
Thema: Technologienutzung bei Prüfungsaufgaben und Übungsaufgaben zur österreichischen Matura

Aufgabe: Kugelstoßen, https://aufgabenpool.srdp.at, Bsp. FT004

Thomas Müller ☒ TI-Nspire™ CAS

Schlagworte:
Wurfparabel, Tangentensteigung

Didaktischer Kommentar:

Ab dem Haupttermin 2018 werden Minimalanforderungen für elektronische Hilfsmittel festgelegt (Siehe § 18 Abs. 3 der Prüfungsordnung). Das bedeutet, dass der Einsatz von Technologie inklusive CAS derzeit einmal von Vorteil ist und langfristig unverzichtbar werden wird.

In den folgenden Aufgaben aus bisherigen Reifeprüfungen und aus dem Aufgabenpool des Ministeriums sollen die Möglichkeiten und Vorteile der Nutzung von TI Nspire CAS gezeigt werden.

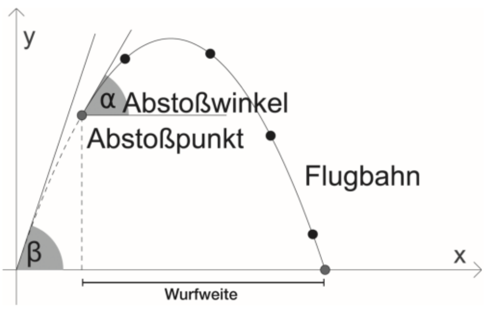
Die vorliegende Ausarbeitung soll verschiedene mögliche Lösungswege aufzeigen. Ob und welchen Weg die Schüler und Schülerinnen wählen werden, wird davon abhängig sein, wie Technologie im Unterricht eingesetzt wurde.

Aufgabenstellungen:

Für die Beschreibung der Flugbahn der gestoßenen Kugel beim Kugelstoßen kann mit guter Näherung die Gleichung der Wurfparabel verwendet werden. Diese Gleichung lautet:

$$y = \tan\beta \cdot x - \frac{g}{2v_0^2\cos^2\beta}x^2 \quad (g = 9{,}81 \text{ m/s2}).$$

Dabei ist v_0 die Abwurfgeschwindigkeit der Kugel und β der Winkel, unter dem die Parabel die x-Achse schneidet.
Die größte Wurfweite wird für β = 45° erzielt.



Die Computersimulation der Flugbahn der gestoßenen Kugel eines Athleten ergab für eine Gleichung der Bahnkurve $y = 0{,}84 \cdot x - 0{,}06 \cdot x^2$. Der Abstoßpunkt der Kugel befand sich in einer Höhe von 2,1 m.

Aufgabenstellung:
a) Berechnen Sie die Größe des Abstoßwinkels α und die maximale Höhe, die von der Kugel des Athleten erreicht wurde! Runden Sie auf cm!
b) Welche Wurfweite hat der Athlet erzielt? Welchen Einfluss hat die Größe der Fallbeschleunigung g bei sonst gleichen Bedingungen auf die Wurfweite? Begründen Sie Ihre Antwort!

c) Berechnen Sie für die Bahnkurve y = 0,84 · x – 0,06 · x² die Größe des Winkels β und überprüfen Sie, ob dieser Athlet die größte Wurfweite erreicht hat! Erläutern Sie, ob anhand der Parameter a und b in der allgemeinen Bahnkurve y = ax – bx² bereits feststellbar ist, ob eine Athletin/ein Athlet die größte Wurfweite erzielt hat!

Didaktischer Kommentar:
Im vorliegenden Beispiel wird eine Lösung offenbar durch Berechnung erwartet. Trotzdem scheint der Einsatz von Technologie empfehlenswert, und dies auf mehrerlei Gründen:
Zum Vertrautwerden mit dem Problem kann der Einfachheit halber zunächst nur die Funktion y = 0,84 · x – 0,06 · x² im Graphs-Fenster dargestellt werden. Gleichzeitig können dabei die erhaltenen Lösungen kontrolliert werden. So wird hier Technologie als *Visualisierungswerkzeug* und *Kontrollwerkzeug* verwendet.
Zum *Experimentierwerkzeug* wird die Technologie dann in Aufgabenstellung b, um den Einfluss der Fallbeschleunigung auf die Wurfweite untersuchen zu können. Hier zeigt sich auch die Grenze der Visualisierung: Es bedarf sicherlich einer Rechnung, um eindeutig die umgekehrte Proportionalität eindeutig festlegen zu können.

