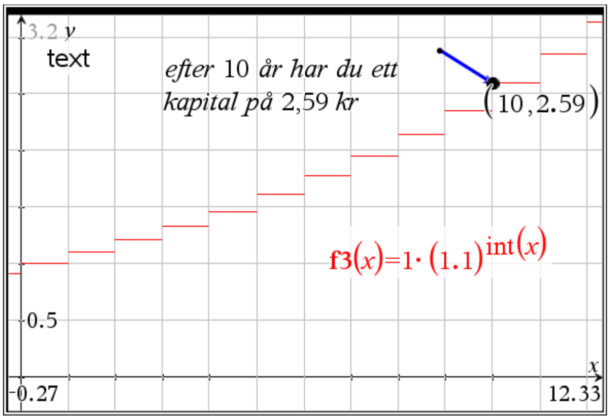
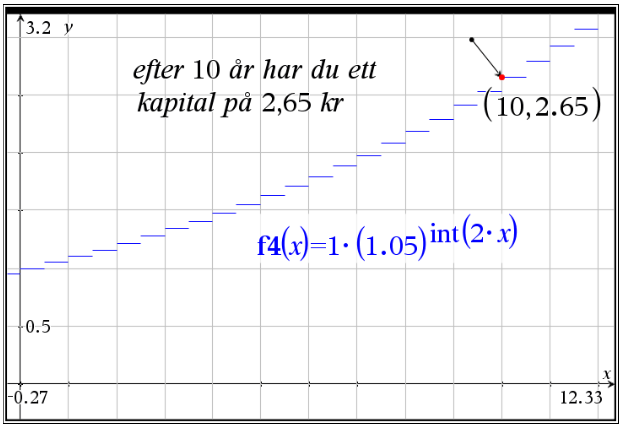
Exponentialfunktionen och ränteberäkningar

Exponentialfunktioner har många tillämpningar inom ekonomi. En av de viktigaste, ränta-på-ränta, har vi redan haft med i exempel och övningar tidigare. Här går vi vidare och kommer att upptäcka något intressant med ett speciellt tal.

Om man investerar 1 krona till 10 % årsränta och inte vare sig sätter in eller tar ut pengar så kan sambandet mellan tiden och de pengar man har innestående beskrivas med formeln $y = 1 \cdot 1{,}10^x$, där y är de innestående pengarna och x den tid i hela år som de stått inne. Räntan läggs på vid varje årsskifte och sedan händer ingenting på kontot förrän nästa årsskifte då ränta läggs på igen. Man säger att ränteperioden är ett år, och att räntan kapitaliseras årligen. Detta visas i det första diagrammet där vi har 1 kr som startkapital. Vi har använt funktionen *int*, som står för heltalsdelen. De vågräta linjestyckerna i trappan visar just att det sammanlagda kapitalet är oförändrat fram till årsskiftet då räntan läggs på.



Men man kan också lägga räntan till kapitalet oftare än en gång om året. Om halvårsräntan är 5% så blir sambandet $y = 1 \cdot 1{,}05^{\text{int}(2x)}$. x mäter antalet år och då är 2x antalet halvår.



Då man jämför olika låneformer brukar man räkna om de givna siffrorna till motsvarande årsränta, för att det ska bli lättare att jämföra. Efter ett år har man här

$y = 1 \cdot 1{,}05^2 = 1{,}1025$ kr

på kontot. Halvårsräntan 5 % motsvarar alltså en årsränta på 10,25 %. Helårsräntan är alltså inte dubbla halvårsräntan.

