RÉSOUDRE UNE ÉQUATION

Auteur : Marie-Laurence Brivezac **TI-83 Premium CE**

Mots-clés : Équations, résolution graphique, résolution algébrique, algorithme.

1. Objectifs

- Pour un même problème, combiner résolutions graphique et algébrique.
- Utiliser les représentations graphiques données sur écran par une calculatrice.
- Utiliser le solveur de la calculatrice.
- Encadrer une racine d'une équation grâce à un algorithme de balayage ou de dichotomie.

2. Énoncé

Rares sont les équations en mathématiques que l'on peut effectivement résoudre : les équations polynômiales du premier degré et du second degré et l'on dispose de peu ou pas de méthode *générale* au-delà.
Et encore moins pour les équations non polynômiales.
Il est donc important d'être capable de résoudre de façon *approchée* des équations de type $f(x) = 0$, où f est une fonction d'une variable réelle x.

Nous verrons différentes méthodes de mise en œuvre. Et pour rester dans le cadre d'une classe de seconde, nous travaillerons sur l'équation du second degré notée (E) :

$$\text{(E)} : x^2 = 5x - 1$$

3. Commentaires

En utilisant les possibilités de la calculatrice, dans une première partie, nous aborderons la question de la résolution graphique, puis, dans une seconde partie, la résolution par le calcul.

L'activité se terminera par un peu de calcul numérique. On vérifiera si un nombre est solution ou non d'une équation.

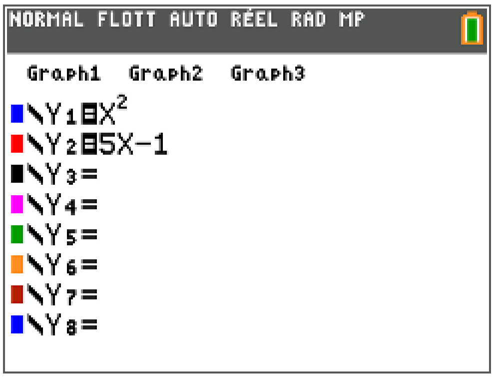
4. Conduite de l'activité

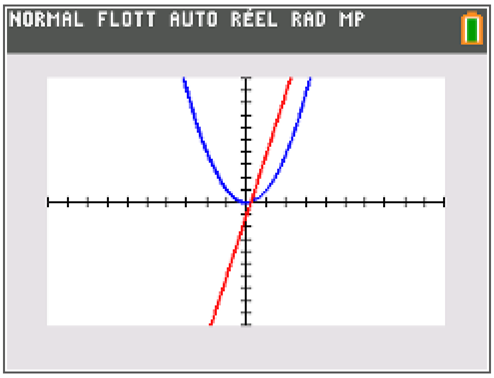
1) Résolution graphique

Soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction carré et $\mathscr{D}$ la droite représentant la fonction affine f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 5x - 1$.
Résoudre graphiquement l'équation (E) revient à déterminer les abscisses des points d'intersection des courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$.

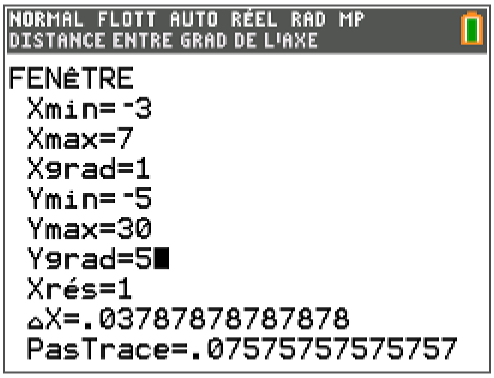
Les touches utiles dans la suite se trouvent sous l'écran.

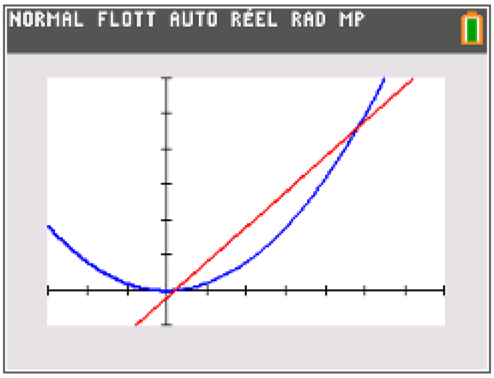
Dans un premier temps, on trace $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$ en rentrant leurs équations dans l'éditeur obtenu avec la touche f(x), le premier écran ci-dessous est obtenu. Puis les graphes sont obtenus sur l'écran avec la touche graphe dans la fenêtre par défaut (si celle-ci n'a pas été modifiée avec fenétre).



