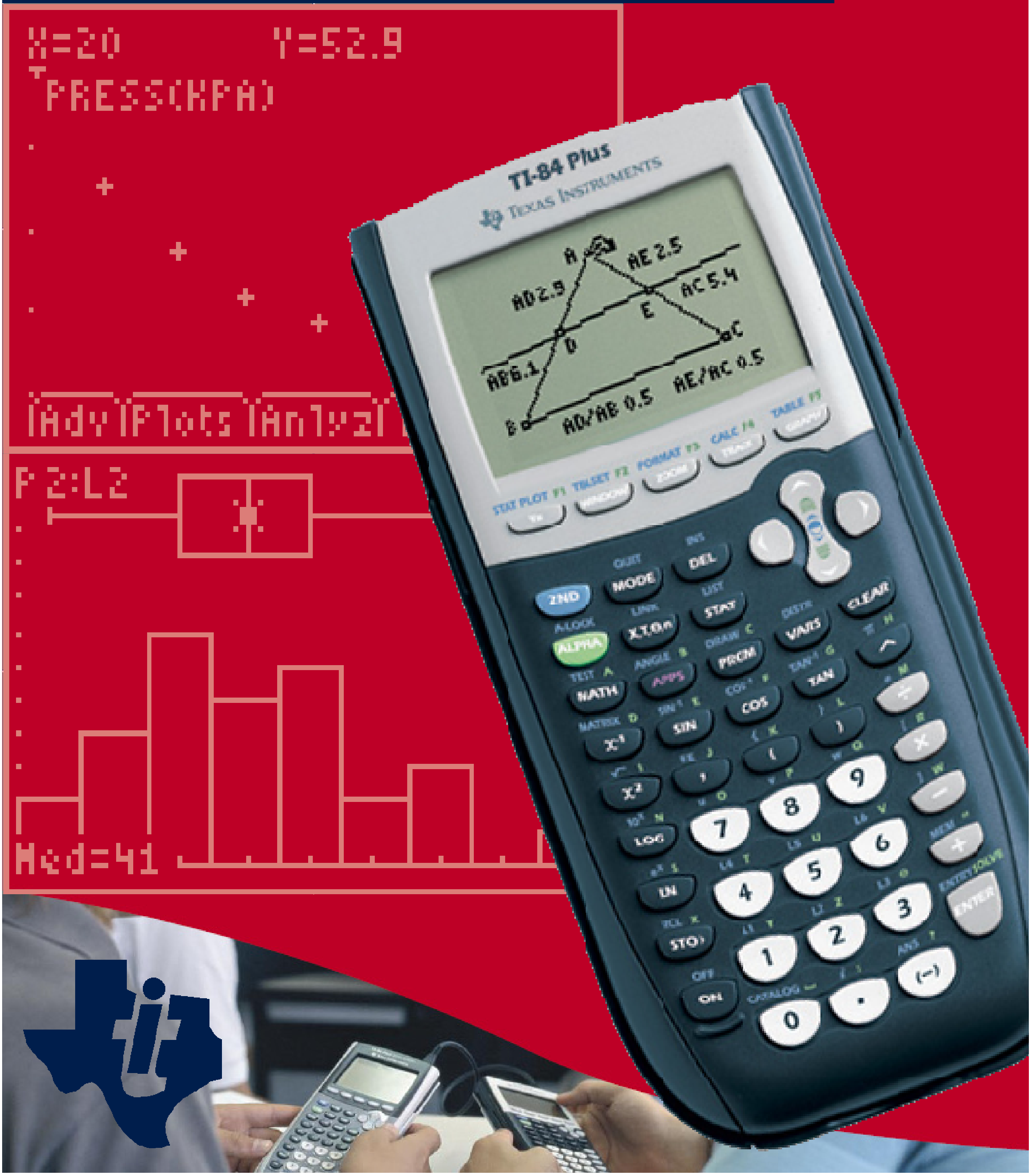
Koen Stulens

De TI-84 Plus in de klas

een introductie en enkele toepassingen



De TI-84 Plus in de klas

een introductie en enkele toepassingen

Koen Stulens

Texas Instruments

TI Technology – Beyond Numbers

Woord vooraf

Het gebruik van de TI-84 Plus opent nieuwe vensters voor het wiskundeonderwijs, voor de exacte wetenschappen en voor economie. Met deze grafische rekenmachine beschikken de leerlingen niet enkel over een controlemiddel maar ook over een educatieve tool waarmee het mogelijk is op verschillende manieren een probleem te benaderen: een numerieke, grafische, meetkundige of statistische benadering. Ook het algoritmitiseren van een probleem met de programmeertaal TI-Basic behoort tot de mogelijkheden.

Met de TI-84 Plus is het voor de leerlingen meer dan ooit mogelijk om zelfstandig problemen te onderzoeken, modellen te construeren, eigenschappen en conclusie te formuleren en dit alles te checken aan de realiteit. Door het grotere geheugen, in vergelijking met de TI-83 Plus, kunnen er tal van applicaties geïnstalleerd worden op de TI-84 Plus die de functionaliteit van de rekenmachine uitbreiden en de rekenmachine nog meer aanpassen aan de persoonlijke noden van de leerlingen en leerkrachten/docenten. De verscheidene manieren om problemen te benaderen leiden voor de leerlingen ongetwijfeld tot een dieper inzicht in de materie en tot een betere betrokkenheid.

Het numerieke karakter van de TI-84 Plus mag niet het einde betekenen van het exact logisch redeneren en het leveren van een rigoureus wiskundig bewijs. Integendeel, de TI-84 Plus kan een aanzet zijn tot discussies en verschillende ideeën en resultaten die aanleiding geven tot de noodzaak het correcte onweerlegbaar aan te tonen. Hiervoor kan gebruik gemaakt worden van Computer Algebra Systemen zoals bv. TI InterActive!™ of Derive™.

Met de TI-84 Plus beschikken de leerlingen over één platform dat gebruikt kan worden in de lessen wiskunde en voor de exacte vakken. Door de USB-poort kunnen de oplossingen van de leerlingen gedeeld worden met heel de klas. Via de Presentation Link™ kan de TI-84 Plus van de leerlingen verbonden worden met een ViewScreen™ om zo het scherm van de rekenmachine te projecteren via een overheadprojector.

Met TI-SmartView™ beschikt de leerkracht/docent over een presentatietool (via een beamer) bij uitstek. TI-SmartView kan ook gebruikt worden voor het eenvoudig aanmaken van lesmateriaal (kopiëren en plakken van schermafdrukken) en bovendien laat het toe metingen uit te voeren via computer met de CBL 2™ en CBR 2™.

TI-Navigator™, het draadloze netwerk voor een TI-84 Plus-klas, maakt het educatieve TI-plaatje compleet. Dit systeem maakt het mogelijk om op een interactieve manier met heel de klas aan onderwijs te doen: van het uitvoeren van opdrachten door de leerlingen tot een efficiënt assessment.

De bedoeling van dit boekje is het aanbieden van een introductie op de functionaliteit van de TI-84 Plus en de inzetbaarheid in de klas. Het is echter zeker niet de bedoeling met dit boekje volledigheid na te streven, noch het geven van lange knoppenhistories. Voor gedetailleerde informatie verwijzen we naar de uitgebreide handleiding alsook de handleidingen van de verschillende gebruikte applicaties, te raadplegen via www.education.ti.com/guides. Alle applicaties, beschikbaar via www.education.ti.com, zijn gratis te downloaden zowel voor leerlingen als leerkrachten/docenten.

Ook is informatie beschikbaar over de hierboven vermelde producten op de websites: www.education.ti.com/belgie en www.edcuation.ti.com/nederland. Voor vragen kan ook Texas Instruments gecontacteerd worden via ec-vlaanderen@list.ti.com of ec-nederland@list.ti.com.

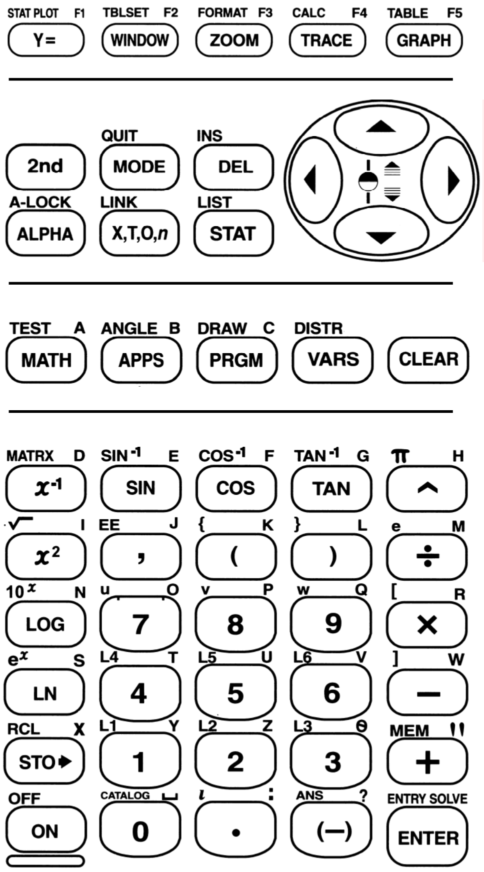
Koen Stulens

Inhoud

1. De basis

1.1 De toetsen

De toetsen van de TI-84 Plus kunnen ruwweg ingedeeld worden in de volgende categorieën:



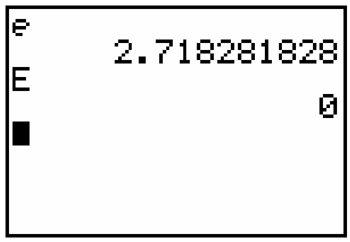
GRAFISCHE TOETSEN

EDIT-TOETSEN

GEAVANCEERDE FUNCTIETOETSEN

WETENSCHAPPELIJKE REKENMACHINE

Een toets op de TI-84 Plus heeft meestal meerdere functies.



<u>Eerste functie</u>: op de toets

<u>Tweede functie</u>: links boven de toets

`2nd[e]` = het getal *e*

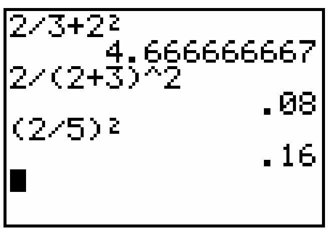
<u>Derde (alpha) functie</u>: rechts boven de toets

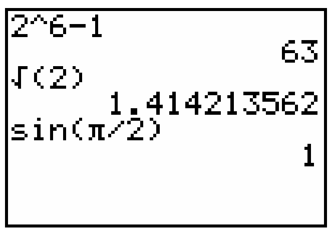
`ALPHA[E]` = de variabele `E`

Op deze rekenmachine kan slechts één toets tegelijk ingedrukt worden.

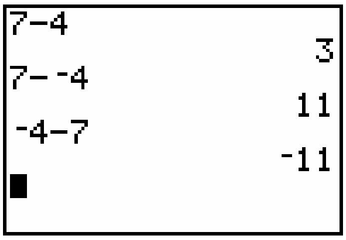
1.2 Rekenen met de TI-84 Plus

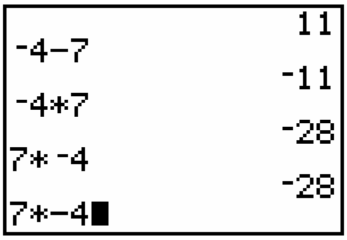
Het uitvoeren van berekeningen met de TI-84 Plus verloopt op een analoge manier als bij een wetenschappelijke rekenmachine. Voor het uitvoeren van de onderstaande berekeningen, druk op de toetsen in de volgorde zoals hieronder op het basisscherm of rekenscherm afgebeeld. Het uitvoeren van een bewerking (en een commando) start na het drukken op `[ENTER]`.



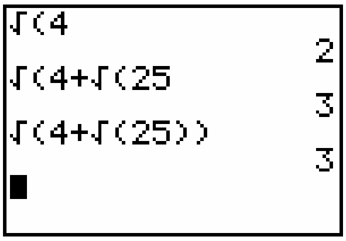


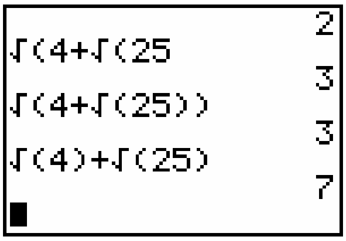
– = het verschil   en   (–) = het tegengestelde



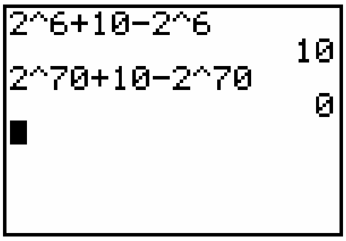


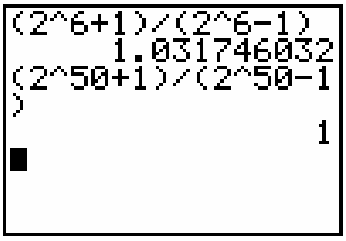
Merk op dat na het drukken op [√] of op [SIN] het eerste haakje automatisch wordt geplaatst. Het sluiten van de haakjes is niet noodzakelijk maar aan te raden.