Aufgabenstellung a)
Berechnen Sie die Größe des Abstoßwinkels α und die maximale Höhe, die von der Kugel des Athleten erreicht wurde! Runden Sie auf cm!

Lösung laut Aufgabenpool Typ2 FT004:

a) $f: y = 0{,}84 \cdot x - 0{,}06 \cdot x^2$
Abstoßpunkt: Höhe 2,1 m
$2{,}1 = 0{,}84 \cdot x - 0{,}06 \cdot x^2 \quad x_1 \approx 3{,}26 \quad x_2 \approx 10{,}74$

$f'(x) = 0{,}84 - 0{,}12 \cdot x \quad f'(3{,}26) = 0{,}4488 \quad \tan\alpha = 0{,}4488 \quad \alpha \approx 24{,}18°$ bzw. $\alpha \approx 0{,}42$ rad
$f'(x) = 0{,}84 - 0{,}12 \cdot x \quad 0 = 0{,}84 - 0{,}12 \cdot x \quad x = 7 \quad f(7) = 2{,}94$
Die maximale Höhe der Kugel betrug 2,94 m.

Eine mögliche Lösung unter Einsatz von Technologie:
Zu Beginn könnte der Graph der Funktion y = 0,84 · x – 0,06 · x² gezeichnet werden. Um Aussagen zur Lösung zu erhalten, ist es ratsam die Zoomeinstellungen zu verändern (siehe Abb. 1). Die in Abb. 1 angegebenen Fenstereinstellungen führen zur Darstellung in Abb. 2.

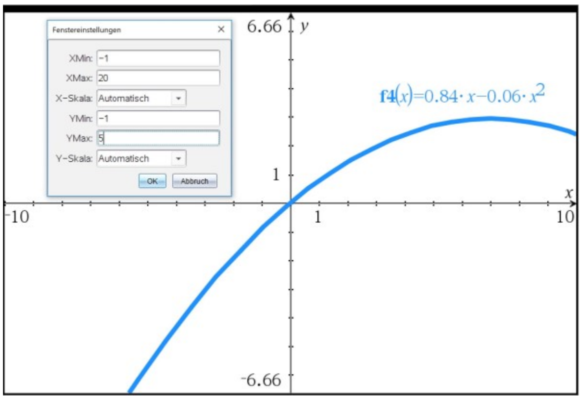


Abb. 1

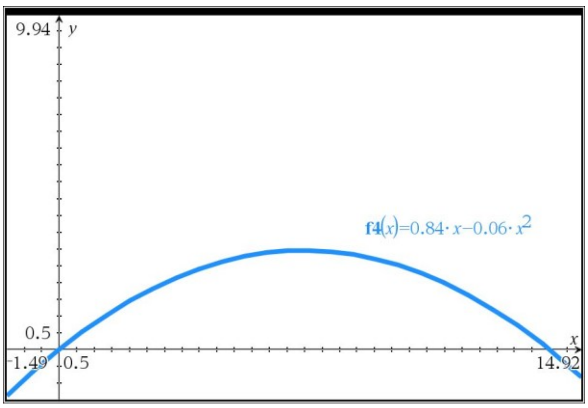


Abb. 2

Da der Abstoßpunkt in der Höhe 2,1 m liegt, wird die lineare Funktion y = 2,1 einzeichnet (Abb.3). In derselben Darstellung ergeben sich auch die Koordinaten des Auftreffpunktes am Boden im Schnitt mit der x-Achse.