Vad blir nu halvårsräntan till om man vill att den ska motsvara en helårsränta på 10 %? Om vi säger att räntesatsen ska vara p % så får vi ekvationen

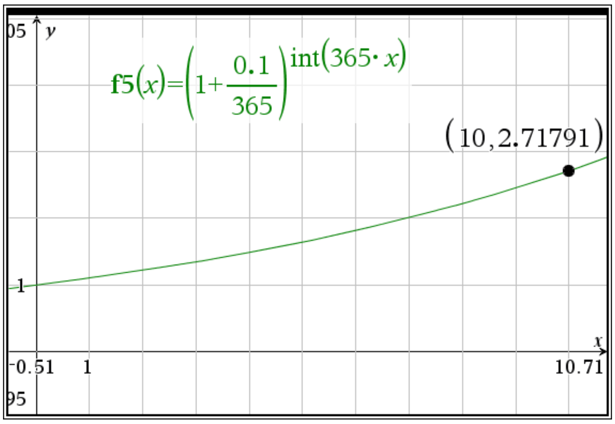
$$1 \cdot (1 + p / 100)^2 = 1 \cdot 1{,}10$$
$$1 + p / 100 = 1{,}10^{1/2}$$
$$p = 100 \cdot (1{,}10^{1/2} - 1) \approx 4{,}88\ \%$$

$\text{solve}\left(1\cdot\left(1+\frac{p}{100}\right)^2=1\cdot1.1,p\right) \blacktriangleright p=-204.88 \text{ or } p=4.8809$

Vi räknar sedan på olika kortare kapitaliseringsperioder, dvs att räntan räknas på allt mindre delar av år. Vi gör beräkningar med kapitalisering halvårsvis, månadsvis, veckovis osv ner mot allt kortare perioder.

Se nästa sida. Där har vi gjort beräkningarnas i kalkylarket. Det blir väldigt överskådligt.

Vi kan köra med månatlig, veckovis och daglig ränta om vi vill. Om vi nu väljer allt kortare perioder så blir vår int-funktion alltmer lik en riktig exponentialfunktion.



Om man nu låter antalet perioder gå mot oändligheten brukar man tala om *ögonblicklig* kapitalisering.

Vi räknar alltså på allt kortare kapitaliseringsperioder, dvs att räntan räknas på allt mindre delar av år. Vi gör beräkningar med kapitalisering halvårsvis, månadsvis, veckovis osv. Vi gjort beräkningarnas i kalkylarket. Det blir väldigt överskådligt. Titta noggrant på formeln för kolumn B. *kap_per* är alltså antalet kapitaliseringar per år. Den är vår *variabel*.

	A kap_per	B totalt	C	D
=		=1*(1+1/kap_per*(10/100))^(10*ka		
1	1.	2.5937		
2	2.	2.6533		
3	12.	2.707		
4	52.	2.7157		
5	365.	2.7179		
6	1000.	2.7181		
7	10000.	2.7183		
8	1.E5	2.7183		
9	1.E6	2.7183		

B $\text{totalt}:=1\cdot\left(1+\frac{1}{\text{kap\_per}}\cdot\frac{10}{100}\right)^{10\cdot\text{kap\_per}}$

Detalj av kalkylarket.

8	1.E5	2.7183
9	1.E6	2.7183
10	1.E8	2.7183

B10 =2.7182818270999

När vi har 10^8 perioder blir kapitalet med massa decimaler 2,7182818270999. Vi återkommer till detta.

Beräkningen av gränsvärdet nedan är inte inskrivet utan görs av TI-Nspire´s CAS-motor.

Detta tal som behållningen verkar att stabiliseras vid kallas för ***e*** och är tillsammans med ***π*** en av de viktigaste konstanterna i matematiken.
Konstanten dyker upp i många sammanhang.
Ska man vara formell så gäller att detta värde beräknas som

$$\lim_{k\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k}\right) \blacktriangleright e$$

TI−Nspire gjorde den symboliska beräkningen ovan när svaret blev ***e***.

Observera det betydligt enklare sättet att göra beräkningar om man använder konstanten ***e***.

