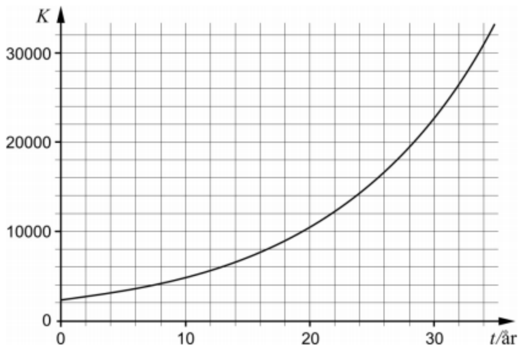
Derivata och exponentialfunktioner

Nedan finns en uppgift som gavs på ett nationellt prov för kurs 3 2013. Tanken var att man direkt ur grafen skulle uppskatta derivatan och sedan göras en tolkning av vad ett visst derivatavärde betydde.

Kanadagåsen infördes till Sverige på 1930-talet. Därefter har populationen ökat. Vid samma tidpunkt varje år görs en inventering av antalet kanadagäss. Populationens tillväxt kan beskrivas med en exponentiell modell. Diagrammet nedan visar antalet kanadagäss K som funktion av tiden t år, där $t = 0$ motsvarar år 1977.



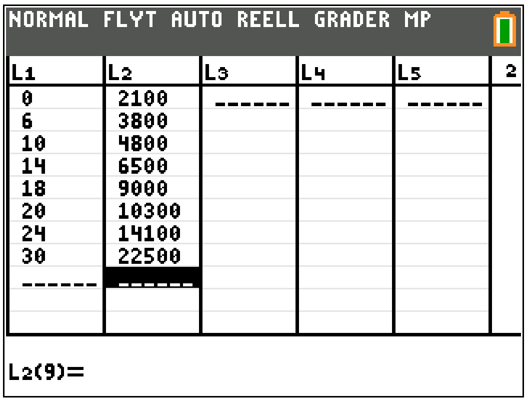
a) Bestäm ett närmevärde till $K'(30)$ med hjälp av grafen.

b) Ge en tolkning av vad $K'(20) = 800$ betyder för antalet kanadagäss i detta sammanhang.

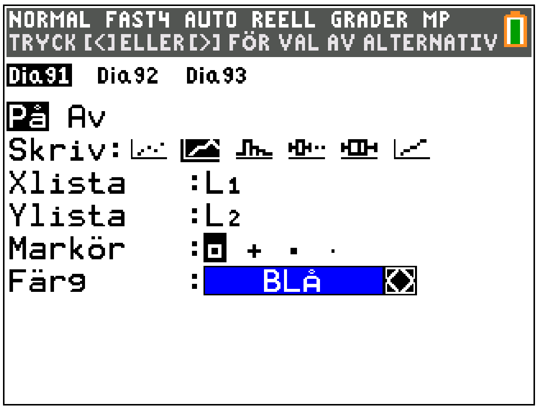
Vi ska nu bygga vidare på denna uppgift och visa hur man kan använda grafiska och numeriska verktyg hos räknaren för vidare undersökningar.

Modellering av exponentialfunktionen

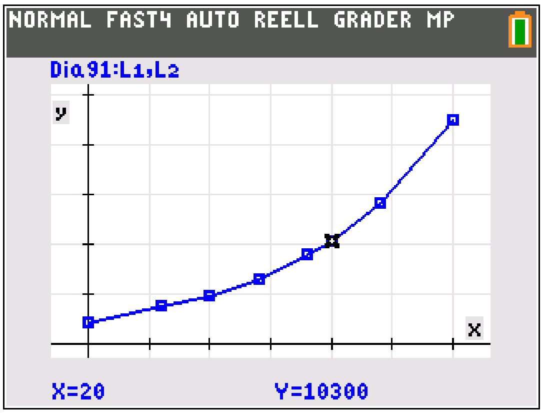
Vi börjar med att ur grafen göra avläsningar av populationens storlek efter olika år. Vi lägger sedan in dem i räknarens listeditor. Vi har valt avläsning av 8 utspridda punkter i diagrammet.