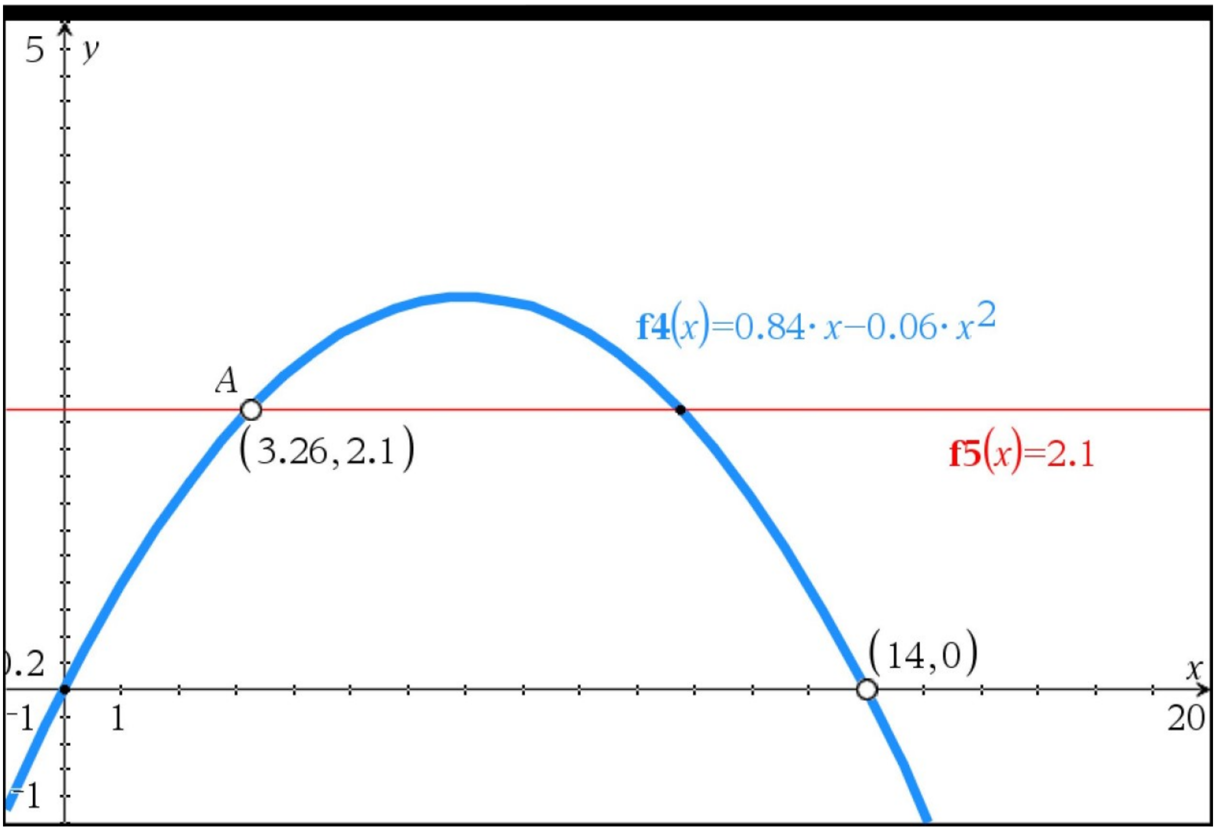


Abb. 3

Die größte Wurfhöhe kann etwa über „Graph analysieren" durch Aufsuchen des Maximums ermittelt werden (Abb. 4) und beträgt 2,94 m.