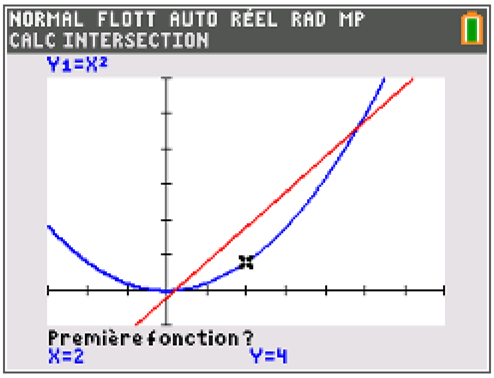


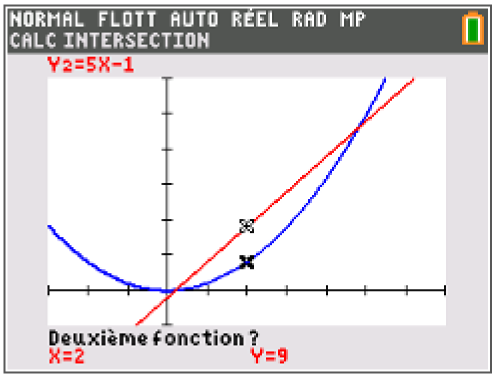
La représentation laisse penser que les courbes sont sécantes en un second point hors fenêtre.
Celle-ci doit donc être modifiée en utilisant la touche [fenêtre] suivie d'un nouveau tracé avec [graphe].





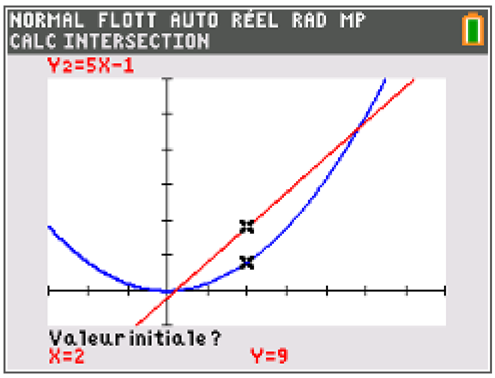
Suite à quoi, taper les touches [2nde] [trace] (soit [calculs]) permet de choisir en proposition [5] la recherche des intersections. Les graphiques sont proposés et on commence par choisir les courbes à utiliser.



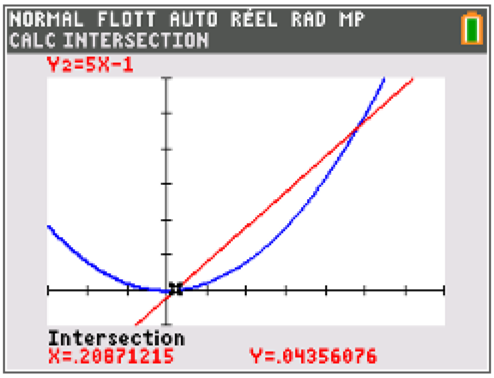


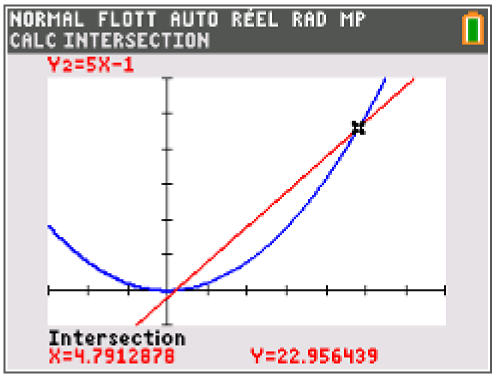
Il faut ensuite choisir une valeur initiale pour l'abscisse *x*.
La calculatrice indiquera la valeur solution la plus proche de ce choix.

Ci-contre, en indiquant une valeur initiale de 2, la solution qui sera trouvée est celle de l'intervalle [0 ; 1].



Une fois la première solution trouvée, il faut recommencer la même démarche pour obtenir l'autre solution. On pourra choisir une valeur initiale de 3 par exemple.





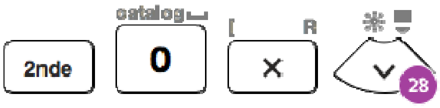
Finalement, on peut conclure, graphiquement, que l'équation $x^2 = 5x - 1$ admet deux solutions 0,21 et 4,80 à 0,01 près.