De TI-84 Plus is een grafische rekenmachine die de berekeningen numeriek (benaderd) uitvoert met floating point getallen. Dit heeft de volgende resultaten tot gevolg:





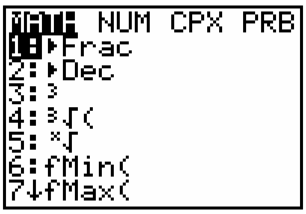
2nd[ENTRY] = terug oproepen van reeds uitgevoerde berekeningen
CLEAR = leegmaken van de invoerregel en/of het basisscherm

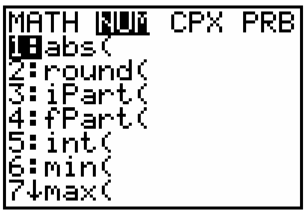
1.3 Het MATH-menu

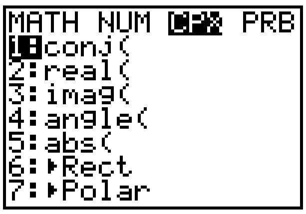
Achter o.a. de geavanceerde functietoetsen schuilen menu's. Het werken met menu's verduidelijken we met het MATH-menu. Na het drukken op [MATH] wordt het basisscherm vervangen door het MATH-menu. Voor het navigeren in de verschillende submenu's gebruiken we de cursor als volgt:

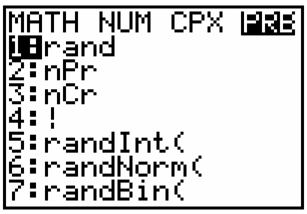
◀ of ▶ : selecteren van een submenu
▼ of ▲ : selecteren van een item in een submenu

Het MATH-menu bevat de volgende vier submenu's:

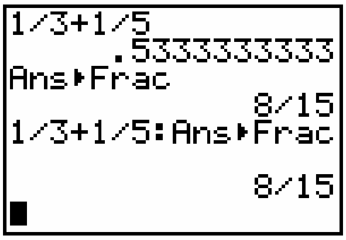


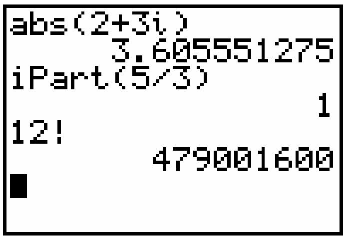


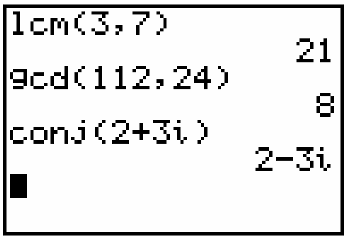




Druk op het gewenste nummer (of de gewenste letter) om een commando in te voegen in het basisscherm. Dit kan ook door het gewenste commando te selecteren en op [ENTER] te drukken. Het :-teken maakt het mogelijk om verschillende uitdrukkingen op één regel in te geven. Enkele voorbeelden:





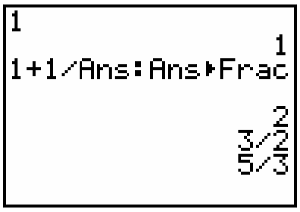


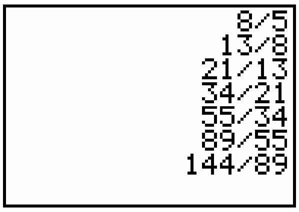
Ans = de variabele die het laatst bekomen resultaat bevat (Last Answer - 2nd[ANS])

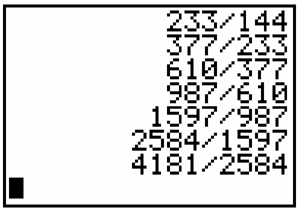
2nd[*i*] = het complex getal *i*

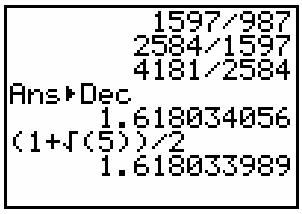
Het verlaten van een menu zonder een keuze te maken kan o.a. door het intikken van [CLEAR] of 2nd[QUIT]. Met 2nd[QUIT] wordt ook steeds het basisscherm geactiveerd.

Met de Ans-variable is het mogelijk om iteratieve processen te bestuderen zoals bijvoorbeeld de volgende rij die het gouden getal genereert: $1,\ 1+1,\ 1+\frac{1}{1+1},\ 1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+1}},\ 1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+1}}},\ \ldots\ldots$







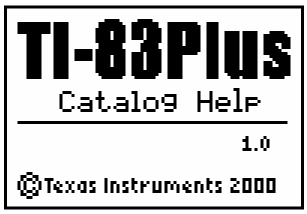


2nd[QUIT] = terugkeren naar het basisscherm

ENTER = herhaling van het laatst uitgevoerde commando

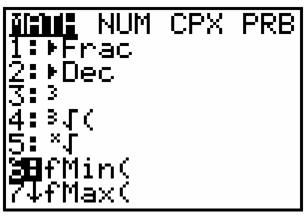
INTERMEZZO

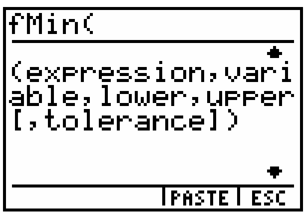
Niet ieder commando wordt regelmatig gebruikt zodat de syntax ervan wel eens opgezocht moet worden in de handleiding. De applicatie Catalog Help biedt hier een oplossing voor.

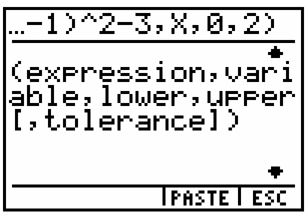


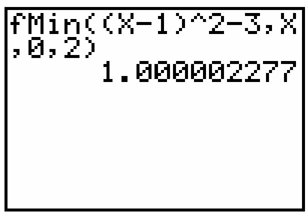
Na het opstarten van CtlgHelp ([APPS]) en het selecteren van het commando geeft een druk op [+] de syntax van het commando.

Het commando kan verder aangevuld worden en met PASTE ([TRACE]) in het basisscherm geplakt worden. Of verlaat dit uitlegscherm met ESC ([GRAPH]) zonder plakken.



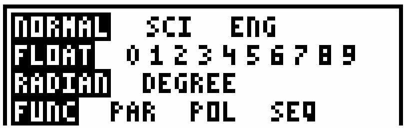






Klasactiviteit 1

Los het onderstaande getallenraadsel op. Ieder cijfer, decimaal punt en minteken bevindt zich in een apart vakje. Vul de resultaten van de berekeningen in tot op twee cijfers na het decimale punt (zonder af te ronden en als `MODE FLOAT`).



`2nd[EE]6` = 10^6 of `2nd[10^x]` $\sqrt[3]{8} = 3\ \sqrt[x]{\ }\ 8$ - `MATH<MATH> 5:` $\sqrt[x]{\ }$ of `3:` $\sqrt[3]{\ }$`(`

HORIZONTAAL

1. $\dfrac{463}{94}\cdot 47$

4. $4\left(\dfrac{458+\dfrac{1}{4}}{3}\right)$

8. $2^{10}-\sqrt{196}$

9. $\dfrac{46+71\cdot 10}{21}$

11. $10\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right)+2^2\cdot 5\cdot \sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right)\right)$

12. $2\left(307+\sqrt{96100}\right)10^3$

VERTIKAAL

2. $-(-81)^3$

3. $\dfrac{(13.6\cdot 10^2)(2.8\cdot 10^{-4})}{24.3\cdot 10^{-4}}$

6. $\dfrac{2\cdot 10^{-2}}{63}\sqrt{500(17852+1993)}$

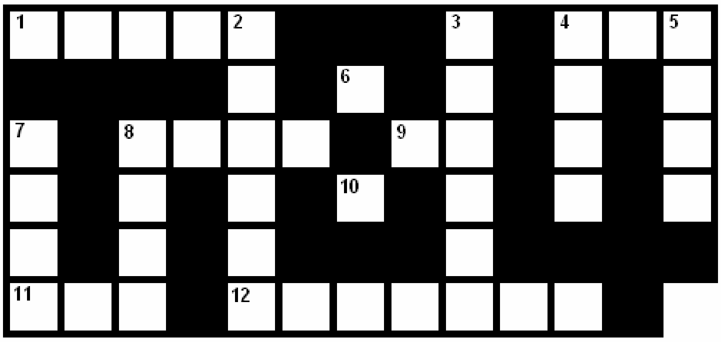
8. $\dfrac{12+3}{7+5}$

4. $\dfrac{9710}{25\cdot 63}$

5. $\sqrt{765^2+1836^2}$

7. $6\sqrt{11}+\sqrt[3]{4.4}-1.83^5$

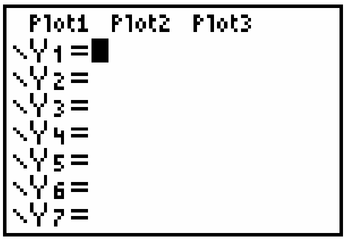
10. $2002-11^{-11}-2002$

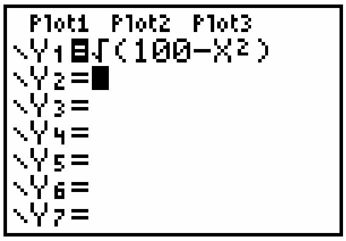


2 Grafieken

2.1 Definitie van een reële functie

Druk op de [Y=]-toets en definieer de variabele Y_1 zoals hieronder afgebeeld ([ENTER] drukken na het ingeven van het functievoorschrift).

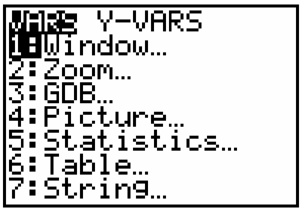


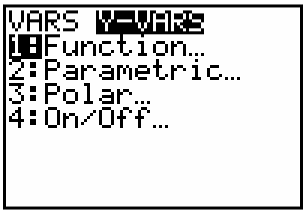


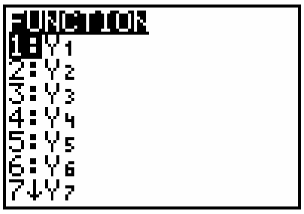
Na het invoeren van het functievoorschrift wordt de variabele Y_1 geselecteerd om te plotten (het gelijkheidsteken achter Y_1 wordt gemarkeerd). Definieer vervolgens Y_2 als $-Y_1$.

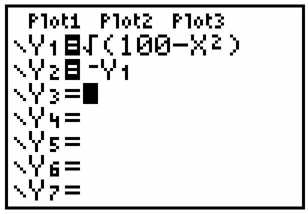
!! De variabele Y_1 kan niet gedefinieerd worden door na elkaar Y en 1 in te tikken !!

Selecteer hiervoor Y_1 uit de variabelen d.m.v.: VARS<Y-vars> 1:Function…



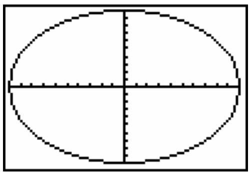




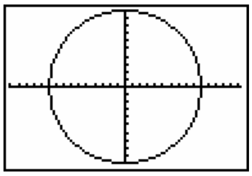


2.2 Het plotten van reële functies

Voor het plotten van de grafieken van de in punt 2.1 gedefinieerde functies, selecteer in het ZOOM-menu eerst 6:Zstandard en dan 5:Zsquare. Vergelijk de resultaten.



ZStandard



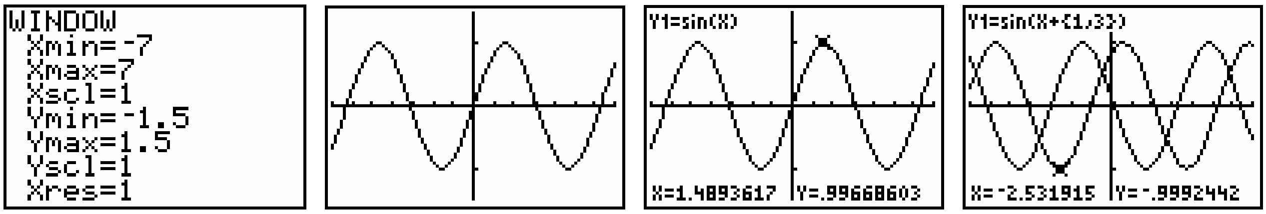
Zsquare

Voor het uitzetten van Y_1 en Y_2 (niet plotten, wel gedefinieerd): plaats de cursor op het gelijkheidsteken in het Y+-scherm, en druk op [ENTER]. En voor het verwijderen van een functievoorschrift: plaats de cursor in het functievoorschrift en druk op [CLEAR].

De vensterinstellingen kunnen ook manueel ingesteld worden met de [WINDOW]-toets, indien bijvoorbeeld het gedrag van de functie gekend is. Druk op [GRAPH] om te plotten.