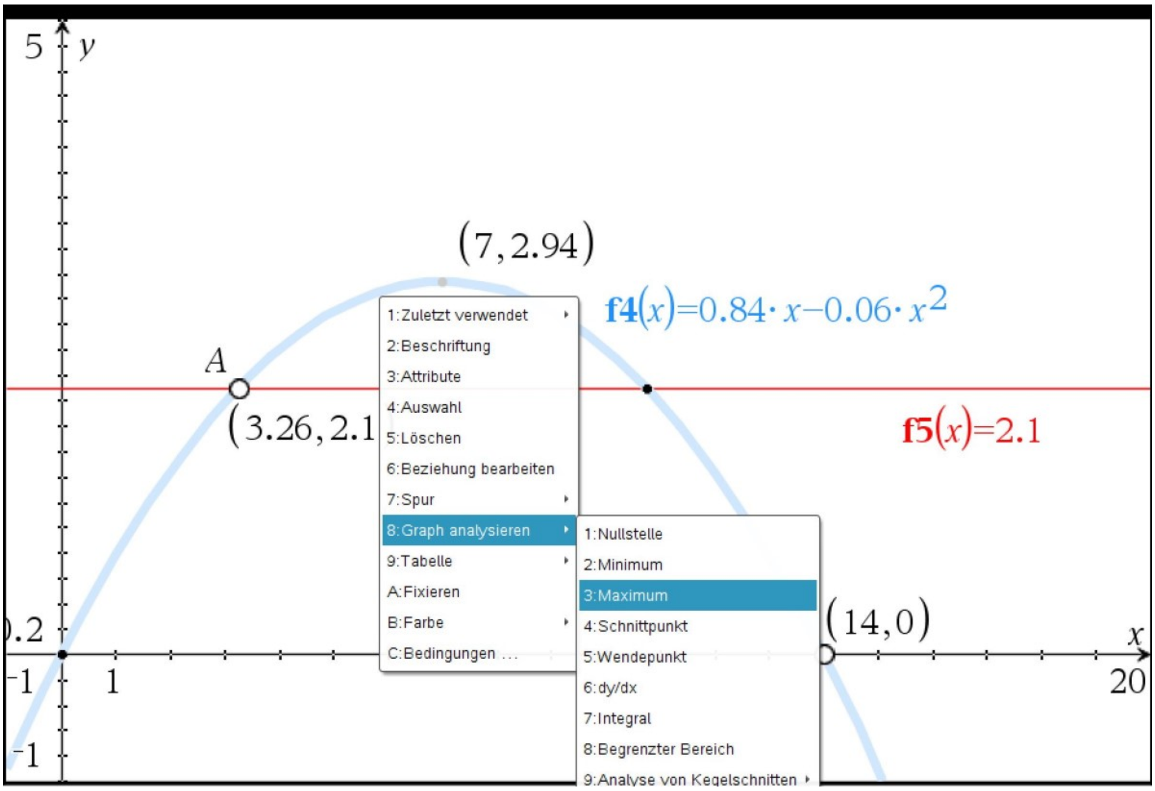


Abb. 4

Durch Einzeichnen der Tangenten in A und lässt sich der Abstoßwinkel überprüfen (vgl. Abb. 5).

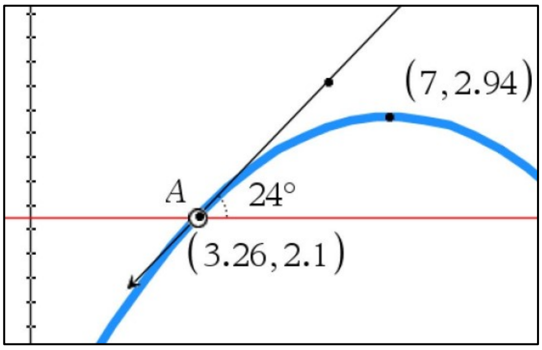


Abb. 5

Aufgabenstellung b)

Welche Wurfweite hat der Athlet erzielt? Welchen Einfluss hat die Größe der Fallbeschleunigung g bei sonst gleichen Bedingungen auf die Wurfweite? Begründen Sie Ihre Antwort!

Lösung laut Aufgabenpool Typ2 FT004:

$f: y = 0{,}84 \cdot x - 0{,}06 \cdot x^2$
Abstoßpunkt: Höhe 2,1 m
$2{,}1 = 0{,}84 \cdot x - 0{,}06 \cdot x^2 \quad (x_1 \approx 3{,}26) \quad x_2 \approx 10{,}74$

Nullstellen: $0 = 0{,}84 \cdot x - 0{,}06 \cdot x^2 \quad (x_1 = 0)$ und $x_2 = 14$
$14 - 3{,}26 = 10{,}74$
Die Wurfweite der Kugel war 10,74 m.
Die Wurfweite wird bestimmt durch die rechte Nullstelle der Parabel:

$$0 = \tan\beta \cdot x - \frac{g}{2v_0^2 \cdot \cos^2\beta} \cdot x^2$$

$$0 = x \cdot \left(\tan\beta - \frac{g}{2v_0^2 \cdot \cos^2\beta} \cdot x\right)$$

$$x = \frac{\tan\beta \cdot 2v_0^2 \cdot \cos^2\beta}{g}$$

Bei größerem g wird die Wurfweite kleiner. Es liegt eine indirekte Proportionalität vor.