Man kan plotta ett linjediagram utifrån värdena i L1 och L2 genom att trycka på [2nd][stat plot] och ställa in för plottningen enligt nedan.



Så här blir plottningen med en bra fönsterinställning:



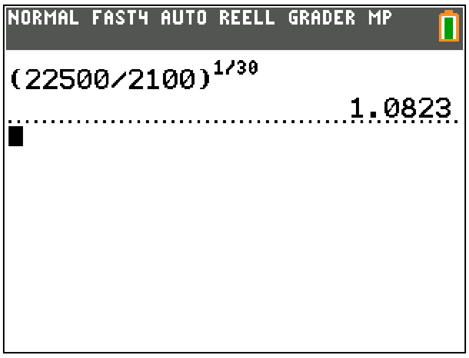
Eftersom vi vet att populationsutvecklingen kan beskrivas med en exponentialfunktion kan den tecknas som

$K = K_0 \cdot a^t$ a är här *förändringsfaktorn*

där K_0 är värdet vid tiden 0. Om vi använder värdet 2100 för t=0 och 22 500 för t=30 får vi följande ekvation

$$22500 = 2100 \cdot a^{30}$$

Nu kan vi lösa ut värdet på *a*:

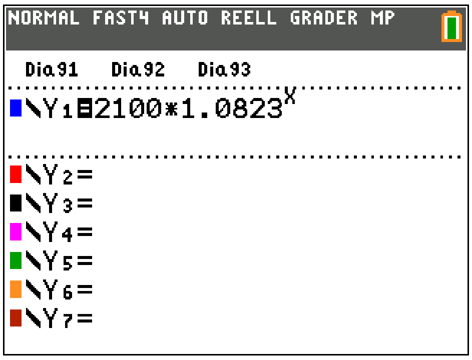


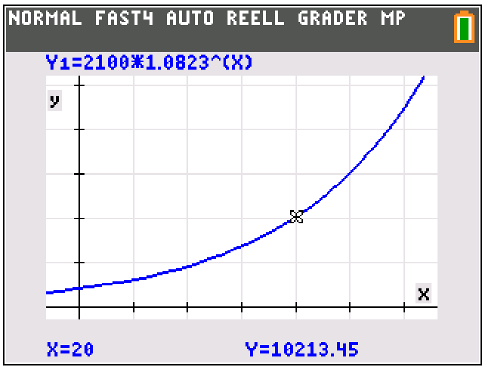
Populationen ökar alltså med ca 8 % per år.

Nu kan vi teckna en funktion som beskriver utvecklingen;

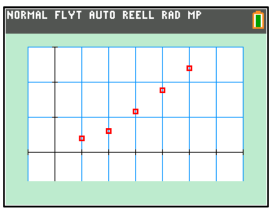
$K = 2100 \cdot 1.0823^t$

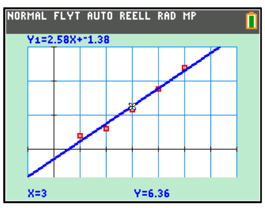
Vi plottar denna funktion





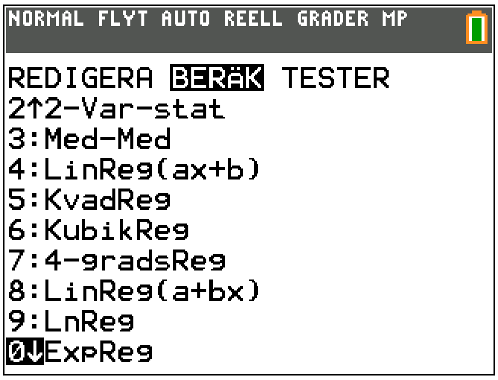
Det finns ett annat sätt att komma fram till en exponentialfunktion. Man gör då en s.k. *regressionsanalys*. I kurs 2 behandlades *linjär regression*, dvs. hur man kunde anpassa en linjär modell efter data med minstakvadrat-metoden:



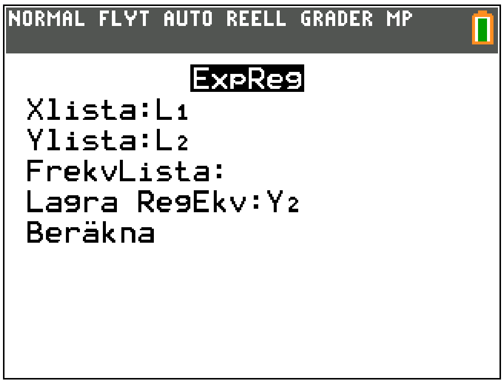


Räknaren har inbyggda funktioner för att göra regressionsanalys efter ett antal olika modeller.

Tryck på [stat] och välj BERÄKNINGAR och sedan ExpReg, som står för exponentiell regression:

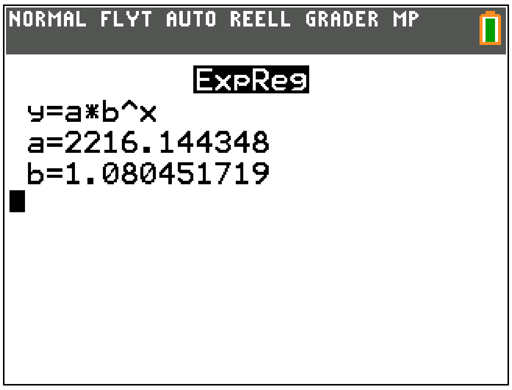


Fyll sedan i enligt nedan. Vi antar att våra data finns kvar i listorna L1 och L2.

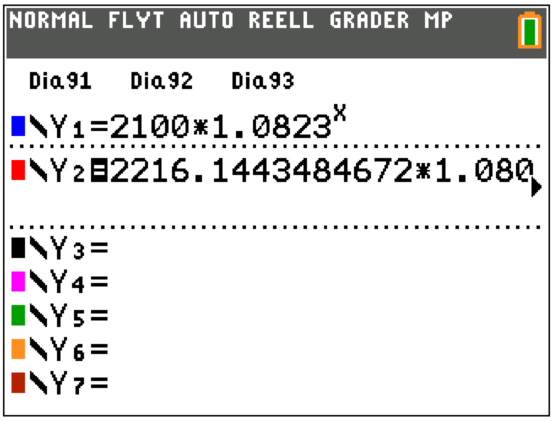


För att fylla i att den beräknade funktionen ska lagras i i listan med funktioner ([y=]) så kopierar man in den genom att trycka på [vars], välja Y-VAR, Funktion och sedan Y2.

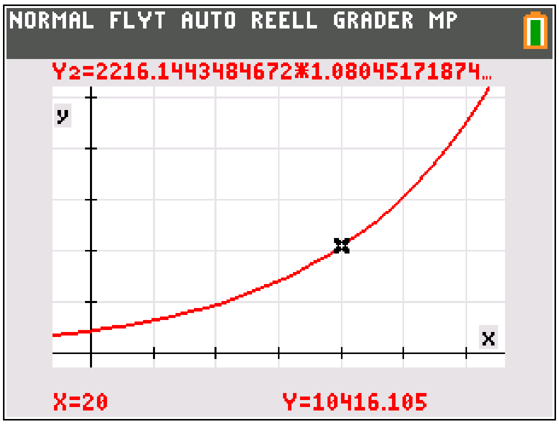
Markera Beräkna och tryck på [enter]. Så här blir resultatet



Vi ser att den beräknande modellen nu har hamnat på plats Y2 i listan med funktioner.



Så här ser den plottade funktionen ut. Vi får nästan samma resultat som när vi gjorde beräkningen utifrån två värden (värdet för $x = 0$ och värdet för $x = 30$).