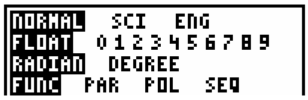
Een druk op [TRACE] laat toe de cursor te verplaatsen op de grafiek met [◀] en [▶]. Indien er meerdere grafieken geplot worden, gebruik dan [▲] en [▼] om een andere grafiek te selecteren. Druk op [CLEAR] of [GRAPH] om de TRACE-mode uit te zetten.

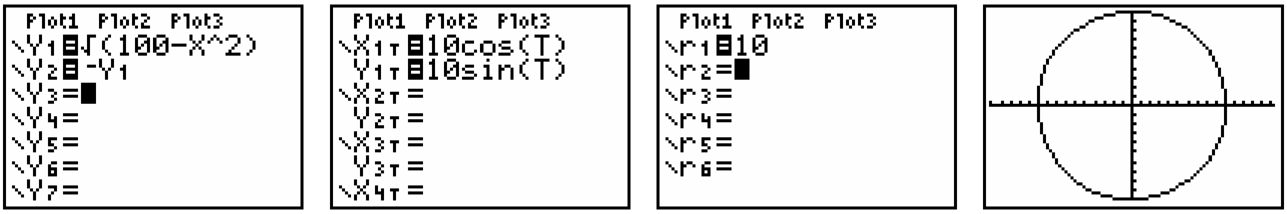
De figuur links onder toont de grafiek van de functie `sin(X+{1,3})`. Voor het plotten van zo'n familie van functies of meerdere functies tegelijk bestaan er twee modes (`[MODE]`): `SEQUENTIAL` en `SIMUL`.



2.3 Enkele andere functiemodes

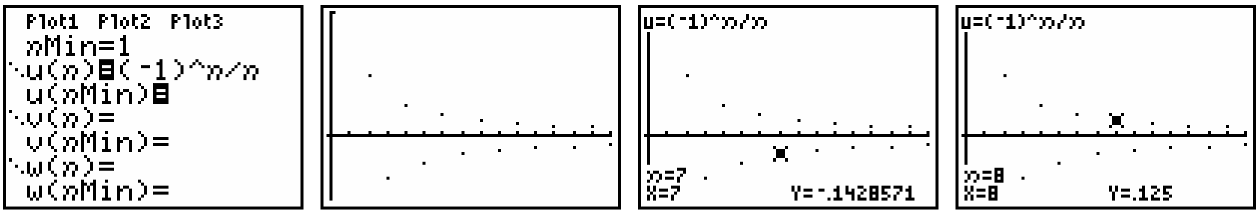
Voor het plotten van de cirkel in punt 2.2 maakten we gebruik van twee reële functies. Dezelfde plot kunnen we ook met een parameterkromme en een polaire kromme als volgt bekomen.



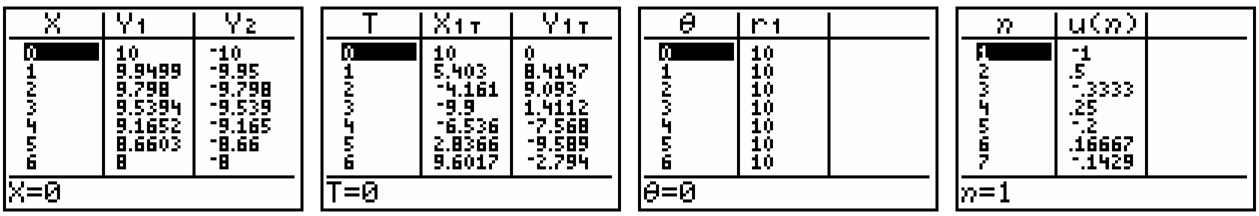


Function Parametric Polar Zsquare
(Y:-10...10)

Een vierde functiemode is `SEQ`, sequence, voor het plotten van rijen. Een voorbeeld:



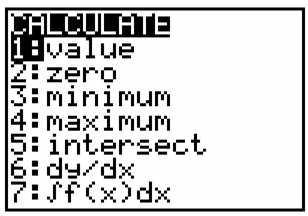
Voor iedere functiemode is het mogelijk een tabel met functiewaarden te genereren met `2nd[TABLE]`.



Function Parametric Polar Sequence

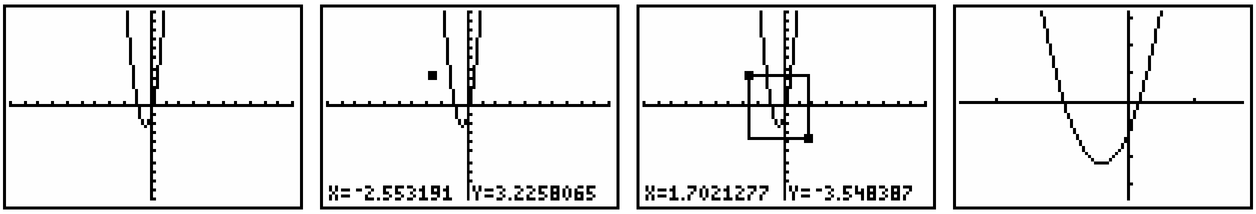
2.4 Numerieke berekeningen

Op de grafiek van een functie kunnen een aantal numerieke bewerkingen uitgevoerd worden met het `CALC`-menu (`2nd[CALC]`). We illustreren dit met enkele voorbeelden.



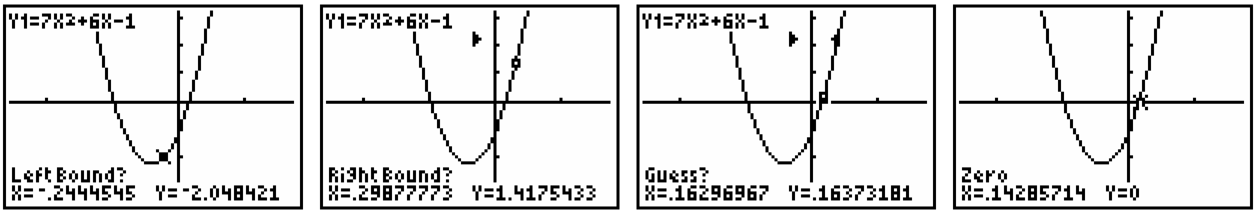
a. *BEPALEN VAN EEN NULPUNT VAN DE FUNCTIE*

Het plotten van de grafiek van de functie $f(x) = 7x^2 + 6x - 1$ in een standaardvenster geeft de grafiek links onder. Met het `ZOOM`-commando `1:Zbox` kunnen we een rechthoek op de grafiek plaatsen om uit te vergroten. Leg de hoekpunten vast door `[ENTER]` te drukken en bepaal met de cursor de rechthoek.



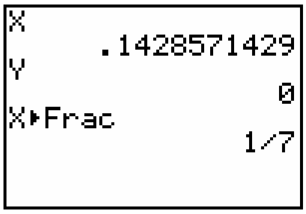
Een continue functie die op een segment negatief en positief is, heeft een nulpunt in dit segment en dit nulpunt kan numeriek benaderd worden met het commando `2nd[CALC] 2:zero`.

De eerste stap is het ingeven van de linker- en rechtergrens van het gebied waar het nulpunt zich bevindt en dan een startwaarde (`Guess?`) in het ingegeven gebied om het numerieke proces te starten. Het ingeven van deze waarden kan door de cursor op de gewenste plaats te zetten en `[ENTER]` te drukken maar ook door de waarden manueel in te tikken en te bevestigen met `[ENTER]`.

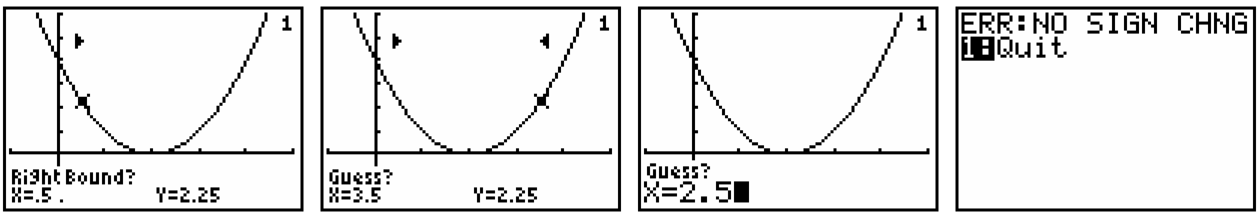


Een eenvoudige algebraïsche berekening leert ons dat $x = \frac{1}{7}$ een nulpunt is.

De rekenmachine plaatst de coördinaten van het nulpunt in de variabelen `X` en `Y`. Op het basisscherm kan nagegaan worden of de *x*-coördinaat eventueel een rationaal getal is.

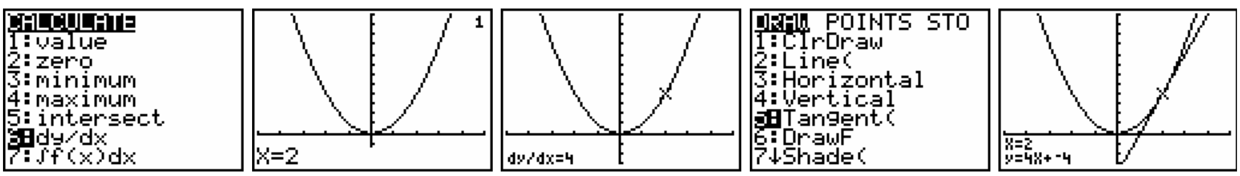


Denk er aan dat het steeds om een numerieke, benaderende methode gaat, waarbij de voorwaarde dat het teken links en rechts van het te benaderen nulpunt verschillend is, nogal essentieel is. Bijvoorbeeld bij meervoudige wortels leidt deze procedure niet altijd tot een oplossing. In zo’n geval verschijnt de hieronder afgebeelde boodschap.



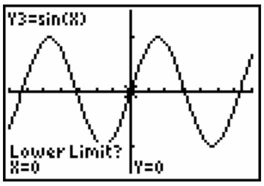
b. *NUMERIEKE AFGELEIDE EN NUMERIEKE INTEGRAAL*

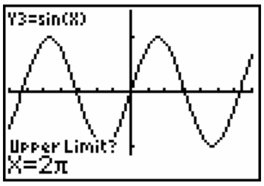
Het commando `2nd[CALC] 6:dy/dx` berekent de numerieke benadering voor de afgeleide in een punt. `2nd[DRAW] 5:Tangent(` tekent en berekent de raaklijn. Een voorbeeld voor $f(x) = x^2$.

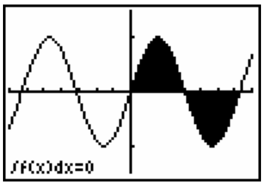


En `2nd[CALC] 7:∫f(x)dx` berekent op een numerieke manier de bepaalde integraal.

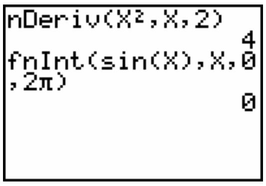
$$\int_0^{2\pi} \sin(x)\,dx$$







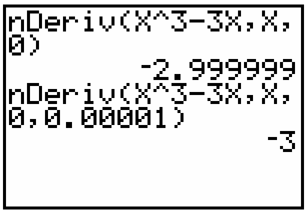
Ook hier kunnen de onder- en bovengrens ingegeven worden door de waarden rechtstreeks in te tikken of aan te duiden op de grafiek met de cursor. Getekende objecten op de grafiek van een functie kunnen verwijderd worden met `2nd[DRAW] 1:ClrDraw`.



De numerieke afgeleide, `[MATH]8:nDeriv(`, en de numerieke integraal, `[MATH]9:fnInt(`, kunnen ook als volgt vanuit het basisscherm berekend worden.

2.5 De afgeleide functie

Zoals net aangegeven berekent het commando `nDerive` de numerieke afgeleiden van een functie in een punt. De syntax van dit commando is `nDerive`(uitdrukking,variabele,waarde[, ε]) en past de volgende formule toe met standaard $\varepsilon = 0.001$:

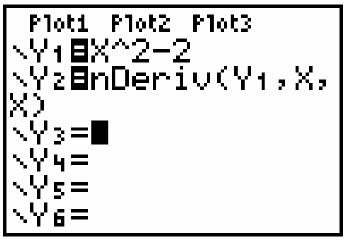


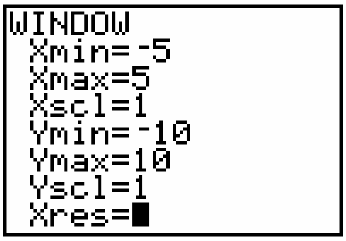
$$f'(x) = \frac{f(x+\varepsilon) - f(x-\varepsilon)}{2\varepsilon}.$$

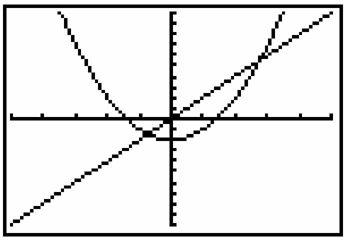
Ook hier gaat het weer om een numerieke benadering en is het soms nodig om ε te verkleinen om het exacte resultaat te bekomen.

Dit commando kan ook gebruikt worden om functies te definiëren. Op die manier kan in ieder punt waar de grafiek geplot wordt ook de numerieke afgeleide geplot worden.

Definieer de functies `Y1` en `Y2` zoals hieronder aangegeven en plot beide grafieken in de onderstaande vensterinstellingen.