Eine mögliche Lösung unter Einsatz von Technologie:

Die Wurfweite kann unmittelbar aus Abb. 4 abgelesen werden: 14 m

Um den Einfluss der Fallbeschleunigung auf die Wurfweite zu erkennen, wird die Funktion f1(x) (allgemeine Form Bahnkurvenfunktion, vgl. Abb. 6) eigegeben und dargestellt (rot punktiert in Abb. 6). Dabei werden alle drei Variablen für Abstoßwinkel ß („b“), Abstoßgeschwindigkeit v0 („v“) und Fallbeschleunigung g als Schieberegler eingebaut. Durch Anpassen von b (= 40,2), v (= 11,8) und g (= 9,81) kann die vorgegebene konkrete Bahnkurve (blau in Abb. 6), die durch f3(x) gegeben ist, durch die Funktion f1(x) (rot punktiert) ausreichend angenähert werden. Danach steht der Veränderung von g nichts mehr im Wege:

So erkennt man, dass die Verringerung von g eine Erhöhung der Wurfweite bewirkt (Abb. 7), eine Erhöhung von g eine Verringerung (Abb. 8). Verdoppelt man zum Beispiel die Fallbeschleunigung g, so scheint sich die Wurfweite zu halbieren. Dies könnte zur Vermutung führen, dass eine indirekte Proportionalität vorliegt. Zum Nachweis dieses Zusammenhangs vgl. die rechnerische Musterlösung (oben unterhalb der Aufgabenstellung).

