Mot oändligheten

Vi ska nu gå igenom ett begrepp som kan tillämpas i många olika situationer när man sysslar med funktioner och innan man kommer in på begreppet derivata. Vi arbetar i denna aktivitet med beräkningar, både algebraiskt och grafiskt/numeriskt, med stora värden på den oberoende variabeln.

Om man beräknar värdet av $1/x$ för allt större och större värden på x så ser man att värdet närmar sig noll. Detta kallas gränsvärde. Man säger att ”gränsvärdet för $1/x$ då x går mot oändligheten är noll”.

Det skrivs så här:

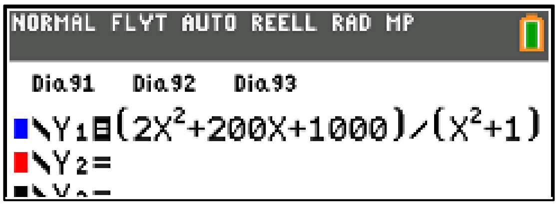
$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$$

Observera att $1/x$ aldrig blir exakt noll. Man kan dock få det hur nära noll man vill. Man väljer då bara tillräckligt stora värden på x.

Den här aktiviteten består av tre delar. Först kommer du att undersöka, grafiskt och numeriskt, funktioners beteende när det inmatade värdet närmar sig oändligheten. Därefter kommer du att grafiskt undersöka gränsvärden som inte existerar och där man får ett nästan kaotisk beteende i utmatade värden när de inmatade värdena fortsätter att närma sig ett visst värde. Avslutningsvis ska du göra undersökningar på några olika gränsvärden.

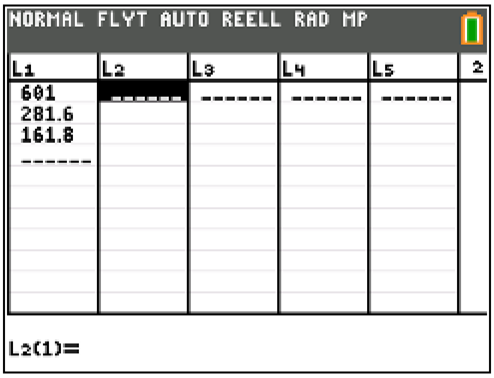
Börja med att mata in följande funktion i editorn

$$f(x)=\frac{2x^2+200x+1000}{x^2+1}$$



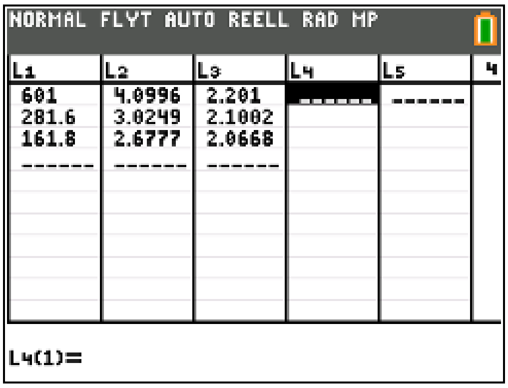
Undersök nu funktionsvärdena för x-värdena 1, 2 och 3. Vi ska lägga dessa värden i en lista i statistikeditorn. Det kan göras enkelt genom att skriva så här i grundfönstret i räknaren:

Y1 når du genom att trycka på tangenten vars och sedan välja Y-VAR och därefter funktion. Du använder klammerparenteser skriva in data i listor. Om du nu går till statistikeditorn (tryck på stat) så ser det ut så här i editorn:



Upprepa nu samma procedur för x-värdena 100, 200 och 300 och lagra dina värden i L2. Slutligen gör samma sak för x-värdena 1000, 2000 och 3000 och lagra värdena i listan L3.

När du är klar ser det ut så här:



1. Titta nu närmare på värdena i de tre listorna. Vilka slutsatser kan du dra när *x*-värdena ökar.

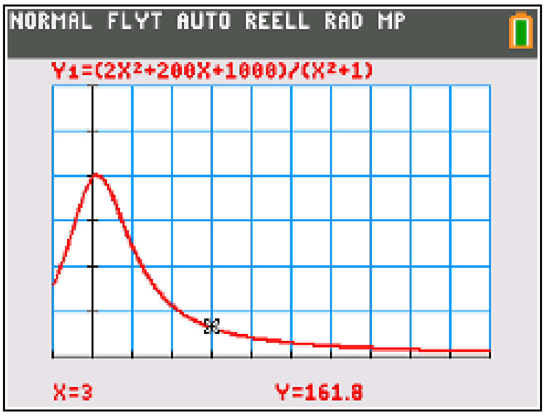
____

____

2. Om vi nu låter x-värdena öka utan någon övre gräns säger man att de närmar sig oändligheten. Testa nu detta för väldigt stora tal. I grundfönstret kan du till exempel beräkna värdet när x=10^{10}, 10^{15} och 10^{20}. Vad får du för resultat?