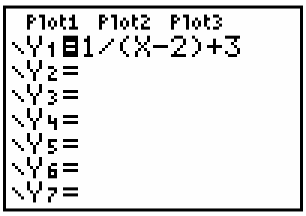


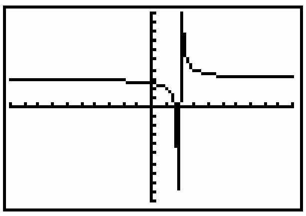


De bovenstaande grafiek toont het verband tussen het stijgen en dalen van de functie en het teken van de afgeleide functie.

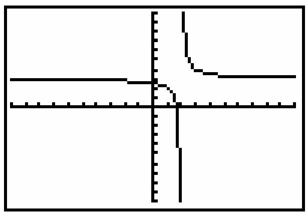
Intermezzo

Vanaf besturingssysteem 2.30 voor de TI-84 Plus zijn er verbeteringen doorgevoerd voor het plotten van discontinuïteiten. De onderstaande plots tonen dit voor $f(x) = \dfrac{3x-5}{x-2} = \dfrac{1}{x-2} + 3$.





BEFORE

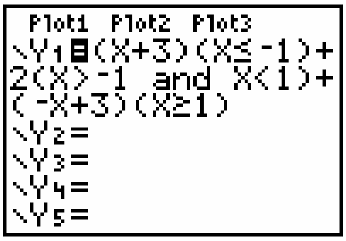


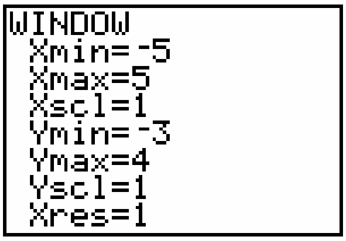
AFTER

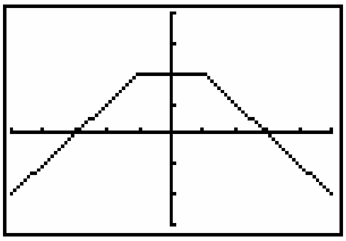
2.6 Stuksgewijs gedefinieerde functies

Voor het definiëren van stuksgewijs gedefinieerde functies maken we gebruik van logische uitdrukkingen (`2nd[TEST]`) op de volgende manier:

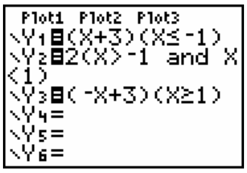
$$f(x)=\begin{cases} x+3 & x\le -1 \\ 2 & -1<x<1 \\ -x+3 & x\ge 1 \end{cases} \rightarrow \quad \texttt{Y}_1 = \texttt{(x+3)(x}\le\texttt{-1)+2(x>-1 and x<1)+(x+3)(x}\ge\texttt{1)}$$

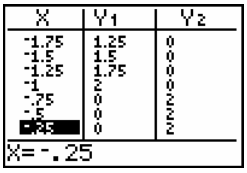


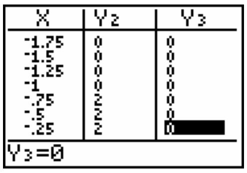


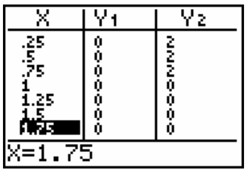


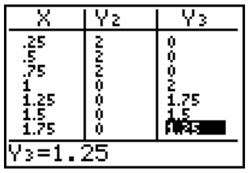
Ter verduidelijking van wat er hier gebeurt, splitsen we bovenstaande funtie even op in drie functies:



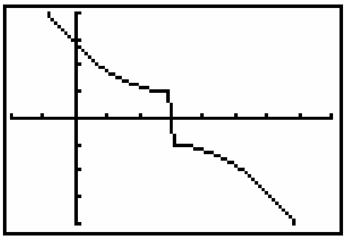




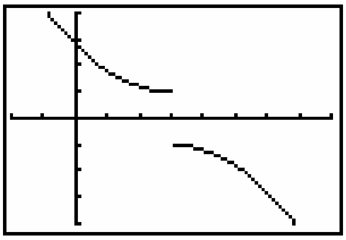




Ook hier is de verbetering van het plotten van discontinuïteiten nuttig: $f(x)=\begin{cases} (x-3)^2+5 & x\le 3 \\ -(x-3)^2-5 & x>3 \end{cases}$.



BEFORE OS 2.30

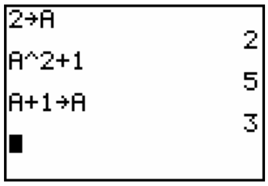


AFTER

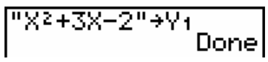
INTERMEZZO

Het toekennen van waarden aan variabelen

- <u>Reële variabelen</u>
  Als variabelen voor reële getallen kunnen de letters `A`, `B`, ..., `Z` en θ gebruikt worden. Het toekennen van een waarde aan zo'n variabele gebeurt met `[STO▶]`.

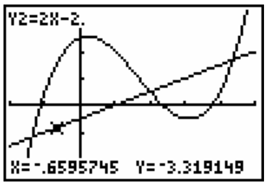


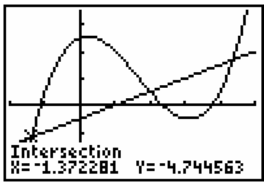
- <u>Functies</u>
  Reële functies, $\texttt{Y}_1$, ...$\texttt{Y}_9$, $\texttt{Y}_0$, kunnen als volgt gedefinieerd worden vanuit het basisscherm. Na het definiëren is de functie automatisch geselecteerd om te plotten.

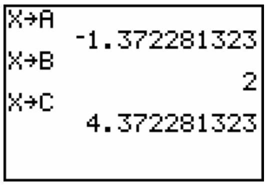


Klasactiviteit 2

Een algebraïsche eigenaardigheid [1]







(i) Definieer `Y1=X^3-5x^2+2x+10`.

(ii) Plot de functie zodat de grafiek goed zichtbaar is.

(iii) Bepaal een eerstegraadsfunctie `Y2` zodat beide grafieken drie snijpunten hebben.

(iv) Plaats de *x*-coördinaat van de snijpunten in de variabelen `A`, `B` en `C`.

(v) Maak de som `A+B+C`.

(vi) Vergelijk het resultaat met de coëfficiënten van `Y1`.

(vii) Doe hetzelfde voor enkele andere eerstegraadsfuncties. Conclusie!

(viii) Verklaar!
Hint: Definieer $f(x) = x^3 - 5x^2 + 2x + 10$, $g(x) = px + q$ $(p, q \in \mathbb{R})$ en $h(x) = f(x) - g(x)$. Ontbind h gebruikmakend van `A`, `B` en `C`, werk deze ontbinding uit en vergelijk de coëfficiënten met deze van $f(x) - g(x)$.

Met CAS

$$f(x) := x^3 + a \cdot x^2 + b \cdot x + c$$

$$g(x) := p \cdot x + q$$

$$h(x) := f(x) - g(x) \qquad \text{"Done"}$$

$$h(x) \qquad x^3 + a \cdot x^2 + (b - p) \cdot x + c - q$$

$$\text{expand}((x - k) \cdot (x - l) \cdot (x - m), x) \qquad x^3 + (-k - l - m) \cdot x^2 + (k \cdot (l + m) + l \cdot m) \cdot x - k \cdot l \cdot m$$

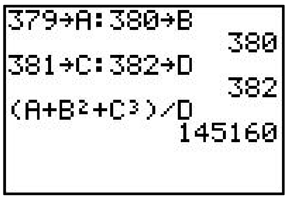
[1] Gebaseerd op *More TI-83, less Math?* van Gert Schomacher – Frederiksborg Gymnasium, Hillerød, Denemarken

Klasctiviteit 3

Vier opeenvolgende gehele getallen [2]

(i) Numerieke benadering

Kies vier opeenvolgende natuurlijke getallen A, B, C, D, maak de som $A + B^2 + C^3$ en deel deze som door D.



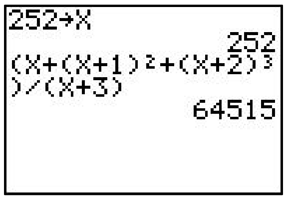
Neem vier andere opeenvolgende natuurlijke getallen en doe hetzelfde.

Gebruik hiervoor de variabelen A, B, C en D om het voorgaande een aantal keer te herhalen. Conclusie?

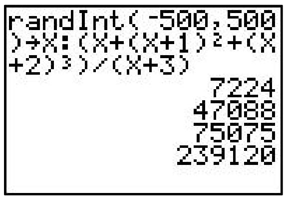
`2nd[ENTRY]` = terug oproepen van reeds uitgevoerde berekeningen

(ii) Symbolische veralgemening

Noem het eerste geheel getal X en schrijf de drie volgende gehele getallen, B, C en D, en de som, $A + B^2 + C^3$, in functie van X.



Voor opnieuw de deling uit voor verschillende waarden voor X. Kies voor X bijvoorbeeld at random een geheel getal tussen -500 en 500 met `randInt(-500,500)`.

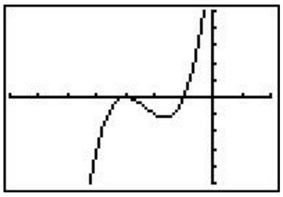


Conclusie? Komt dit overeen met de conclusie uit (i)?

(iii) Grafische benadering

Definieer `Y1` als de som uitgedrukt in functie van X zoals in (ii).

Plot de grafiek met de vensterinstellingen: `Xmin=-7`, `Xmax=2`, `Ymin=-5`, `Ymax=5` en `Xscl=Yscl=1`.

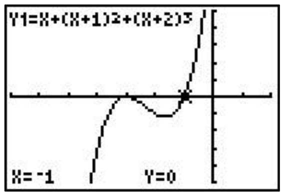


Bepaal de nulpunten van `Y1`. Conclusie?

Komt dit overeen met de voorgaande conclusies of is er meer?

(iv) Symbolische benadering

Ontbind, gebruikmakend van de resultaten van (iii), `Y1` in factoren.



Werk deze ontbinding en de som, uitgedrukt in X (het eerste getal), volledig uit en vergelijk de resultaten.

$$\text{EXPAND}(x + (x + 1)^2 + (x + 2)^3, x) \qquad x^3 + 7\cdot x^2 + 15\cdot x + 9$$

$$\text{EXPAND}((x + 1)\cdot(x + 3)^2, x) \qquad x^3 + 7\cdot x^2 + 15\cdot x + 9$$

(v) Veralgemening

Indien $(x-a) \mid a_n x^n + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ moet gelden dat $a \mid a_0$.

Voor het voorgaand voorbeeld is de constante term van $x+(x+1)^2+(x+2)^3$ gelijk aan $1^2 + 2^3 = 9 = 3^2$.

Dit geeft geen tegenspraak met de voorgaande conlusie, $(x+3)$ is een deler van $x+(x+1)^2+(x+2)^3$, vermits -3 een deler is van 9.

Toon aan dat voorgaande eigenschap niet kan uitgebreid worden voor 5 en 6 opeenvolgende getallen.

- Is $x+(x+1)^2+(x+2)^3+(x+3)^4$ deelbaar door $(x+4)$?
- Is $x+(x+1)^2+(x+2)^3+(x+3)^4+(x+4)^5$ deelbaar door $(x+5)$?

[2] Gebaseerd op *Connecting representations and representing connections*, Armando M. Martínez Cruz - Northern Arizona University, US

3 Lijsten

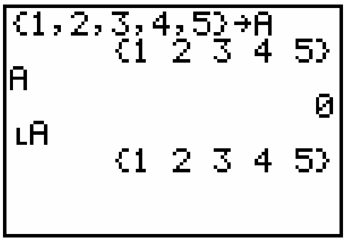
3.1 Definiëren van lijsten

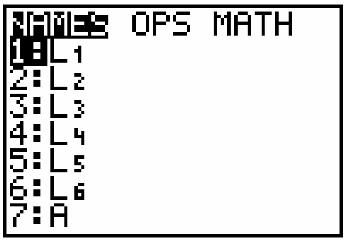
Lijsten kunnen beschouwd worden als eindige rijen van reële getallen. Deze getallen worden tussen accolades geschreven: `{1,2,3,4,5}`. De TI-84 Plus heeft 6 variabelen gereserveerd voor lijsten: `L1` t.e.m. `L6`.

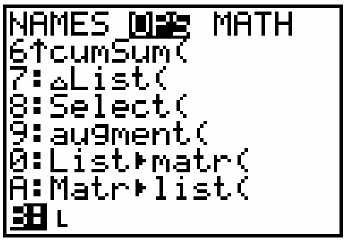
a. *VANUIT HET BASISSCHERM*

`2nd[{] 1,2,3,4,5 2nd[}] [STO▶] A`

Het oproepen van deze lijst in het basisscherm of er bewerkingen mee uitvoeren kan niet door gewoonweg de letter `A` in te tikken. Eerst moeten we aangeven dat het een lijst is. Dit kan door de lijst te selecteren uit het menu `NAMES` (`2nd[LIST]<NAMES>`) of de letter `A` te laten vooraf gaan door `L` (`2nd[LIST]<OPS> B:L A`).