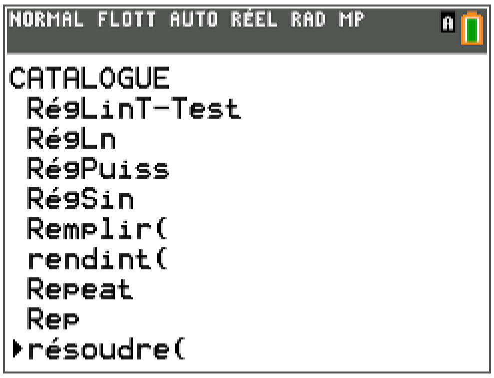
2) Résolution en valeur exacte

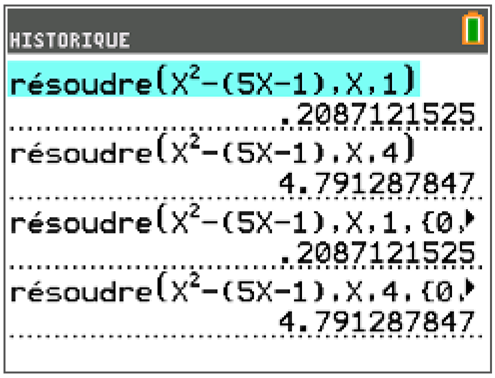
La commande **résoudre()** permet d'obtenir ces mêmes solutions approchées. On commencera par transformer l'équation sous la forme $f(x) = 0$:

$$\text{(E)} \Leftrightarrow x^2 - (5x - 1) = 0.$$

Cette commande est disponible à partir du catalogue accessible par la séquence suivante :







Cette commande donne la racine de l'expression $x^2 - (5x - 1)$ la plus proche de l'approximation donnée (ici 1 ou 4), dans l'intervalle dont les bornes peuvent être précisées dans le format de liste ({0,10} pour notre exemple).

Cette commande un peu longue à écrire peut bien sûr être reprise en remontant dans l'historique pour la revalider et la modifier pour une autre exécution (commande en bleu, par exemple, prête à être réutilisée).

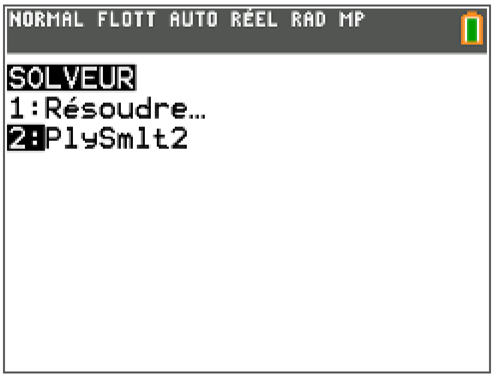
Il est à noter que cette commande est disponible depuis un éditeur de résolution que nous allons utiliser ensuite pour afficher les valeurs exactes des solutions.

Il serait interessant d'obtenir les valeurs exactes des solutions si elles existent.
La TI 83 le permet.

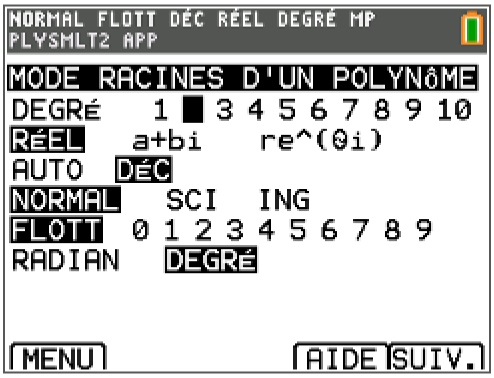
$$(\text{E}) \Leftrightarrow x^2 - (5x - 1) = 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{21}{4} = 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{21}{2}.$$

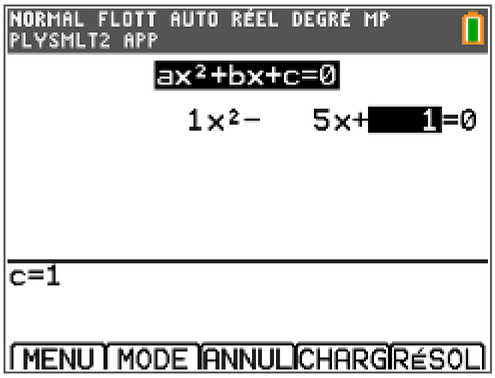
La touche $\boxed{\text{résol}}$ permet d'accéder à l'écran ci-contre.

Le choix **1** est celui que l'on a traité avec la commande « résoudre » mais, ici, en définissant les paramètres à l'aide d'écrans successifs.
Nous allons utiliser le choix **2 : PlySmlt2**,
puis le choix **1 : RACINES D'UN POLYNôME**.