Allt det här betyder nu att om vi har *k* st kapitaliseringar per år och räntan (r=0.10) beräknas och förs till kapitalet varje sekund, eller annat litet tidsintervall, under *N* år så kan uttrycket

$\left(1+\frac{r}{k}\right)^{k\cdot N}$ approximeras med $e^{r\cdot N}$

Vi kontrollerar för 10^6 beräkningsperioder per år.

$$\left(1+\frac{0.1}{10^6}\right)^{10^6\cdot 10} \blacktriangleright 2.71828169255$$

$$e^{0.1\cdot 10} \blacktriangleright 2.71828182846$$

Vi har nu tittat på exponentiell tillväxt där den relativa förändringen är konstant. Så är det inte alltid i den verkliga världen. Det tar vi upp i Problem 2.

Problem 2

<u>Lite mer om tillväxt i den verkliga världen</u>

Befolkningstillväxt sker ofta i princip exponentiellt, men ändå inte riktigt. Den är exponentiell i den meningen att tillväxten är proportionell mot befolkningens storlek. Ju fler människor det finns ju fler barn föds. Man skulle kunna skriva detta som

Befolkningsförändring = k·Befolkningsstorlek

Den här konstanten k är nu faktiskt inte är riktigt konstant. Den ändras över tid och befolkningskurvan blir då inte riktigt exponentiell. För ett antal år sedan år sedan räknade FN med en tillväxt på ca 1,3 % per år men nu har man justerat detta till 1,1 % per år för det närmaste decenniet. År 2055 kommer befolkningen att vara ca 10 miljarder och den relativa befolkningstillväxten bara ca 0,5 % per år.

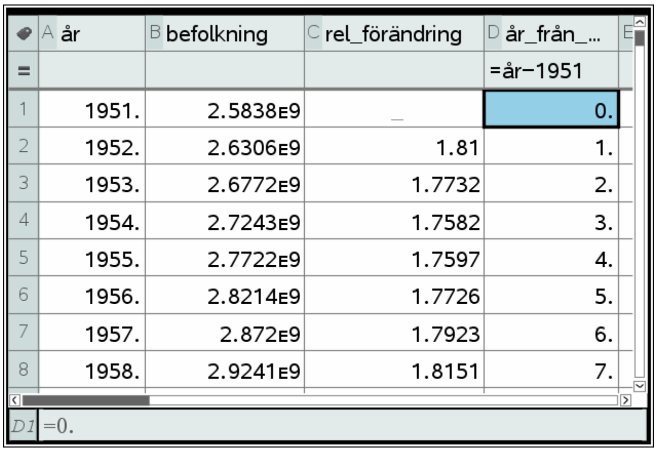
I detta problem visar vi på en tillväxt som inte är riktigt exponentiell. Vi har valt världens befolkningsutveckling från 1951 till 2017, vilket är 66 år. Under denna tid steg befolkningen från **2,58** miljarder till **7,55** miljarder. Om vi antar att befolkningen steg helt exponentiellt och vi vill beräkna den årliga ökningen i procent kan vi lösa följande ekvation

$$\text{solve}\left(7.5503=2.5838\cdot\left(1+\frac{p}{100}\right)^{66},p\right)$$

$\blacktriangleright$ p=-201.64 or p=1.638

Med en tillväxt på ca 1,64 % årligen så skulle befolkningen i den modellerade världen öka från 2,58 till 7,55 miljarder.
Så här ser våra data ut. De är inkopierade direkt från en webbsida till kalkylarket. Vi har skapat *en* ny kolumn med data i kolumn D med formeln **=år-1951**. Då får vi 0 som startår, vilket är praktiskt då man räknar med förändringar.

Data i kolumnen **rel_förändring** återkommer vi till.



