 5/32, 5/16, 5/16, 5/32, 1/32 och de olika utfallen syns alltså i potenserna.

Direkt beräkning: binomPdf$\left(5,\frac{1}{2}\right) \blacktriangleright$ {0.03125,0.15625,0.3125,0.3125,0.15625,0.03125}

Vi kan naturligtvis göra beräkningar utifrån andra försök: Antag att sanolikheten är 60 % att du skjuter en straff i mål. Hur stor är då sannolikheten att du skjuter två av tre straffar i mål:

expand$\left(\left(\frac{6}{10}\cdot mål+\frac{4}{10}\cdot miss\right)^3\right) \blacktriangleright \frac{8\cdot miss^3}{125}+\frac{36\cdot miss^2\cdot mål}{125}+\boldsymbol{\frac{54\cdot miss\cdot mål^2}{125}}+\frac{27\cdot mål^3}{125}$

Sannolikheten är $\frac{54}{125} \blacktriangleright 0.432$ eller 43 % att du skjuter 2 straffar i mål på tre försök.

Sid 5:

Här gör beräkningar på tärningskast. Med utvecklingen av binom får vi exakta resultat i bråkform på sannolikheterna.

Ett exempel med tärningskast: Kasta en tärning fem gånger och undersök sannolikheten för hur många gånger man får en sexa:

expand$\left(\left(\frac{1}{6}\cdot sexa+\frac{5}{6}\cdot annat\right)^5\right)$

$\blacktriangleright \frac{3125\cdot annat^5}{7776}+\frac{3125\cdot annat^4\cdot sexa}{7776}+\frac{625\cdot annat^3\cdot sexa^2}{3888}+\frac{125\cdot annat^2\cdot sexa^3}{3888}+\frac{25\cdot annat\cdot sexa^4}{7776}+\frac{sexa^5}{7776}$

Detta är ju samma sak som du kastar 5 tärningar i Yatzi. Sannolikheten att du t.ex. får tre sexor är $\frac{125}{3888} \blacktriangleright 0.03215$ (3,2 %).

Sannolikheten att du får *minst* tre sexor är: 125/3888+25/7776+1/7776 ▸ 0.035494 (3,5 %)

binomPdf$\left(5,\frac{1}{6}\right) \blacktriangleright$ {0.401878,0.401878,0.160751,**0.03215**,0.003215,0.000129}

binomPdf$\left(5,\frac{1}{6},3\right) \blacktriangleright 0.03215$ eller nCr(5,3)$\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^3\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^2 \blacktriangleright 0.03215$

Sid 6:

Vi visar här utfallen när vi kastar ett mynt 10 gånger.

Hur blir det nu om vi kastar ett mynt 10,100,1000 … gånger. För 10 kast kan vi skriva så här:

expand$\left(\left(\frac{1}{2}\cdot kr+\frac{1}{2}\cdot kl\right)^{10}\right)$

$\blacktriangleright \frac{kl^{10}}{1024}+\frac{5\cdot kl^9\cdot kr}{512}+\frac{45\cdot kl^8\cdot kr^2}{1024}+\frac{15\cdot kl^7\cdot kr^3}{128}+\frac{105\cdot kl^6\cdot kr^4}{512}+\boldsymbol{\frac{63\cdot kl^5\cdot kr^5}{256}}+\frac{105\cdot kl^4\cdot kr^6}{512}+\frac{15\cdot kl^3\cdot kr^7}{128}+\frac{45\cdot kl^2\cdot kr^8}{1024}+\frac{5\cdot kl\cdot kr^9}{512}+\frac{kr^{10}}{1024}$