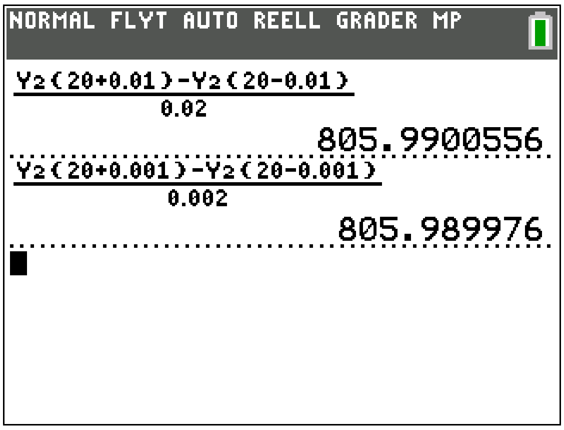


Nu är det dags att komma till derivatan. Räknaren kan inte beräkna derivatan exakt utan använder en numerisk metod med ändringskvot. Man använder den *symmetriska* differenskvoten. För små värden på *h* ger den oftast ett väldigt bra värde på derivatan i en punkt.

$$f'(a) \approx \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h}$$

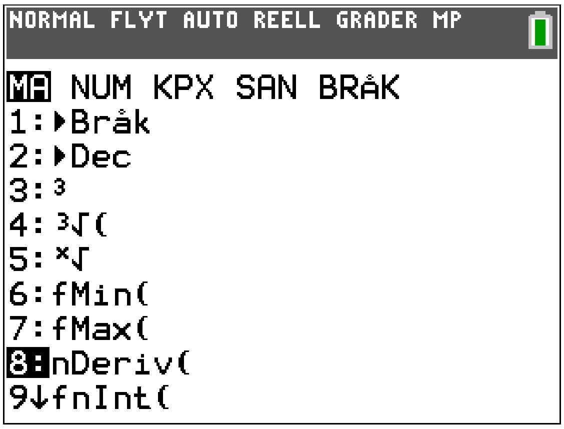
Då vår beräknade modell ligger lagrad i Y2 kan vi göra en beräkning av derivatan för $x = 20$ till exempel. Vi gör beräkningen med $h = 0.01$ och $h = 0.001$.

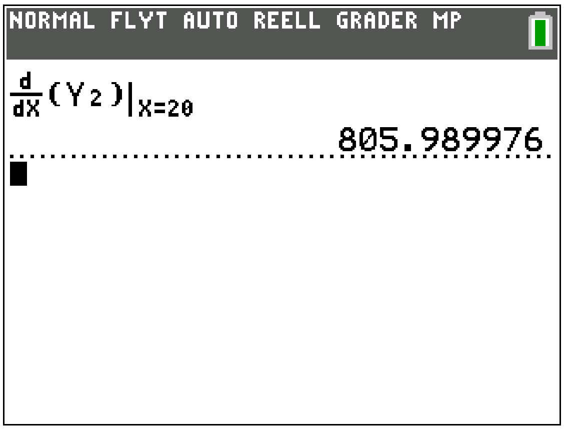
En snygg uppställning, som vi oftast ser dem i läroböcker, får vi om vi matar in uttrycken som bråk. Tryck på [alpha] [y=] så når du genvägen för bråkinmatning och kan göra dina inmatningar.



Vi får värdet 806 på derivatan både för $h = 0{,}01$ och $h = 0{,}001$.

Man kan också använda instruktionen nDeriv, som du hittar i [math]-menyn.



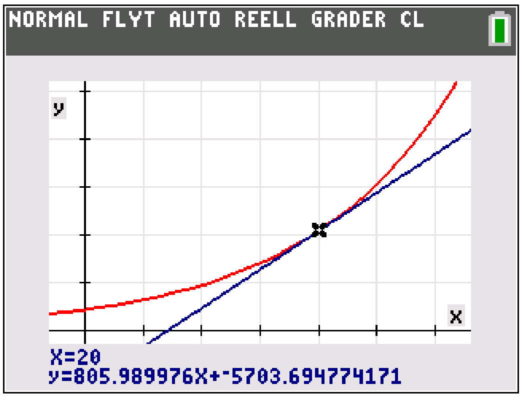


Vi får exakt samma värde som när vi använder *h*-värdet 0,001.

