## Thema: Visualisierung - Äquivalenzumformungen v.Gleichungen

Thomas Müller ☒ TI-Nspire™ CAS

Schlagworte: Äquivalenzumformung, Gleichungen lösen, Funktionen Zeichnen, lineare Funktionen, Vernetzung Funktionenlehre, Gleichungslehre, Visualisierung

# Schülermaterial:

### Aufgabe/Arbeitsauftrag:

Gegeben ist die Gleichung $0{,}5\cdot x = 6 - x$

a) Löse die Gleichung zunächst Schritt für Schritt händisch mit Hilfe von Äquivalenzumformungen.
b) Öffne ein Calculator-Fenster und erzeuge aus dem linken Term li(x) und rechten Term re(x) die Funktionen y = li(x) bzw. y = re(x). Stelle sie graphisch in einem Koordinatensystem dar. Öffne dazu ein Graphs-Fenster (wie in der Abbildung unten). Wie kann man die Lösung x = … in der Zeichnung erkennen? Nach jeder Äquivalenzumformung erhält man „neue“ Terme, die ebenfalls darzustellen sind. Beschreibe die Veränderung der Graphen in Worten.
c) Das Multiplizieren einer Gleichung mit einer Zahl und das Addieren/Subtrahieren von Termen gehört zu den Äquivalenzumformungen. Dabei bleibt die Lösung einer Gleichung unverändert. Wie sieht es mit der Multiplikation einer Gleichung mit einem Term, z.B. mit x aus? Multipliziere die Ausgangsgleichung mit x und stelle - so wie in b) beschrieben – die neuen Funktionen graphisch dar. Was stellst du fest?

So kannst du beginnen …

Im ersten Schritt könnte die Darstellung so aussehen (Abb. 1):

Hinweise zur Eingabe der Funktionen: **Calculator:** li1(x) := $1.5 \cdot x$
**Graphs:** Funktionseingabeleiste mit *TAB* oder *STRG g* aktivieren: f1(x) = li1(x)

Beachte: Welche x-Koordinate hat der Schnittpunkt und wie heißt die Lösung der Gleichung?

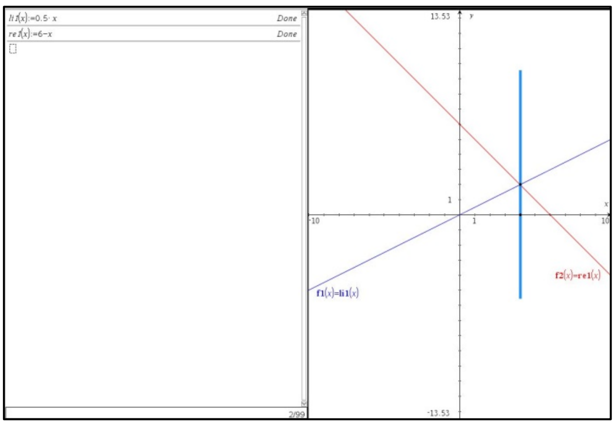


Abb.1

✂-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

## Didaktischer Kommentar:

Die Bedeutung, die hinter alltäglichen Äquivalenzumformungen liegt, soll den Lernenden an Hand des Lösens einer einfachen Gleichung bewusst werden. Dazu werden die gleichgesetzten Terme als zwei eigenständige Funktionen interpretiert und diese danach graphisch dargestellt. Die Bedeutung des x-Wertes des Schnittpunktes der beiden Funktionsgraphen als Lösung der ursprünglichen Gleichung sollte den lernenden selbst bewusst werden.

Mit dieser Kompetenz ausgestattet, können nun andere Umformungen einer Gleichung auf gleiche Weise graphisch interpretiert werden: Das Verständnis, warum beim Multiplizieren mit Variablen Lösungen hinzukommen, wird graphisch unterstützt. Man „sieht" sozusagen, wie „blinde Passagiere" dazukommen.