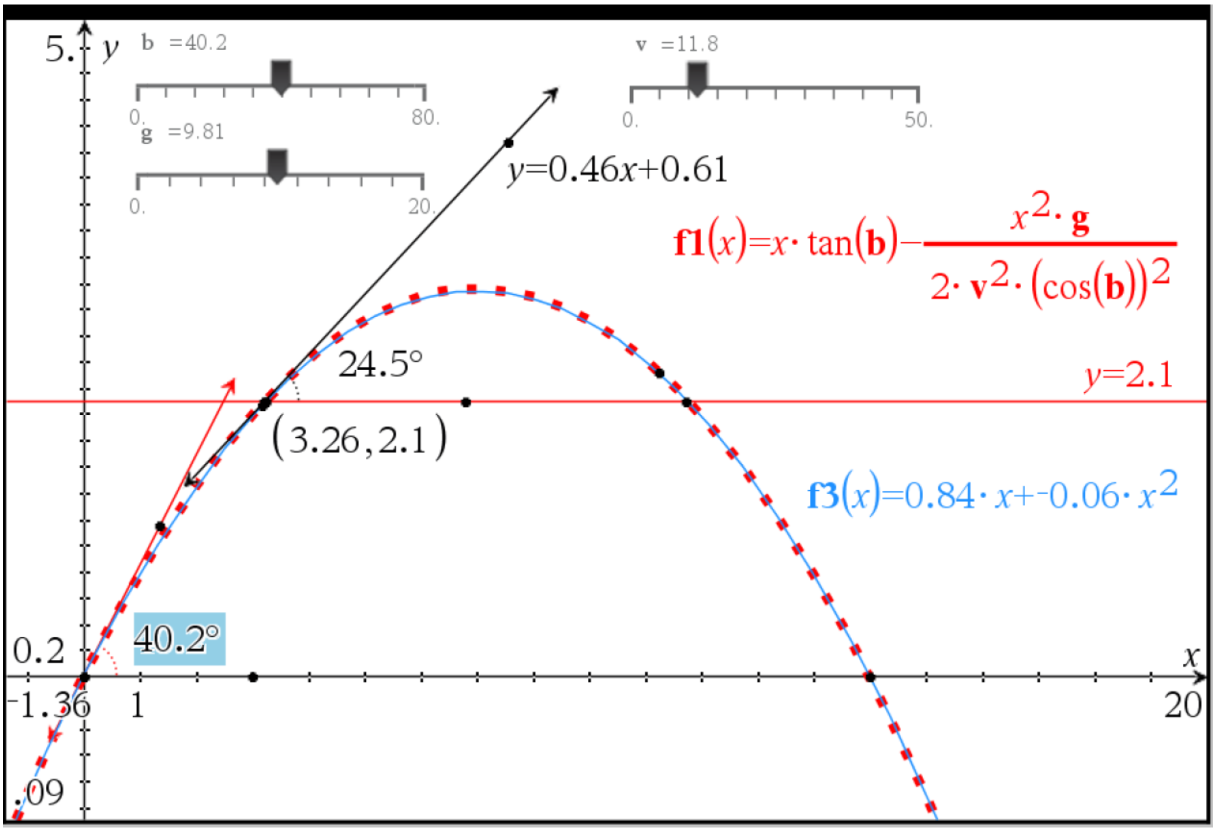


Abb. 6

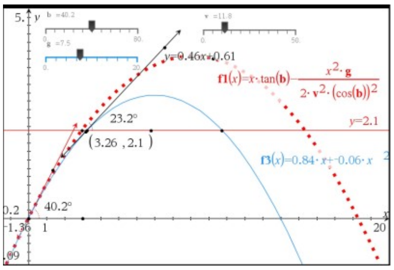


Abb. 7

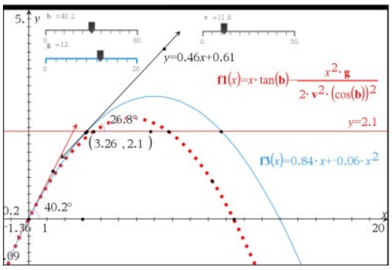


Abb. 8

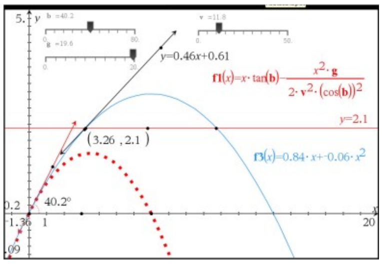


Abb. 9

Aufgabenstellung c)

Berechnen Sie für die Bahnkurve $y = 0{,}84 \cdot x - 0{,}06 \cdot x^2$ die Größe des Winkels β und überprüfen Sie, ob dieser Athlet die größte Wurfweite erreicht hat! Erläutern Sie, ob anhand der Parameter a und b in der allgemeinen Bahnkurve $y = ax - bx^2$ bereits feststellbar ist, ob eine Athletin/ein Athlet die größte Wurfweite erzielt hat!

Lösung laut Aufgabenpool Typ2 FT004:

$f'(x) = 0{,}84 - 0{,}12 \cdot x \quad f'(0) = k \quad \tan \beta = k \quad \beta \approx 40{,}03° < 45°$

Da der Winkel β ungleich 45° ist, könnte der Athlet durch Veränderung des Abstoßwinkels eine größere Wurfweite erzielen.

Eine mögliche Lösung unter Einsatz von Technologie:

Die Kontrollkonstruktion der Wurfweite in Abhängigkeit des Winkels ß (im Ursprung) kann über den Schieberegler, wie er in Abb. 6 erkennbar ist, durchgeführt werden. Beim Winkel ß (= b) = 45° scheint anschaulich tatsächlich die größte Wurfweite vorzuliegen (vgl. Abb. 10) Sowohl Erhöhung als auch Verringerung von ß bewirken eine Verkleinerung der Wurfweite.