____

Om vi nu plottar funktionen för små x-värden ser det ut som nedan. Det är svårt att samtidigt se hur *y*-värdet minskar för både små och stora *x*-värden i en graf.

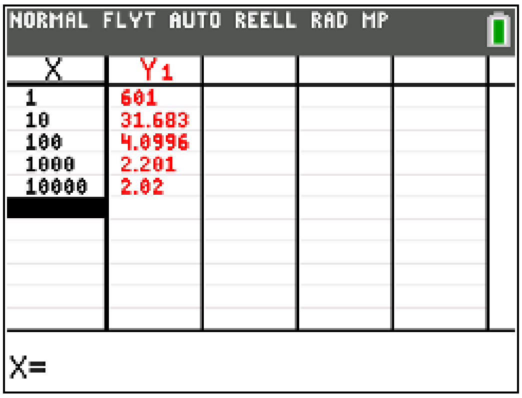


Funktionsvärdet verkar sjunka relativt långsamt när *x*-värdet ökar. Funktionen har ett maxvärde när *x* är lite större än noll.

Försök nu att plotta för allt större x-värden. Du kan naturligtvis också ta fram tabeller. Man ställer in sin funktionstabell med att trycka [2nd] [tablset] och ställer in så skärmbilden nedan visar. Du skriver alltså in *x*-värdet och får *y*-värdet beräknat.

Nu kan man fylla in sina x-värden som man önskar och får y-värdet beräknat.

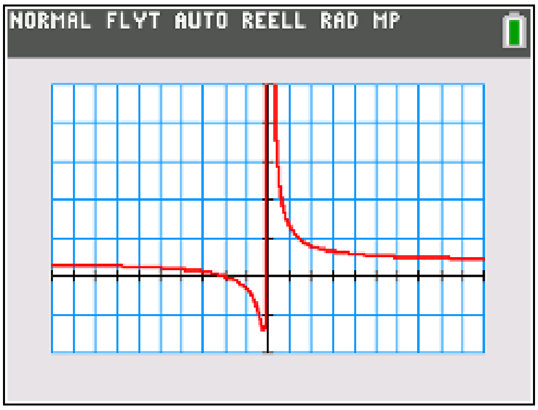
3. Fyll nu på med nya stora *x*-värden och få *y*-värdet beräknat.



4. Gör nu en liknande beräkning för stora *negativa* x-värden och beräkna

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{2x^2 + 200x + 1000}{x^2 + 1}$$

Så här ser grafen ut när vi även har med kvadrant 2. Här har funktionen ett minimivärde när x är lite mindre än 0. Försök nu själv att ställa in ett fönster som ser ungefär som nedan.



Kan man göra en mer algebraisk beräkning av gränsvärdena?
Det finns ett bra knep: För mycket stora värden på x så är x^2-termen mycket större än x-termen och 100. Dividera då alla termer med x^2!

Vi får då:

$$\frac{\frac{2x^2}{x^2} + \frac{200x}{x^2} + \frac{1000}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} + \frac{1}{x^2}} = \frac{2 + \frac{200}{x} + \frac{1000}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2}}$$

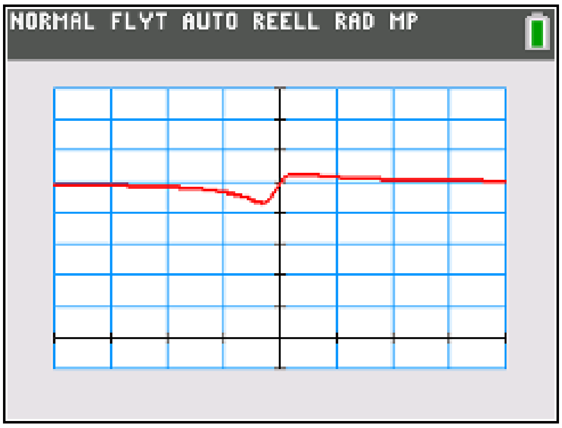
Vi ser att alla termer utom de röda går mot noll för mycket stora x. Det betyder att hela uttrycket går mot 2/1=2 när *x* blir mycket stort. Det gäller både när x går mot -∞ och +∞.

Vi tar några exempel till:

$$y = \frac{2x^2 + 3x + 5}{4x^2 + 5x + 10}$$

5. Beräkna nu gränsvärdet när x går mot negativa och positiva oändligheten.

Så här ser funktionen ut när vi plottat mellan x = -20 och x = 20.



6. Beräkna $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{4x - 1}{\sqrt{x^2 + 2}}$

Avslutningsvis:

7. Beräkna värdet hos funktionen

$$f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

för väldigt stora *x*. Vad är gränsvärdet när *x* går mot ∞. Plotta funktionen med följande inställning