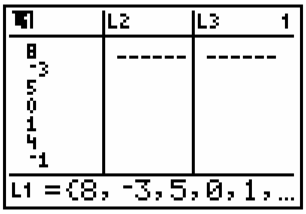


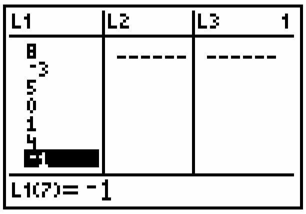


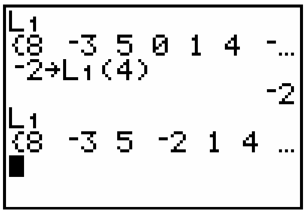


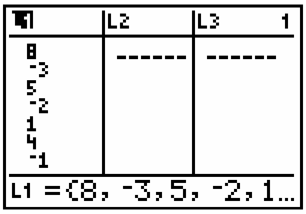
b. *MET DE* `STAT`*-EDITOR*

De `STAT`-editor (`[STAT]<EDIT> 1:Edit`) is een werkblad waar data kunnen ingegeven worden zoals in een spreadsheet. Elementen van een lijst kunnen ook individueel opgeroepen worden of veranderd vanuit het basisscherm. `L1(4)` is bijvoorbeeld het vierde element van `L1`.









Nog enkele functies:

`[DEL]`	Wissen van een cel of van een lijst uit de `STAT`-editor
`2nd[INS]`	Invoegen van een cel (cel = `0`) of een lijst in de `STAT`-editor
`[CLEAR]`	Wissen van de inhoud van een lijst. De cursor moet hiervoor wel op de lijstnaam staan in de hoofding van een kolom.

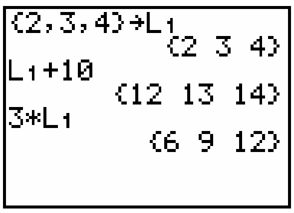
`STAT<EDIT> 5:SetUpEditor` = `STAT`-editor met de lijsten `L1` t.e.m. `L6`

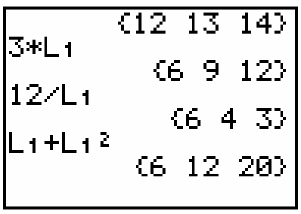
`STAT<EDIT> 5:SetUpEditor V,P,VP` = `STAT`-editor met de lijsten `U`, `V` en `VP`

3.2 Bewerkingen met lijsten

Het rekenen met lijsten verloopt vrij analoog aan het rekenen met reële getallen.

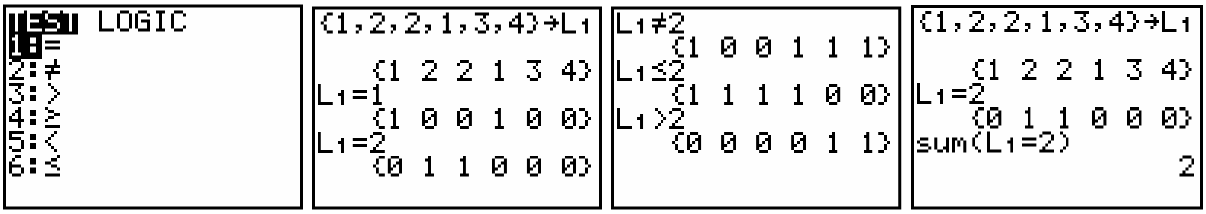
Enkele voorbeelden voor `L1={2,3,4}`.





3.3 Logische operaties met lijsten

Gebruikmakend van het `TEST`-menu (`2nd[TEST]`) kunnen tal van testen uitgevoerd worden op de elementen van een lijst. In combinatie met het commando `2nd[LIST]<MATH> 5:sum(` kan nagegaan worden hoeveel elementen van een lijst aan een bepaalde voorwaarde voldoen.



3.4 Operaties met lijsten

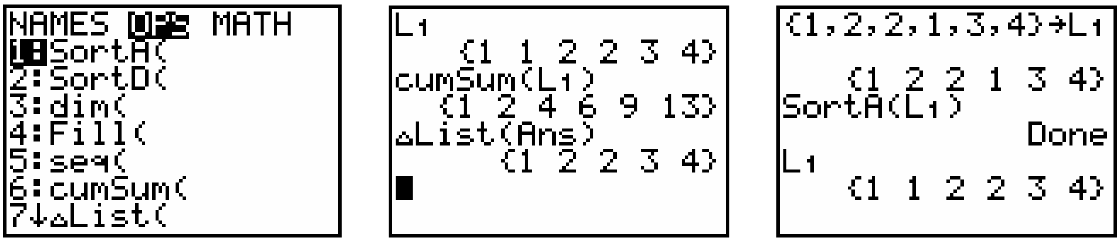
We bekijken enkele commando's uit `2nd[LIST]<OPS>`.

`SortA(` sorteren van de lijst van groot naar klein (**A**scending)

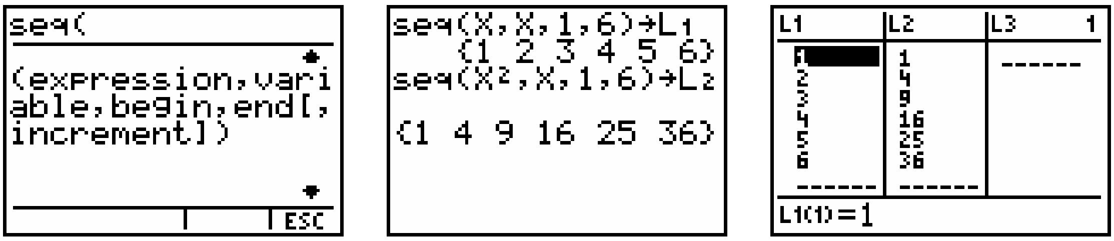
`SortD(` sorteren van de lijst van klein naar groot (**D**escending)

`cumSum(` bepaalt de cumulatieve som van een lijst

`ΔList(` genereert de verschillen tussen de opeenvolgende elementen van een lijst

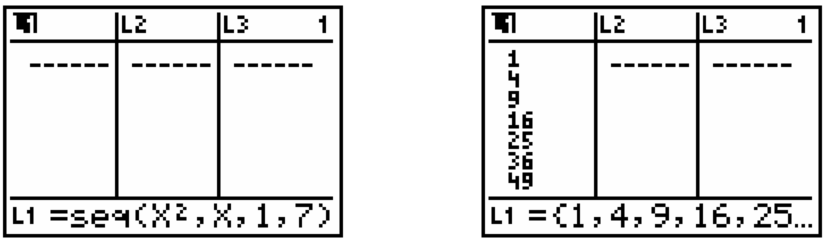


Het commando `seq(` (**seq**uence) laat toe lijsten te genereren. De syntax van dit commando is als volgt:

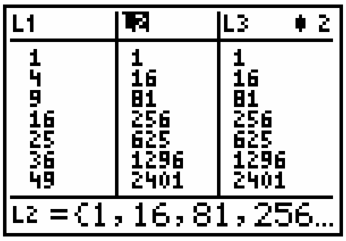


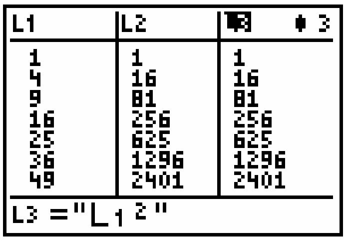
3.5 Lijsten en formules

Ook in de `STAT`-editor kan het `seq`-commando gebruikt worden om lijsten te genereren en er kunnen ook bewerkingen tussen de lijsten worden uitgevoerd. Echter, na uitvoering ervan blijft alleen de gegenereerde lijst over en niet de ingegeven uitdrukking.



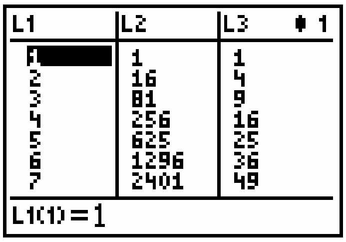
Indien echter een uitdrukking wordt ingegeven tussen aanhalingstekens, zal deze uitdrukking behouden blijven. Voor L_1={1,4,9,16,25,36,497} definiëren we L_2 als L_1^2 en L_3 als ALPHA["] L_1^2 ALPHA["].





⧫ = formule is vergrendeld

Het voordeel van vergrendelde formules is dat, indien we in dit geval de inhoud van L_1 bijvoorbeeld veranderen in seq(X,X,1,7), de inhoud van L_3 mee verandert (en die van L_2 niet).

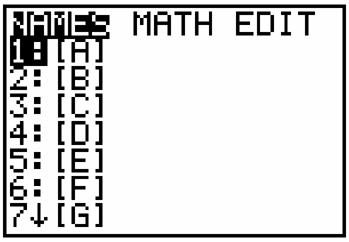


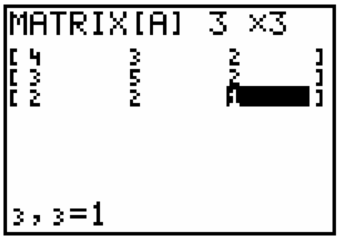
4 Matrices en stelsels van vergelijkingen

4.1 Het definiëren van een matrix

Het definiëren van een matrix kan via de matrix-editor, `2nd[MATRX]<EDIT>`. Er is een keuze tussen tien verschillende matrices, `[A]` t.e.m. `[J]`. Definieer na de keuze van een naam de dimensie van de matrix. Bevestig het ingeven van het aantal rijen met `[ENTER]` en doe hetzelfde voor het aantal kolommen. Nadien verschijnt er een matrix van de ingegeven dimensie waarbij ieder element gelijk is aan nul.

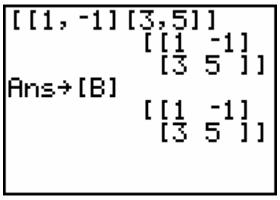
Het ingeven van de elementen start met het intikken van het element op de eerste rij en de eerste kolom, gevolgd door `[ENTER]`. De cursor verspringt automatisch naar het volgend in te geven element.





Open, `2nd[MATRX]<EDIT>`, voor het veranderen van een gedefinieerde matrix deze matrix in de matrix-editor, plaats de cursor (met de pijltjestoetsen) op de gewenste plaats en voer de gewenste verandering door.

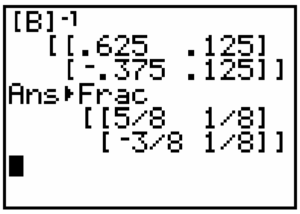
Vanuit het basisscherm worden matrices als volgt gedefinieerd: bv. `[[1,-1][3,5]]`. Het gebruiken van matrices in uitdrukkingen (zie volgende paragraaf) of het toekennen van een naam aan een matrix vanuit het basisscherm gebeurt via het submenu `2nd[MATRX]<NAMES>`.

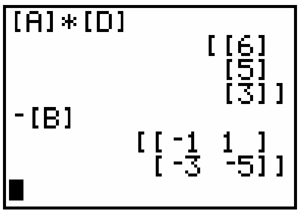


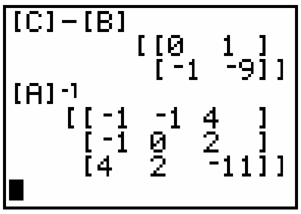
4.2 Bewerkingen met matrices

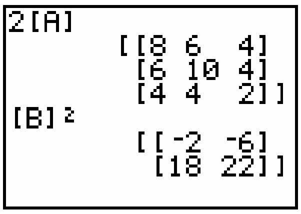
Een aantal elementaire bewerkingen met matrices illustreren we met de volgende matrices:

$$A=\begin{bmatrix}4&3&2\\3&5&2\\2&2&1\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}1&-1\\3&5\end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix}1&0\\2&-4\end{bmatrix}\text{ en }D=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}.$$

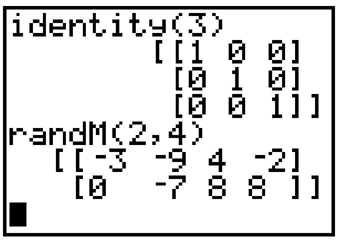


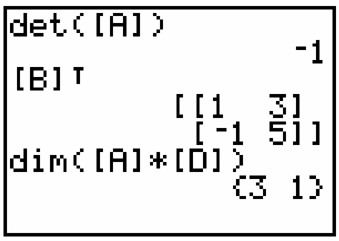






Het submenu `2nd[MATRX]<MATH>` bevat tal van functies voor matrices. We geven enkele voorbeelden:

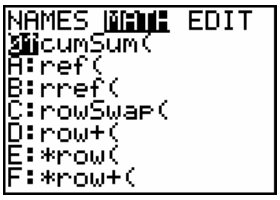


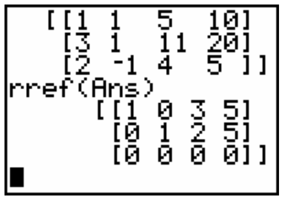


4.3 Stelsels van vergelijkingen

Het submenu `MATRX<MATH>` bevat enkele functies die het mogelijk maken om stelsels van lineaire vergelijkingen van de eerste graad op te lossen. We illustreren dit aan de hand van:

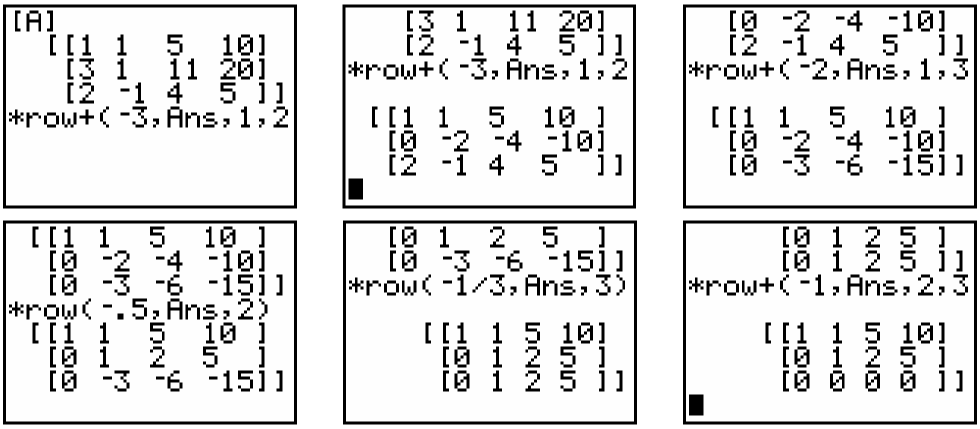
$$\begin{cases} x + y + 5z = 10 \\ 3x + y + 11z = 20 \\ 2x - y + 4z = 5 \end{cases}$$





Het commando `B:rref(` berekent de gereduceerde trapvorm van een matrix (zie hierboven) en de functie `A:ref(` de trapvorm. Voor het uitvoeren van deze twee commando's is het noodzakelijk dat het aantal kolommen groter dan of gelijk aan is aan het aantal rijen.