Blir ett ganska långt uttryck som svar. Sannolikheten att vi får 5 av varje är $\frac{63}{256} \blacktriangleright 0.246094$

binomPdf$\left(10,\frac{1}{2}\right)$

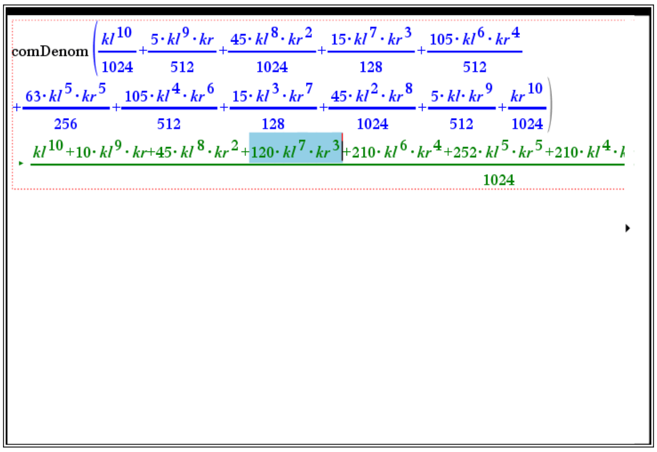
▸ {0.000977,0.009766,0.043945,0.117188,0.205078,0.246094,0.205078,0.117188,0.043945,0.0097

Ska vi beräkna på sannolikheterna för olika utfall när vi kastar ett mynt 100 gånger passar det bättre att göra beräkningarna i ett kalkylark och sedan rita ett diagram.

På nästa sida kan vi se att sannolikheten att vi får exakt 50 krona är ca 8 %. Fördelningen påminner om en normalfördelning.

Eftersom det finns $2^{10}=1024$ olika utfall så kan vi sätta vårt långa uttryck för binomutvecklingen på gemensam nämnare (instruktion *ComDenom*). Vi får ett väldigt långt uttryck som inte får plats på en rad utan vi får då skrolla åt höger.

Vi ser att det finns 120 olika kombinationer med 7 klave och 3 krona. ”10 över 3” är ju just 120.



Sid 7:

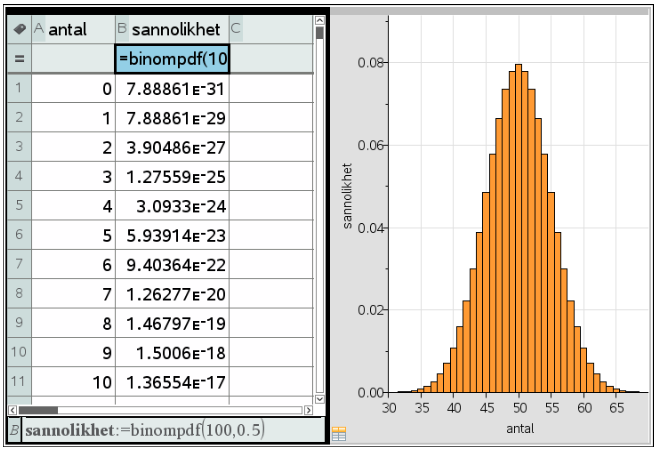
Hur ska vi nu göra om vi upprepar ett försök många gånger, t.ex. 100 gånger?

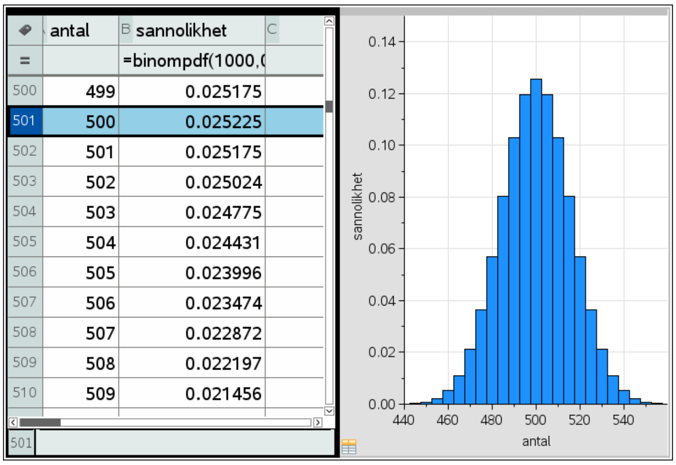
Då är det lämpligt att istället använda ett kalkylark för beräkningarna. I kolumnen antal har vi talen 0 till och med 100. Ett snabbt sätt att skapa denna talserie är att i cell a1 skriva 0 och i cell a2 skriva =a1+1. Sedan använder man funktionen *Fylla* och markerar celler till och med rad 101 och trycker sedan enter.