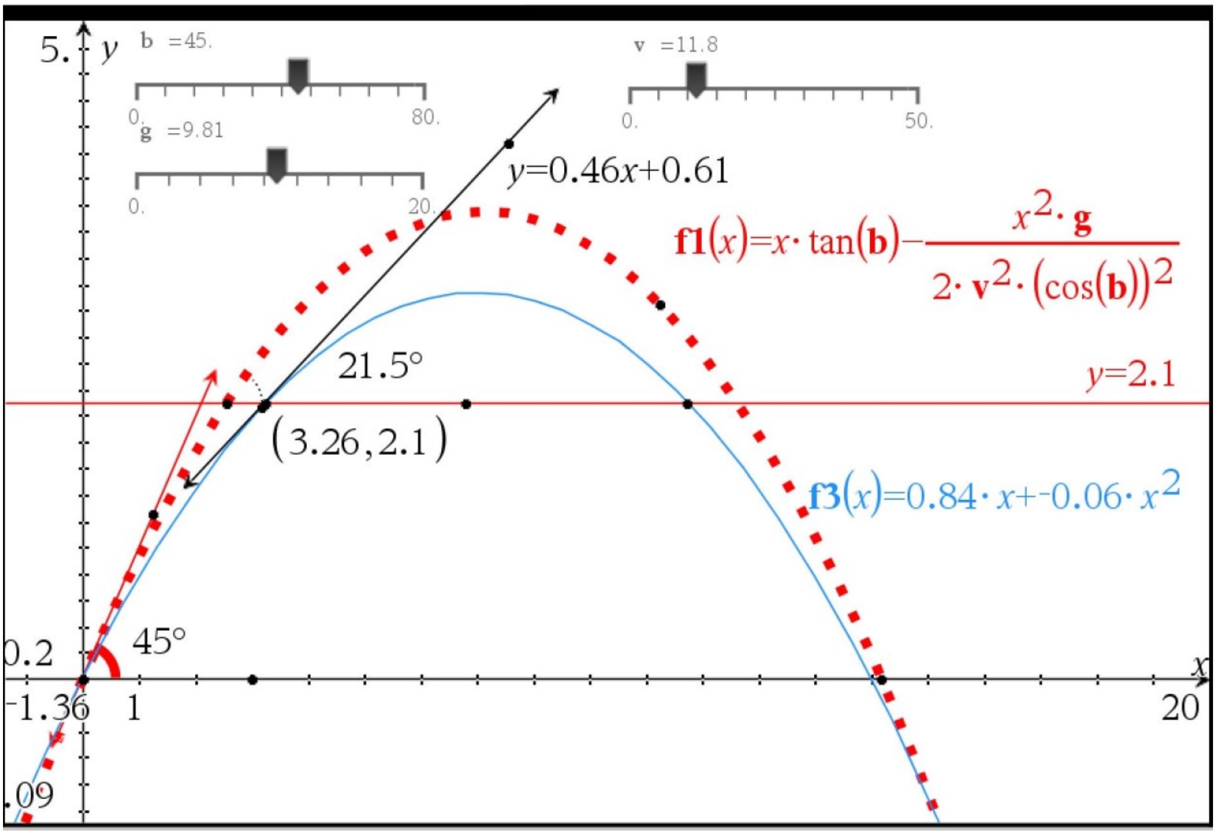


Abb. 10

Die Frage nach dem Einfluss der Parameter a und b in y = ax-bx² kann durch eine weitere Zeichnung erfolgen. In Abb. 11 wird die Funktion durch y = aa x – bb x² visualisiert.

Dabei werden aa und bb durch Schieberegler realisiert. So wird Technologie wieder als Experimentierwerkzeug eingesetzt. Daraus erkennt man: je kleiner b im Intervall [0 , 1] gewählt wird, desto größer ist die Wurfweite (bei bb = 0 sogar unendlich, da die Wurfparabel zur Geraden wird). Je größer aa gewählt wird, desto größer ist auch die Wurfweite.

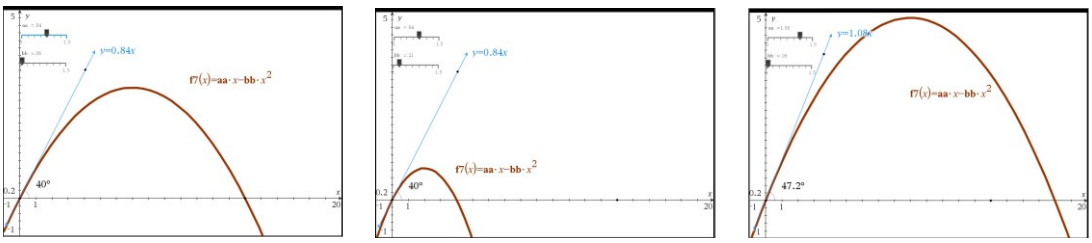


Abb. 11