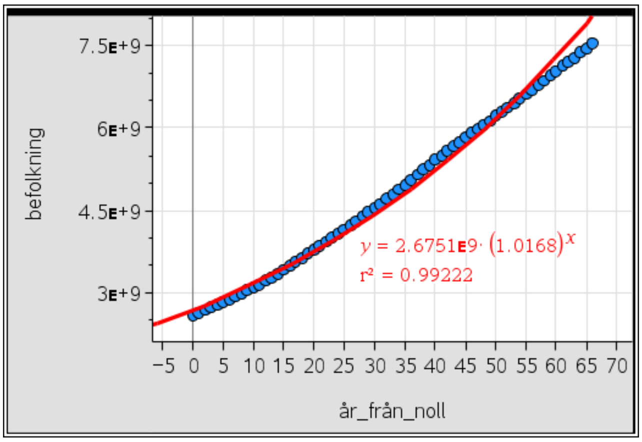
	A år	B befolkning	C rel_förändring	D år_från_...	E
=				=år−1951	
1	1951.	2.5838E9	_	0.	
2	1952.	2.6306E9	1.81	1.	
3	1953.	2.6772E9	1.7732	2.	
4	1954.	2.7243E9	1.7582	3.	
5	1955.	2.7722E9	1.7597	4.	
6	1956.	2.8214E9	1.7726	5.	
7	1957.	2.872E9	1.7923	6.	
8	1958.	2.9241E9	1.8151	7.	

D1 =0.

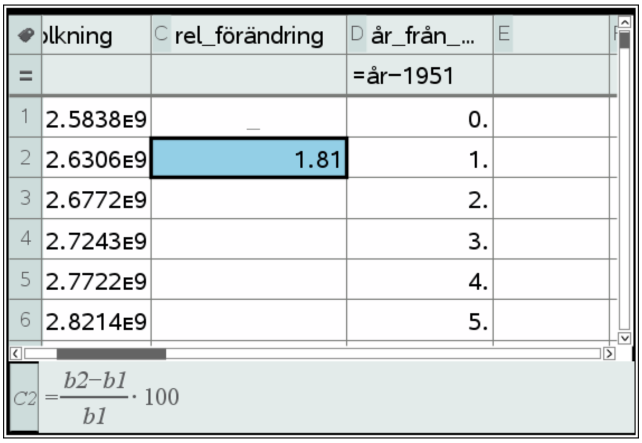
Vi ritar nu ett spridningsdiagram i appen Data & Statistik. Man väljer variabel under vågräta axeln och till vänster om den vågräta axeln.

Vi väljer sedan att analysera data genom s.k. exponentiell regression. Välj då *Analysera/Regression/Visa exponentiellt*

Då får vi våra data och själva regressionskurvan.



Resultatet blir en tillväxtfaktor som är ca 1,68 %. Verkligheten bakom siffrorna är dock betydligt mer komplicerad än så. Vi ska nu ta och beräkna förändringen år från år och se vad vi får.



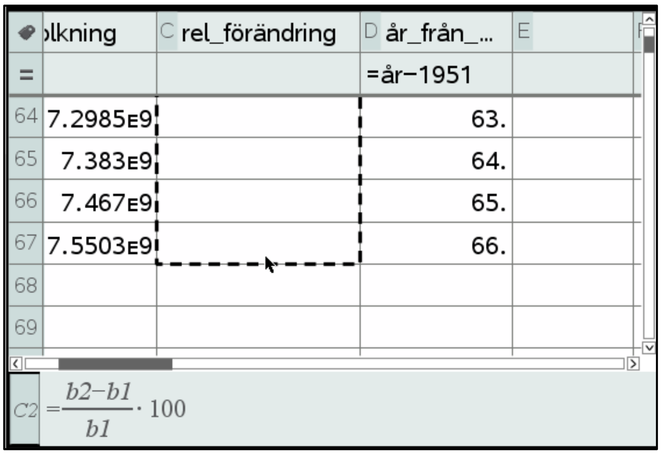
	ılkning	C rel_förändring	D år_från_...	E
=			=år−1951	
1	2.5838E9	_	0.	
2	2.6306E9	1.81	1.	
3	2.6772E9		2.	
4	2.7243E9		3.	
5	2.7722E9		4.	
6	2.8214E9		5.	