I formelfältet i kolumn B har vi sedan gjort en beräkning av sannolikheterna för 0, 1, 2 … lyckade utfall. Diagrammet visar sedan fördelningen av sannolikheterna.

När man väljer variabel på den lodräta axeln ska man välja ”Lägg till Y-sammanfattningslista” eftersom vi redan har sammanställda data. Vi har också valt en fönsterinställning från 30 till 70 eftersom sannolikheterna utanför detta intervall är så små att det inte syns i diagrammet.

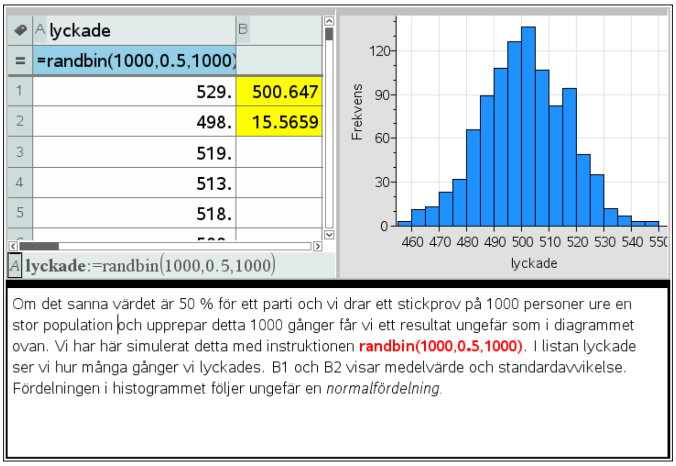
Vi ser att sannolikheten för ”fifty-fifty” är ca 8 %.





Så här blir det om vi gör samma beräkning för 1000 kast. Sannolikheten för exakt 500 lyckade kast, t.ex. 500 krona, är ca 2,5 %. Diagrammet visar fördelningen. Stapelbredden i histogrammet är 5.

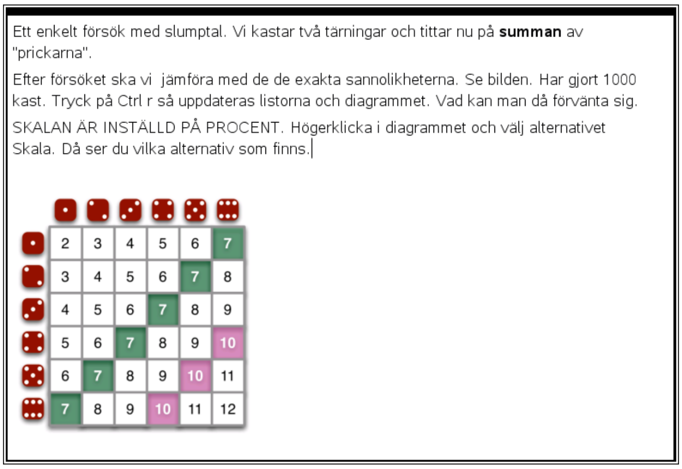
Man kan också *slumpa* fram tal ur en binomialfördelning. En jämförelse med försöket att singla slant är att ta många stickprov från en population där sannolikheten är 50 % att lyckas. Det kan handla om en opinionsundersökning där det sanna värdet för ett partis andel i populationen är 50 %. Aktiviteten som tar upp just detta heter *Opinionsundersökning*. Denna aktivitet är tänkt för kurs 2.



Sid 8-9:

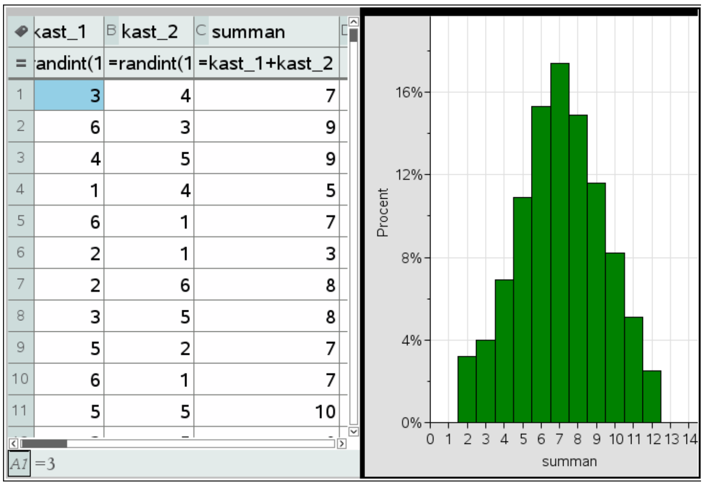
Vi avslutar denna aktivitet med att titta på utveckling av binom och försöken att kasta två och tre tärningar och titta på *summan* av prickarna. Det är brukar man oftast ta upp redan i kurs 1 i momentet Sannolikhet. Genom att utveckla binom där potenser ingår så kan man enkelt se både sannolikheter och utfall.