Bovendien is het mogelijk met de functies `C` t.e.m. `F` via elementaire rijoperaties, stap voor stap, een matrix te herleiden tot zijn gereduceerde trapvorm. Deze laatste methode noemt men de eliminatiemethode van Gauss. We verduidelijken deze methode met het bovenstaande stelsel.

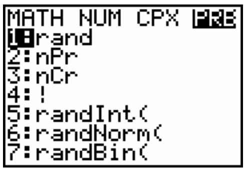


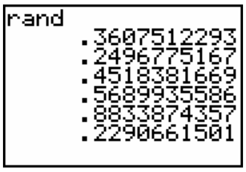
5 Simulatie

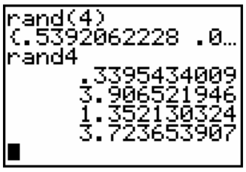
5.1 Toevalsgetallen

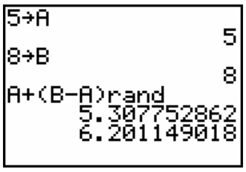
Het commando `rand` genereert als volgt toevalsgetallen:

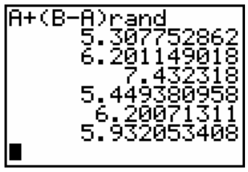
`rand`	→	een willekeurig getal x tussen 0 en 1 ($0 < x < 1$)
`rand(4)`	→	een lijst van 4 willekeurige getallen tussen 0 en 1
`rand4`	→	een willekeurig getal x tussen 0 en 4 ($0 < x < 4$)
`A+(B-A)rand`	→	een willekeurig getal x tussen A en B ($A < x < B$)







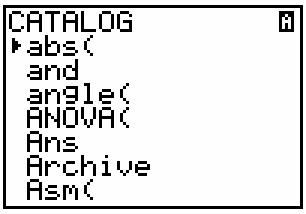


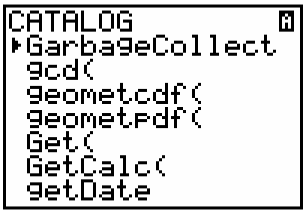


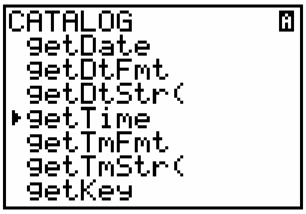
Het commando `rand` (, en andere at random commando's, genereert toevalsgetallen vertrekkende van een startwaarde. Standaard staat deze startwaarde ingesteld op 0. Vertrekkende van eenzelfde startwaarde geeft dit telkens dezelfde rij toevalsgetallen. Om in groep effectief at random resultaten te bekomen is het best vooraf iedereen een waarde te laten toekennen aan de variabele `rand`: `144` → `rand`.

Ook kan de waarde van de interne klok van de TI-84 Plus gebruikt worden om een startwaarde in te geven. Het instellen en het bekijken van de klok gebeurt via `[MODE]`.

Het commando `getTime` genereert een lijst met de waarde van de klok: {uren,minuten,seconden}. Dit commando bevindt zich in de catalogus van de rekenmachine: `2nd[CATALOG]`. Na het openen van de catalogus, toont het indrukken van een letter onmiddellijk het eerste commando dat begint met deze letter. Verder zoeken gebeurt met de pijltjestoetsen.

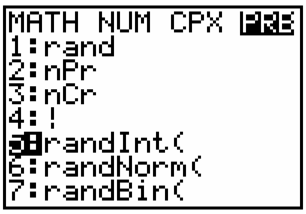


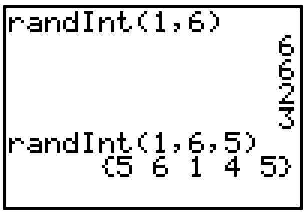




En het commando `randInt` genereert als volgt gehele toevalsgetallen:

`randInt(1,6)`	→	een willekeurig geheel getal tussen 1 en 6 (grenzen inbegrepen)
`randInt(1,6,5)`	→	een lijst van 5 willekeurige gehele getallen tussen 1 en 6



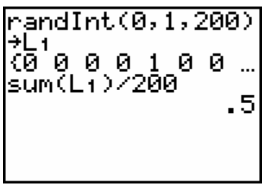


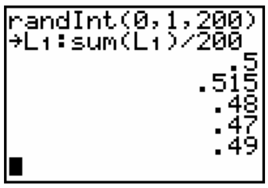
5.2 Het opwerpen van een munstuk

Om het opwerpen van een muntstuk te simuleren, coderen we kop met 1 en kruis met 0.

We simuleren het tweehonderd keer opwerpen van een muntstuk en plaatsen de resultaten in lijst L_1 met het commando `randInt(0,1,200)`→ L_1.

Het aantal keer kop en de relatieve frequentie van kop kunnen bepaald worden met het `sum`-commando.

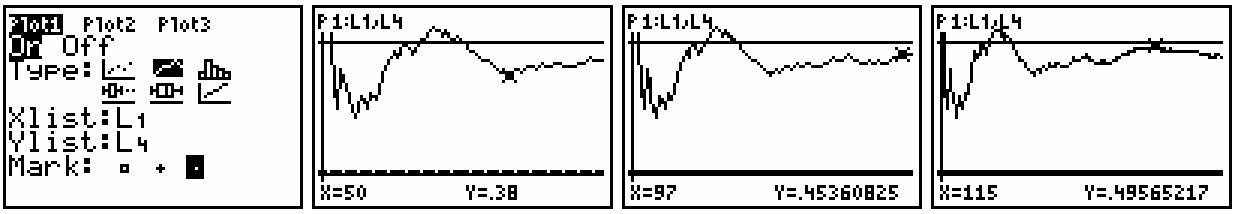




Om het vorige resultaat visueel voor te stellen, definiëren we de volgende lijsten:

```
L1 = seq(X,X,1,200)
L2 = randInt(0,1,200)
L3 = cumSum(L2)
L4 = L3/L1
Y1 = 1/2
```

De onderstaande schermafdrukken tonen dat de relatieve frequentie van de gebeurtenis kop op de lange duur ½ benadert.

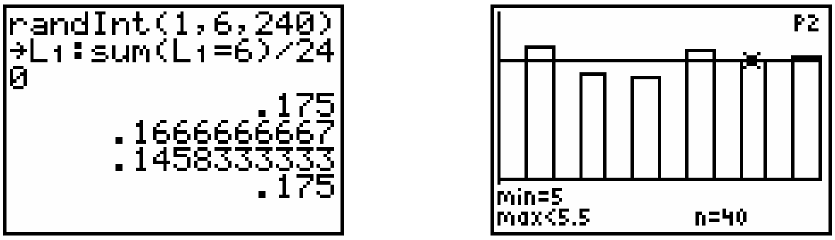


Bovenstaande statistische plots tonen ook dat meer worpen niet automatisch een betere benadering betekent. Als we het muntstuk blijven opwerpen zal de relatieve frequentie ½ zo dicht benaderen als we maar willen maar niemand kan ons zeggen hoeveel worpen we hiertoe moeten uitvoeren.

5.3 Het werpen van dobbelstenen

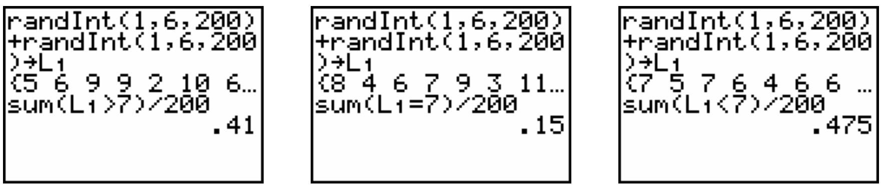
`randInt(1,6,240)→ L1` simuleert het 240 keer werpen van een dobbelsteen en `sum(L1=6)/240` berekent de relatieve frequentie van de gebeurtenis zes ogen.

Het hieronder afgebeelde histogram is opnieuw een visualisatie van Bernoulli's wet der grote aantallen.



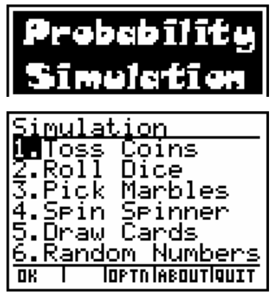
Het commando `randInt(1,6)+randInt(1,6)` simuleert het tellen van de ogen van een worp met twee dobbelstenen. Door dit commando herhaaldelijk uit te voeren kunnen de kansen benaderd worden opdat de som van het aantal ogen minder, gelijk aan of meer is dan zeven.

Dice 1	Dice 2	Dice 1	Dice 2	Dice 1	Dice 2	Dice 1	Dice 2	Dice 1	Dice 2	Dice 1	Dice 2
1	1	2	1	3	1	4	1	5	1	6	1
1	2	2	2	3	2	4	2	5	2	6	2
1	3	2	3	3	3	4	3	5	3	6	3
1	4	2	4	3	4	4	4	5	4	6	4
1	5	2	5	3	5	4	5	5	5	6	5
1	6	2	6	3	6	4	6	5	6	6	6



Simulatie van kansexperimenten

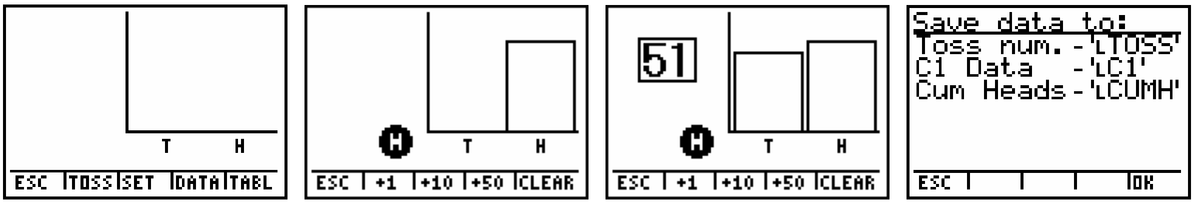
De zojuist uitgevoerde simulaties van kansexperimenten, en meer, kunnen op een zeer makkelijke manier gevisualiseerd worden met de applicatie Probabilty Simulation (`Prob Sim`).



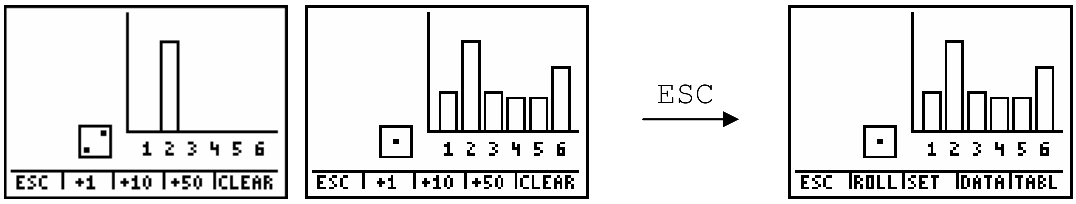
We verduidelijken de functionaliteit van deze APP met enkele schermafdrukken. Naast de kracht als demonstratie of als experiment kunnen vanuit deze APP de gegenereerde data ook geëxporteerd worden naar lijsten voor verdere analyse.