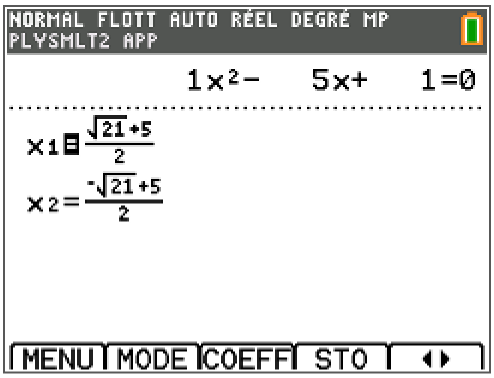


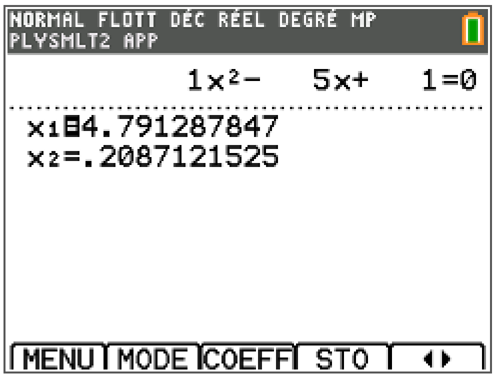
Ces menus proposent d'utiliser les touches sous l'écran avec une autre action associée. Par exemple, « **SUIV.** » (suivant) en appuyant sur la touche $\boxed{\text{graphe}}$ en dessous. Après avoir validé les choix pour le polynôme étudié (écran de gauche), il faut définir ses coefficients (écrans de droite).





Après avoir achevé de définir le polynôme, la touche $\boxed{\text{résol}}$ conduit à l'affichage des solutions en valeur exacte (écran de gauche) et, en choisissant $\boxed{\blacktriangleleft\blacktriangleright}$, les valeurs approchées sont affichées.





3) Calculs numériques

Un peu de calcul numérique pour terminer :

a) Peut-on dire que $2\sqrt{2}+3$ est solution de l'équation $x^2-6x+1=0$?

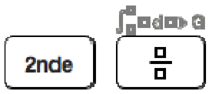
b) Et le nombre $2\sqrt{2}-3$?

La TI 83 permet de travailler sur les nombres irrationnels en valeur exacte. Exécutons en pas à pas l'algorithme suivant :

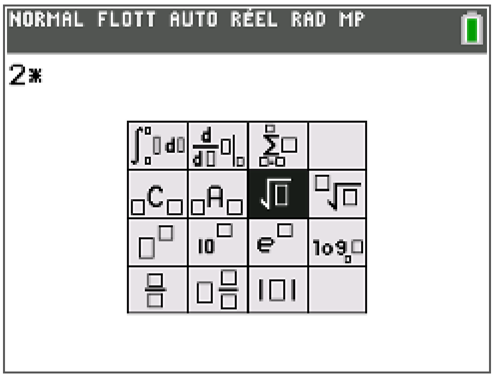
X prend la valeur $2\sqrt{2}+3$

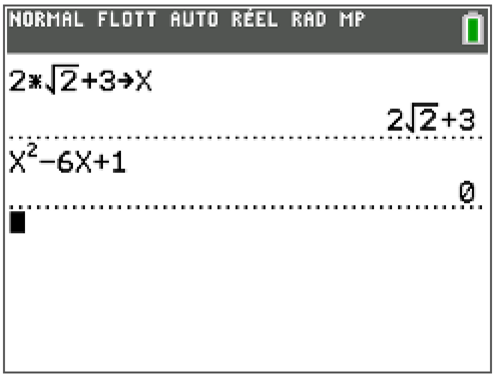
Afficher le nombre X^2-6X+1

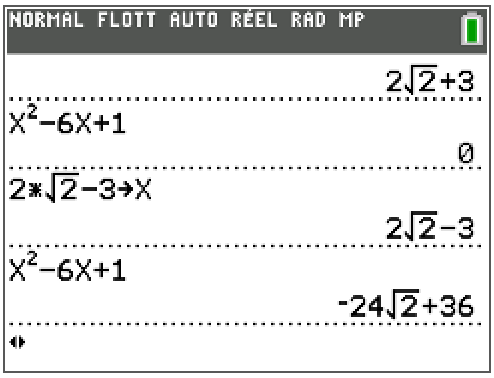
La séquence



permet d'accéder à l'écran de gauche.







Bien sur le nombre $2\sqrt{2}-3$ n'est pas une solution.

Pour conclure, cette même activité pourrait être également traitée dans le cadre du programme en algorithmique pour obtenir des valeurs approchées de solutions d'équations par les méthodes de balayage ou de dichotomie.