C2 $=\frac{b2-b1}{b1}\cdot 100$

Börja med att skriva in =(b2-b1)/b1*100 i cell c2. Då beräknas den relativa förändringen i befolkningen mellan år 0 och år 1. Vi får värdet 1.81 som betyder att ökade med 1,81 %.

Låt nu markören vara kvar i cell c1 och högerklicka. Då kommer följande meny upp:

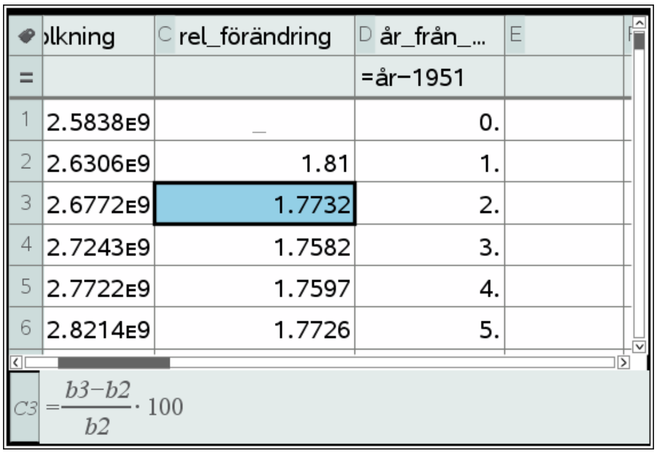
Gå till 6:Fylla och gå sedan ner och markera med det streckade fältet ned till rad 67 och tryck enter.



	ılkning	C rel_förändring	D år_från_...	E
=			=år−1951	
64	7.2985E9		63.	
65	7.383E9		64.	
66	7.467E9		65.	
67	7.5503E9		66.	
68				
69				

C2 $=\frac{b2-b1}{b1}\cdot 100$

Nu kommer alla celler att fyllas med beräknade data.



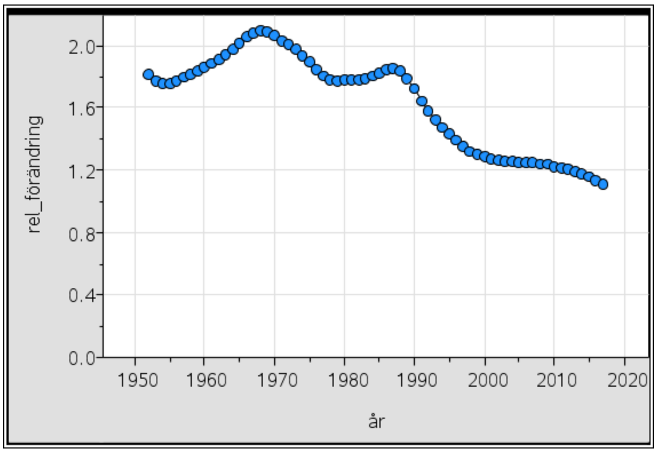
	ılkning	C rel_förändring	D år_från_...	E
=			=år−1951	
1	2.5838E9	_	0.	
2	2.6306E9	1.81	1.	
3	2.6772E9	1.7732	2.	
4	2.7243E9	1.7582	3.	
5	2.7722E9	1.7597	4.	
6	2.8214E9	1.7726	5.	

C3 $=\frac{b3-b2}{b2}\cdot 100$

I cell c3 har vi då beräkningen $=\frac{b3-b2}{b2}\cdot 100$, i cell c4 $=\frac{b4-b3}{b3}\cdot 100$ osv.

Vi får alltså resultat som rad för rad visar den relativa förändringen i procent.

Ritar vi ett diagram så för vi följande intressanta utveckling:



Uppföljning

Tänk dig att du har en krona och att räntan är 100 procent per år. Om räntan läggs till kapitalet en gång i slutet av året så kommer behållningen då att vara 2 kr. Vad händer om räntan beräknas oftare? Hur stor är då behållningen efter ett år?

Be eleverna att genomföra beräkningarna på samma sätt som vi gjorde när räntan var 10 % och vi beräknade behållningen efter 10 år.