- <u>`1. Toss Coins`</u>

  De opties onderaan het scherm worden geactiveerd met `F1` (`[Y=]`), ..., `F6` (`[GRAPH]`), de grafische toetsen.

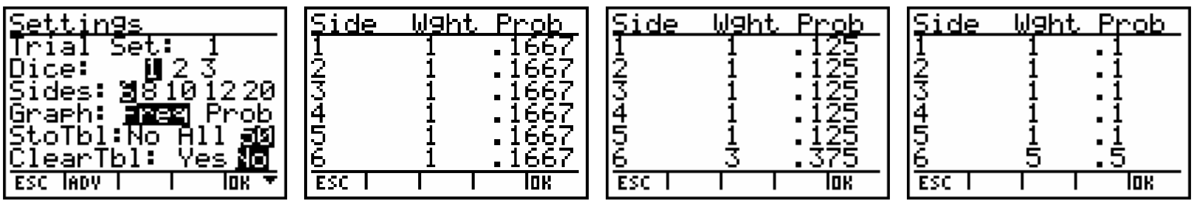


- <u>`2. Roll Dice`</u>

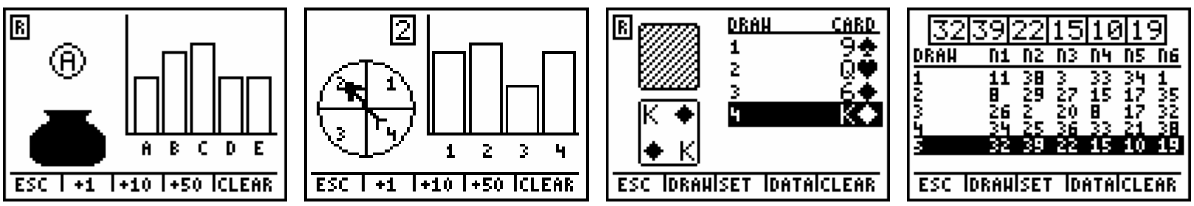


  Via `SET` kunnen een aantal instellingen gedefinieerd worden. Vanzelfsprekend kan dit voor alle experimenten van deze APP. En de eerste vier experimenten kunnen vervalst worden via de `ADV`-optie.

  Voor het werpen van een dobbelsteen kan ofwel het gewicht (`Wght`) of de kans (`Prob`) van een gebeurtenis worden aangepast. Bij iedere wijziging wordt alles automatisch aangepast.



- <u>Nog enkele schermafdrukken</u>



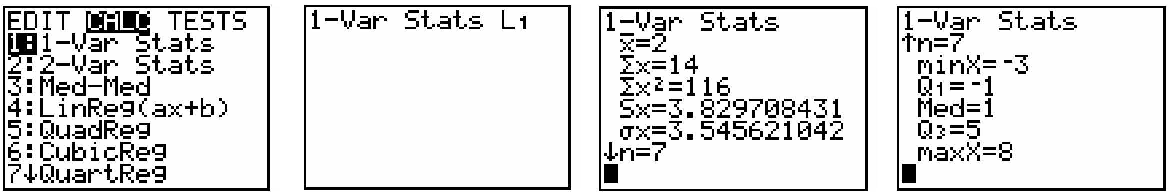
`3. Pick Marbles` `4. Spin spinner` `5. Draw Cards` `6. Random Numbers`

6 Statistiek

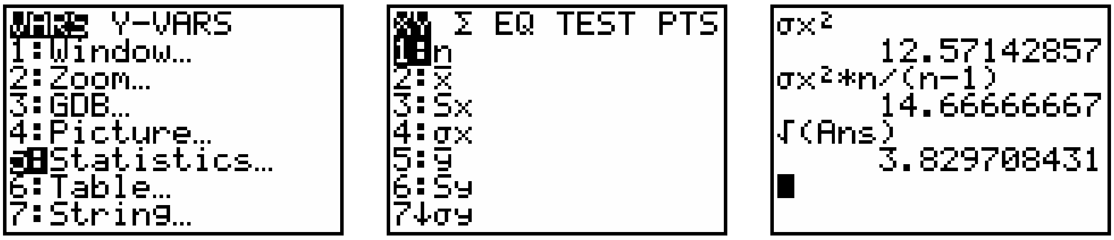
6.1 Het berekenen van kengetallen

Het berekenen van tal van statistische kengetallen voor een dataset gebeurt met het commando 1:1-Var Stats uit het STAT<CALC>-menu.

Na het uitvoeren van STAT<CALC> 1:1Var Stats 2nd[L_1] verschijnen er tal van kengetallen van de lijst L_1 op het basisscherm (L_1={8,-3,5,0,1,4,-1}).



De berekende statistische kengetallen kunnen gebruikt worden voor verdere berekeningen via [VARS] 5:Statistics.



6.2 Statistische plots

a. *EEN HISTOGRAM*

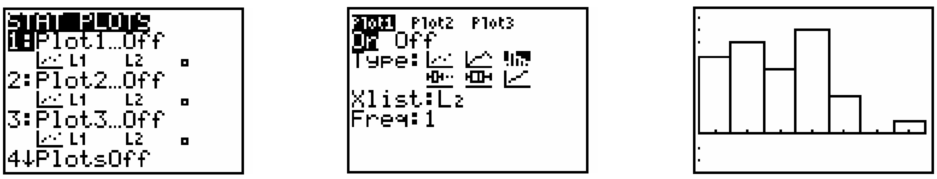
De onderstaande data, lijst L_2, zijn het resultaat van de vraag aan 30 volwassen mannen naar hun schoenmaat.

42	39	42	41	40	44	43	41	40	40
42	40	39	38	43	40	39	44	42	40
41	46	40	41	42	42	38	39	44	41

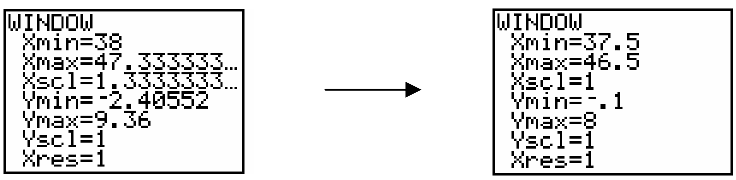
De definitie van een histogram start met het commando 2nd[STAT PLOT] 1:Plot1.

Zet de cursor op On en druk op [ENTER]. Selecteer voor Type het histogram-pictogram en tik achter Xlist 2nd[L_2]. Standaard staat Freq op 1.

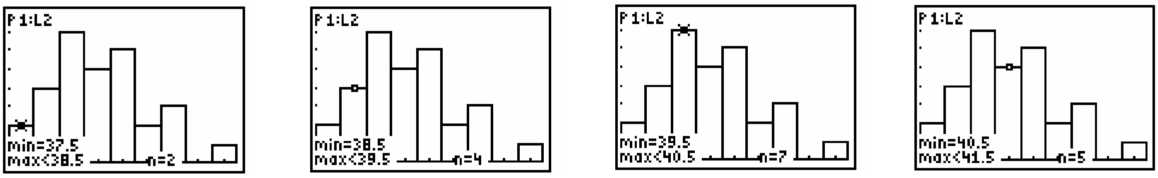
Kies een venster aangepast aan de data door het indrukken van [ZOOM] 9:ZoomStat.



Stel de vensterinstellingen ([WINDOW]), als volgt in en druk op [GRAPH]:



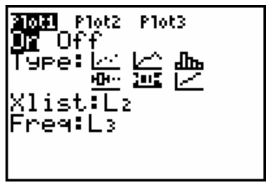
Door deze vensterinstellingen worden de schoenmaten 38 t.e.m. 46 de klassenmiddens van het histogram. Door te drukken op [TRACE] als het grafisch venster actief is en met de toetsen ◀ ▶, kunnen de frequenties bepaald worden. Druk [CLEAR] of [GRAPH] voor het afzetten van de TRACE-functie.



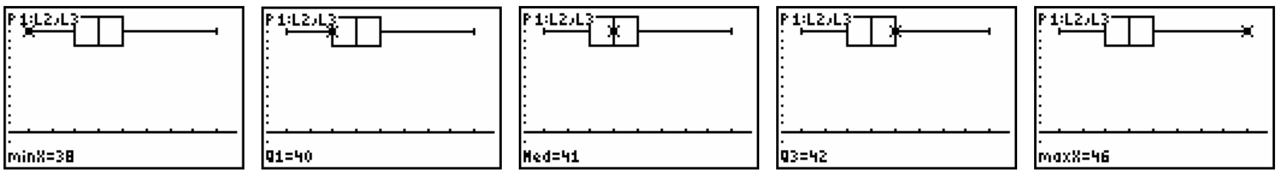
Met de TRACE-functie kunnen we de onderstaande frequentietabel opstellen. Het bepalen van de kengetallen en het tekenen van een histogram a.h.v. de frequenties verloopt zoals hieronder aangegeven.

b. *Een Box-plot*

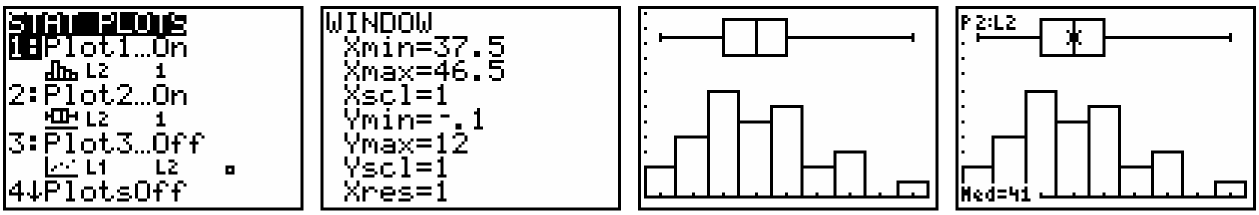
Het genereren van een box-plot verloopt analoog aan het genereren van een histogram. Het venster van STAT PLOT wordt in dit geval ingevuld zoals hiernaast aangegeven.



Het uitvoeren van de TRACE-functie op de box-plot levert de volgende vijf kengetallen op: minX, Q1, Med, Q3, maxX.



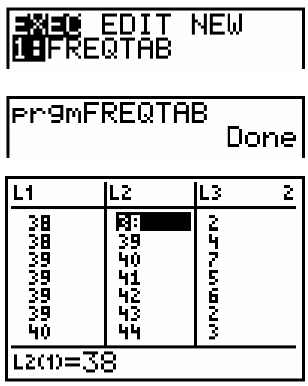
Ook interessant is de combinatie van een histogram en een box-plot.



6.3 Een frequentietabel

Het onderstaande programma genereert een frequentietabel van de data die zich bevinden in lijst **L1**. De *verschillende* data komen terecht in **L2** en hun frequenties in lijst **L3**. Indien we de lijst met schoenmaten in L1 plaatsen geeft dit:

```
PROGRAM:FREQTAB
SortA(L1)
ClrList L2,L3
1→I:1→J:1→T
While I≤dim(L1):L1(I)→L2(J)
 While L1(I)=L1(min({I+1,dim(L1)})) and I<dim(L1)
 I+1→I
 T+1→T
 End
T→L3(J):J+1→J:1→T:I+1→I
End
```



6.4 Enkele kansverdelingen

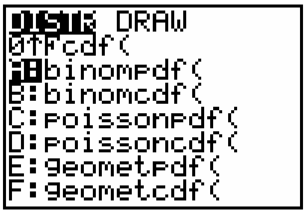
a. *DE BINOMIALE VERDELING*

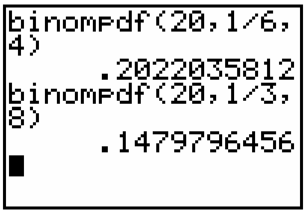
Als voorbeeld beschouwen het 20 keer werpen van een dobbelsteen en stel X = het aantal keer zes ogen. X is binomiaal verdeeld met parameters n = 20, het aantal herhalingen, en $p = \frac{1}{6}$, de kans op zes ogen bij één worp. De kans dat op 20 worpen:

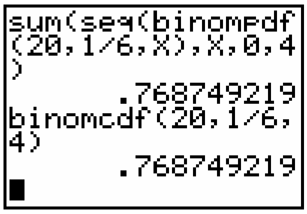
- juist 4 keer een zes geworpen wordt, is: $P(X = 4) = \binom{20}{4}\left(\frac{1}{6}\right)^4\left(\frac{5}{6}\right)^{16} = 0.202$,
- juist 8 keer “zes of drie”: $\binom{20}{8}\left(\frac{1}{3}\right)^8\left(\frac{2}{3}\right)^{12} = 0.148$,
- en hoogstens 4 keer een zes: $P(X \le 4) = \sum_{x=0}^{4}\binom{20}{x}\left(\frac{1}{6}\right)^x\left(\frac{5}{6}\right)^{20-x} = 0.769$.