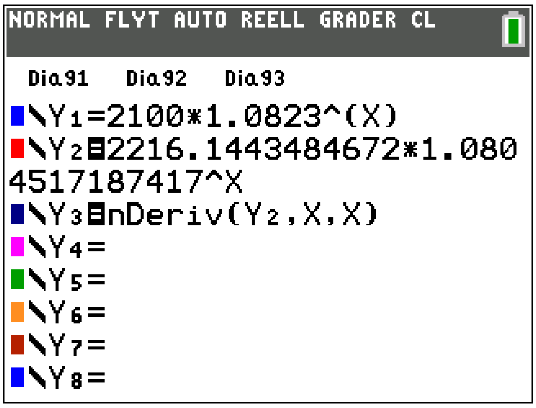
Det finns ett tredje sätt att beräkna derivatan numeriskt. När du har graffönstret på skärmen trycker du på [2nd] [draw]. Då kommer du till räknarens *ritverktyg*. Välj 5:Tangent.

Spåra fram till 20 till exempel och tryck på enter.

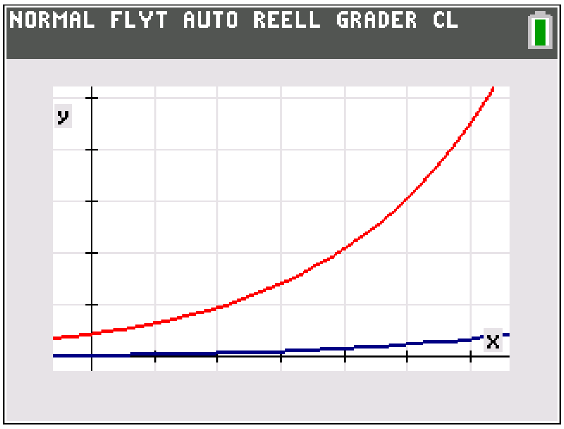
Nu ritas tangenten i punkten med x-koordinaten 20 ut och längst ner på skärmen visas tangentens ekvation. Vi ser att *k*-värdet för tangenten blir 806, precis som tidigare.



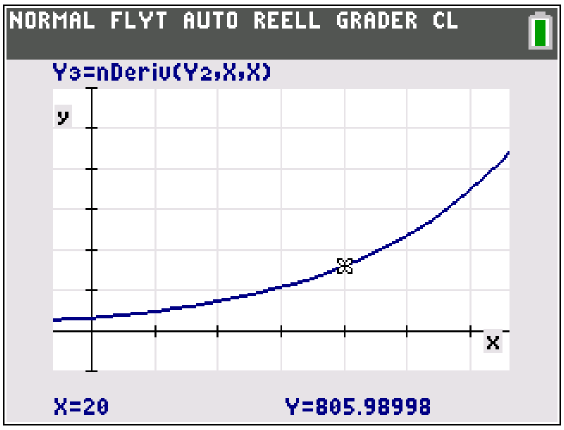
Vi kan också numeriskt plotta derivatan som en funktion med instruktionen *nDeriv*. Kopiera då in nDeriv från math-menyn på inmatningsraden för Y3 och skriv in enligt nedan.



Om vi nu plottar både funktion och dess derivata ser det ut så här:



För att se derivatafunktionen avmarkerar vi Y2 (placera markören på likhetstecknet och tryck på enter). Sedan ställer vi om fönstret.



Genom att spåra i grafen ser vi derivatavärdet för olika *x*-värden.

Utifrån den framräknade funktionen kan man naturligtvis också beräkna derivatan exakt.