Die Technologie wird als Visualisierungshilfe benötigt, vor allem die Fähigkeit, rasch Graphen erzeugen zu können. Ohne diese käme man nie auf die Idee, an einem solchen Beispiel die Zeit mit dem Zeichnen so vieler Graphiken zu „verschwenden".

### Vorschlag zur Umsetzung / Technologiehilfe:

a) Bei der Lösung wurden vermutlich folgende Äquivalenzumformungen angewendet

| | | | |
|---|---|---|---|
| Zunächst | $0{,}5.x = 6 - x$ | $\mid +x$ | Umformung 1 |
| | $1{,}5.x = 6$ | $\mid :1{,}5$ | Umformung 2 |
| | $x = 4$ | | |

(So wurde das in der Unterstufe gelernt.)

b) Linker und rechter Term werden jeweils als Term einer Funktion interpretiert. In diesem Fall sind sie beide linear. Sie sollen hier mit y = li1(x) und y = re1(x) bezeichnet werden, also ist li1(x) = 0,5.x und re1(x) = 6 – x

Was bedeutet in der Graphik „Lösung" der Gleichung"?

Lösung = x-Koordinate des Schnittpunktes

Möglicher Exkurs: Hat auch die y-Koordinate eine Bedeutung für die Lösung der Gleichung? Dazu könnte man an die graphische Lösung von Gleichungssystemen erinnern, in diesem Fall des Systems y = 1,5.x und y = 6 – x [Lösung (4/2)]

Was bedeuten diese Umformungen geometrisch (für die beiden Graphen)?

Verbale Beschreibung der Graphen (Abb. 2) nach Anwendung der Äquivalenzumformungen könnte tabellarisch etwa auf folgende Weise erfolgen:

| Funktionsgleichung „links“ | Gleichung | Funktionsgleichung „rechts“ |
|---|---|---|
| Li1(x) = 0,5.x | 0,5.x = 6 - x | Re1(x) = 6 – x |
| | Schritt 1: \|+x | |
| Li2(x) = 1,5.x<br><br>Der Anstieg der linearen Funktion beträgt nun 1,5 statt 0,5, die Gerade verläuft nach wie vor durch den Ursprung ist aber steiler ansteigend. | Beachte, dass die x-Koordinate des Schnittpunktes unverändert bleibt unverändert. | Re2(x) = 6<br><br>Durch Subtraktion von x wird die Funktion konstant. Der Graph ist eine waagrechte Gerade. |

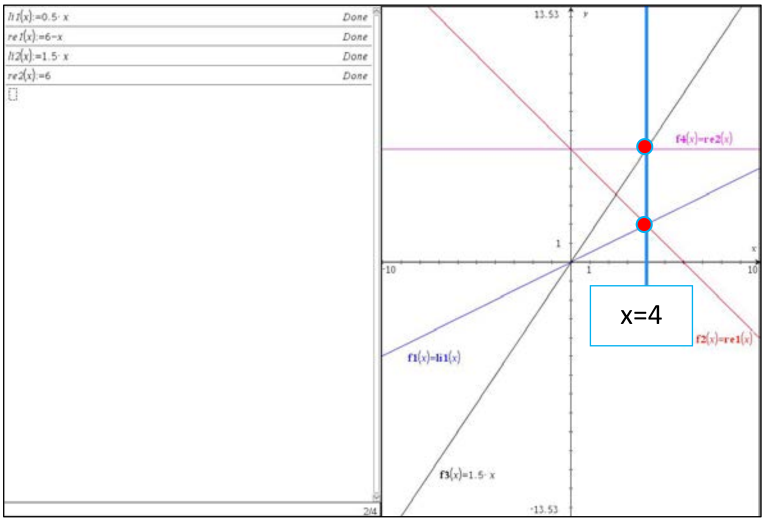


Abb. 2: Graphen der Funktionen li2(x) und re2(x)