Se nästa sida!



Vi börjar här med att göra en simulering av försöket att kasta två tärningar och se på poängsumman.

Instruktionen för att alstra heltaliga slumptal heter *randint* och instruktionen för att slumpa fram 1000 slumptal mellan 1 och 6 blir randint(1,6,1000).



Om man trycker på Ctrl och r samtidigt när markören är i kalkylarket får man nya slumptal och diagrammet uppdateras.

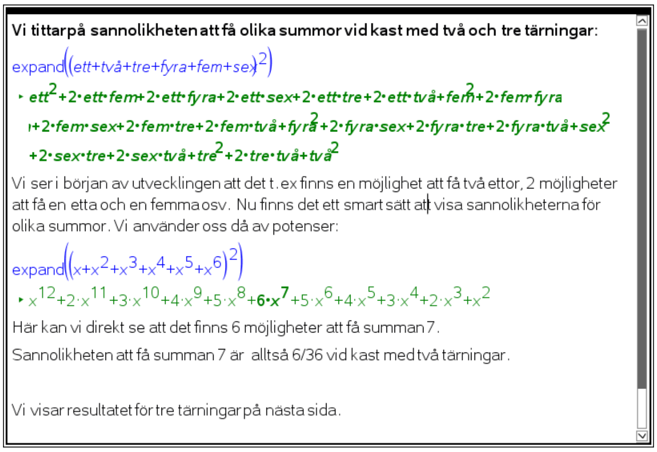
Sid 10-11:

Här visar vi hur man kan utveckla binom och få både poängsumma och antalet sätt att få just motsvarande summa.

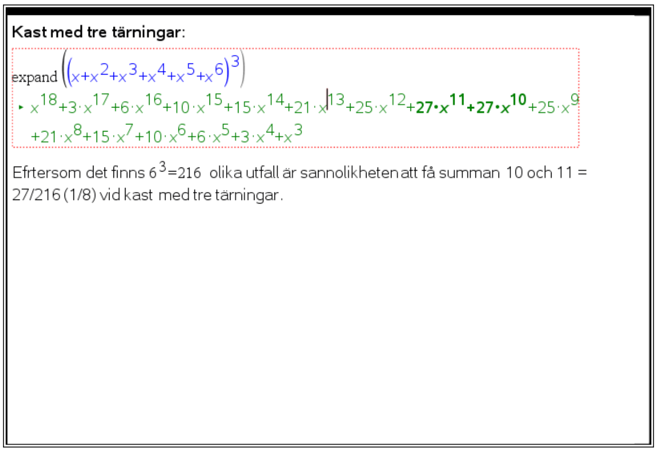
Det finurliga uttrycket blir då

$$\textbf{expand}\left((x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)^2\right)$$

Man kan säga att vi utnyttjar potenslagarna $(x^a \cdot x^b = x^{a+b})$ för att visualisera detta.



Poängsummor för tre kast kan man också visualisera



Tittar vi på antal möjligheter för oli8ka antal prickar ser vi att vi i börjanav tabellen har talen 1, 3, 6, 10, 15, 21. Det är de s.k. kallade triangeltalen. Differensen ökar med 1 varje gång t.o.m. 6:e raden i tabellen. Lika-dant nerifrån i tabellen. Man kan göra många upp-täckter när man använder de algebraiska verktygen.

Antal prickar	antal möjligheter
3	1
4	3
5	6
6	10
7	15
8	21
9	25
10	27
11	27
12	25
13	21
14	15
15	10
16	6
17	3
18	1