Nun folgt die Umformung 2, die Division durch 1,5

| Funktionsgleichung „links“ | Gleichung | Funktionsgleichung „rechts“ |
|---|---|---|
| Li2(x) = 1,5.x | | Re2(x) = 6 |
| | Schritt 2: \|:1,5 | |
| Li3(x) = x<br><br>Der Anstieg der linearen Funktion beträgt nun 1,0 statt 1,5, die Gerade verläuft nach wie vor durch den Ursprung und ist nun 45° ansteigend (erste Mediane). | Beachte, dass die x-Koordinate des Schnittpunktes unverändert an der Stelle x = 2 bleibt. | Re3(x) = 4<br><br>Die konstante Funktion wurde um 2 Einheiten parallel nach unten verschoben. |

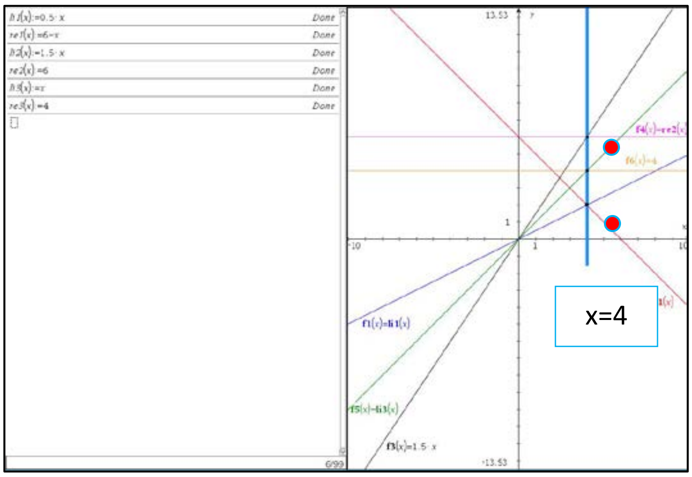


Abb. 3: Nun sind die Graphen li3(x) und re3(x) hinzugekommen.
Nach wie vor liegen alle Lösungsschnittpunkte auf x = 4.

c) Die Multiplikation mit einer Variablen (hier x) ist keine Äquivalenzumformung. Wie wirkt sich diese Umformung graphisch aus?

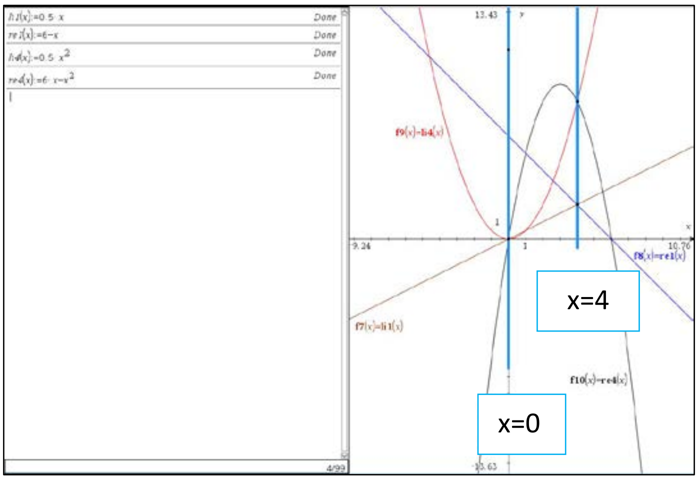


Abb.4: Durch die Multiplikation mit x entstehen quadratische Polynome, deren Bilder Parabeln sind. Neben der tatsächlichen Lösung „4“ kommt nun der Schnittpunkt an der Stelle x = 0 hinzu, eben ein „blinder Passagier“

.

## Technologiehilfe:

Im Prinzip wird nur das Eingeben von Funktionstermen im Calculator mit Hilfe des „:=“ Befehls und das Zeichnen der Funktionsgraphen in der Applikation „Graphs“ benötigt. Das technische „Overhead-Wissen“ ist also denkbar gering.
**Calculator:** li1(x) := 1.5 . x
**Graphs:** Funktionseingabeleiste mit TAB oder STRG g aktivieren: f1(x) = li1(x)

**Literatur:** https://www.bifie.at/system/files/dl/srdp_ma_praxishandbuch_mathematik_2011-08-22.pdf [2013-07-15] p124f und bes. Aufgabe 5 p129f