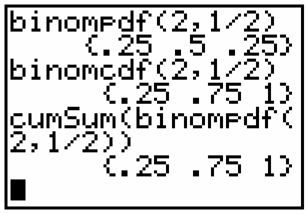
Deze kansen kunnen ook met de TI-84 Plus berekend worden in plaats van gebruik te maken van statistische tabellen. We gebruiken hiervoor de volgende commando’s:

`2nd[DISTR]<DISTR> 0:binompdf(` en `2nd[DISTR]<DISTR> A:binomcdf(`









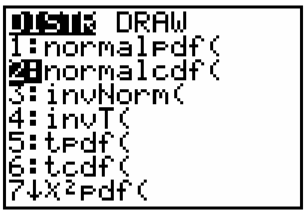
b. *DE NORMALE VERDELING*

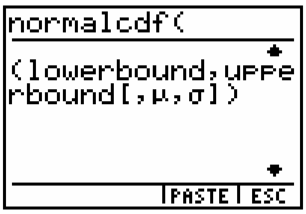
Stel dat de massa X van een groep studenten normaal verdeeld is met gemiddelde $\mu = 82$ kg en standaardafwijking $\sigma = 2$ kg – $X \sim N(82,2)$.

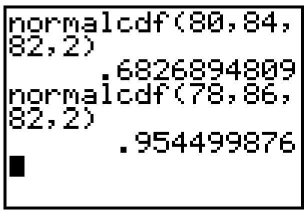
We controleren de “68-95-99,7 regel”, die zegt dat de oppervlakte onder de kromme van de dichtheidsfunctie van een normale kansverdeling begrepen tussen

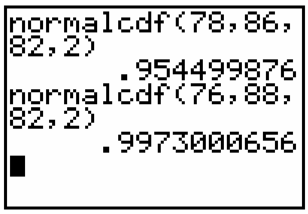
$\mu \pm \sigma$ gelijk is aan 0,68269 $\approx$ 68%
$\mu \pm 2\sigma$ gelijk is aan 0,95450 $\approx$ 95%
$\mu \pm 3\sigma$ gelijk is aan 0,99730 $\approx$ 99,7%

met het commando `normalcdf` zoals hier onder aangegeven. Merk op dat we de berekeningen kunnen uitvoeren zonder te standariseren.



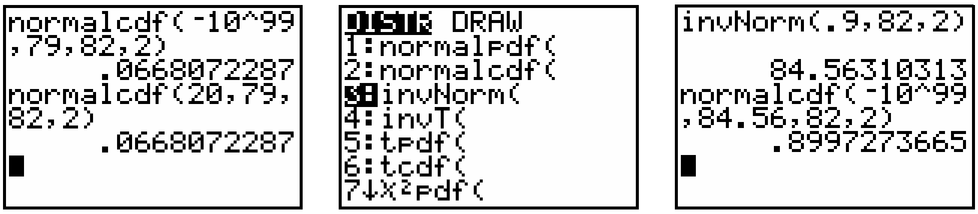




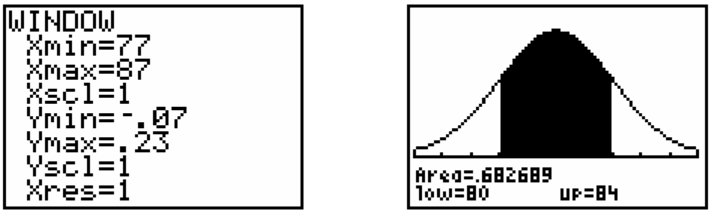


Indien er geen waarden worden opgegeven voor μ en σ werkt het commando `normalcdf` met de standaard normaal verdeling.

We bepalen achtereenvolgens het percentage van de studenten met een massa kleiner dan 79 kg en de massa waaronder 90% van de massa's van de studenten gelegen zijn. Deze massa noemen we het 90ste percentiel van de verdeling.



Voor het tekenen van de dichtheidsfunctie van X definieer je Y1 als normalpdf(X,82,2). Dat de oppervlakte onder de kromme begrepen tussen $\mu \pm \sigma$ gelijk is aan 68% kunnen we grafisch voorstellen met het commando: 2nd[DISTR]<DRAW> 1:ShadeNorm(80,84,82,2).



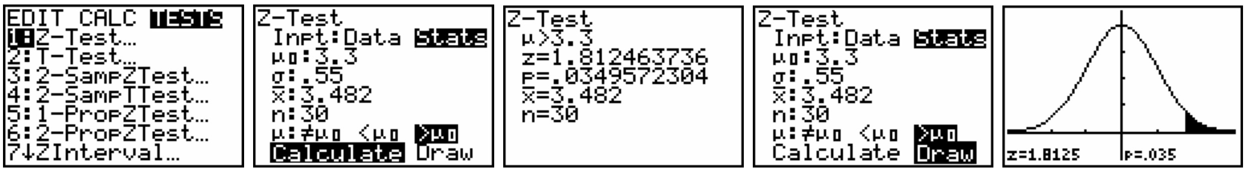
6.5 Het toetsen van hypothesen

De stochastische veranderlijke X bepaalt het geboortegewicht van kinderen. Veronderstel dat de geboortegewichten normaal verdeeld zijn.

Een gynaecoloog beweert dat het gemiddelde geboortegewicht groter is dan de vooropgestelde standaard van 3.3 kg. Om zijn hypothese te toetsen houdt hij gegevens bij van dertig boorlingen. Het gemiddelde en de standaardafwijking van zijn steekproef zijn: $\overline{x} = 3.482$ en $Sx = 0.562$.

We veronderstellen dat we het gemiddelde van de populatie, μ, niet kennen en dat we de standaardafwijking van de populatie, $\sigma = 0.55$, wel kennen.

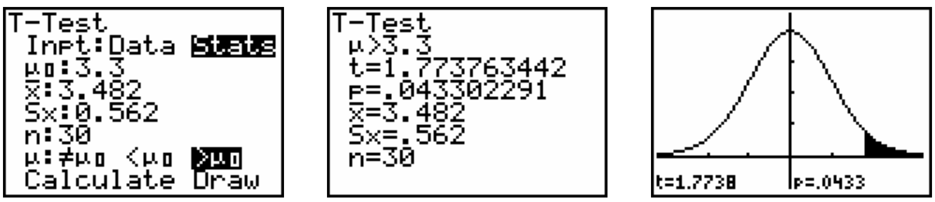
We toetsen $H_0 : \mu = 3.3$ versus $H_1 : \mu > 3.3$ met de Z-test ([STAT]<TESTS> 1:Z-Test), gebaseerd op de normale verdeling.



De p-waarde is de kans, indien de nulhypothese ($H_0 : \mu = 3.3$) als waar wordt aangenomen, om observaties te bekomen die even extreem zijn als, of nog extremer zijn dan, de nulhypothese.

Indien we toetsen op een 5% significantieniveau, betekenen bovenstaande resultaten (p = 0.34957<0.5) dat de resultaten van de steekproef significant zijn en dat we de nulhypothese verwerpen.
Als de ruwe data van de steekproef gekend zijn, kan er ook gewerkt worden met Data i.p.v. Stats.

Indien de standaardafwijking van de populatie niet gekend is, gebruiken we de T-test gebaseerd op de Student t-verdeling ([STAT]<TESTS> 2:T-Test). De standaardafwijking van de populatie wordt in dit geval vervangen door de standaardafwijking van de steekproef.



7. Bewegende parabolen

De applicatie Transformation Graphing maakt het mogelijk om op een zeer eenvoudige manier de invloed van parameters op de grafiek van reële functies te onderzoeken. Als voorbeeld bekijken we de kwadratische functie $f(x) = ax^2 + bx + c$ met $a \neq 0$.

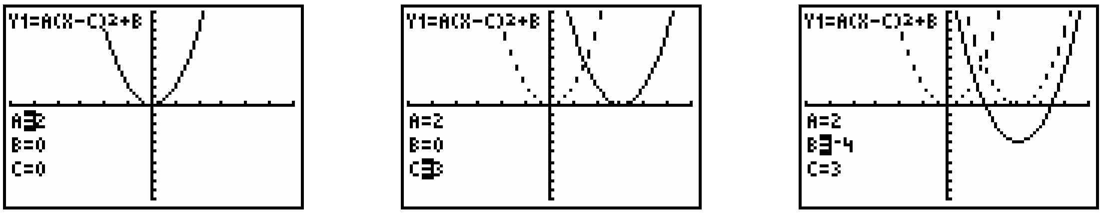
Een korte algebraïsche berekening leert ons dat:

$$ax^2 + bx + c = a(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}) = a(x^2 + 2\frac{b}{2a} + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}) = a(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2}{4a} + c\,.$$

Het is m.a.w. voldoende om de $f(x) = A(x - B)^2 + C$ te bestuderen en de eigenschappen van deze functie kunnen afgeleid worden uit de invloed van de parameters A, B en C op de grafiek van $f(x) = x^2$.

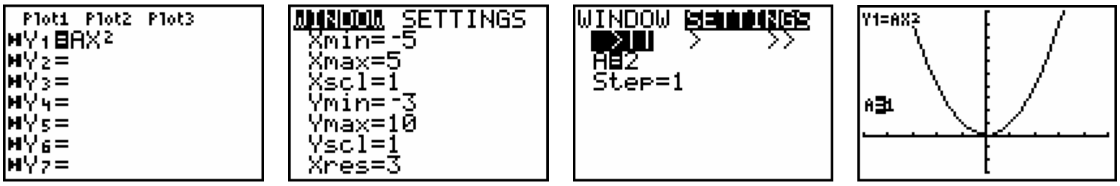
Een concreet voorbeeld: $f(x) = 2x^2 - 12x + 14 = 2(x^2 - 6x + 7) = 2(x^2 - 2 \cdot 3x + 9 - 2) = 2(x - 3)\,\hat{}\,2 - 4$.

$2x^2$ → $2(x-3)\,\hat{}\,2$ → $2(x-3)\,\hat{}\,2-4$

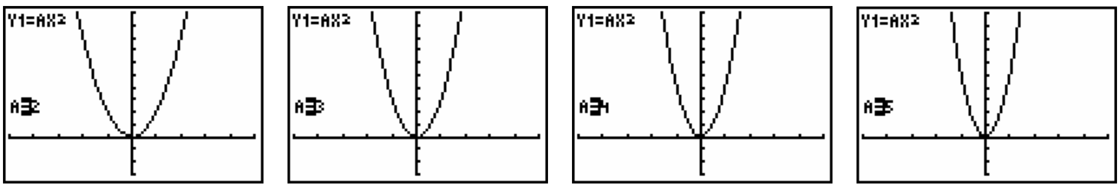


$f(x) = Ax^2$ $(A > 0)$

Start de applicatie `Transfrm` en definieer de functie `Y1=AX`^{2}. Plot met de onderstaande `WINDOW`-settings de grafiek.

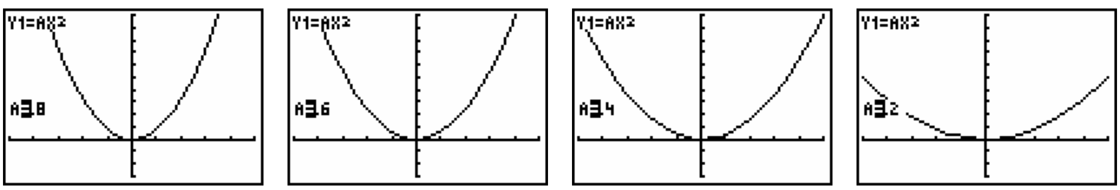


Door te drukken op ▶ wordt de coëficiënt met 1 verhoogd en onmiddellijk wordt de grafiek aangepast.



De grafiek van $f(x) = Ax^2$ $(A > 1)$ vertoont duidelijk dezelfde karakteristieken als de grafiek van $f(x) = x^2$ – bv. symmetrie-as $x = 0$ en top $(0,0)$ – enkel de opening van de parabool verkleint.

Om terug de grafiek van $f(x) = x^2$ te bekomen, kan gebruik gemaakt worden van ◀ maar ook kan gewoon 1 ingedrukt worden. Verander de `Step`-grootte in 0.2. Door te drukken op ◀ bekomen we `A`-waarden kleiner dan 1. Weer zien we dat de grafiek dezelfde kenmerken vertoont maar in dit geval wordt de opening van de parabool groter.

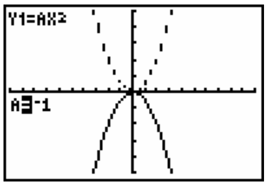


$f(x) = Ax^2 \quad (A < 0)$

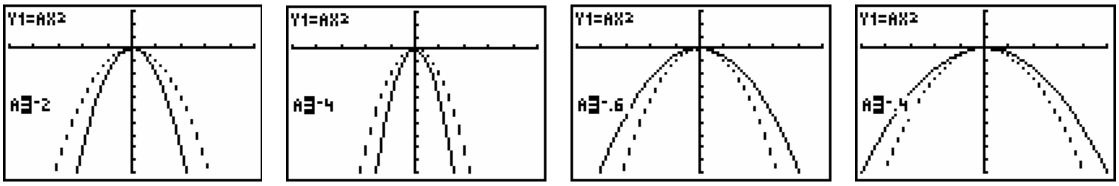
Stel de waarde van `A` terug gelijk aan 1 en kies voor `Zstandard`.

Zet in de grafische instellingen (`2nd[FORMAT]`) de optie `TrailOn` aan.

Verander de parameter `A` in `A = −1` door -1 in te tikken. Gebruik hiervoor het $(-)$ -teken!

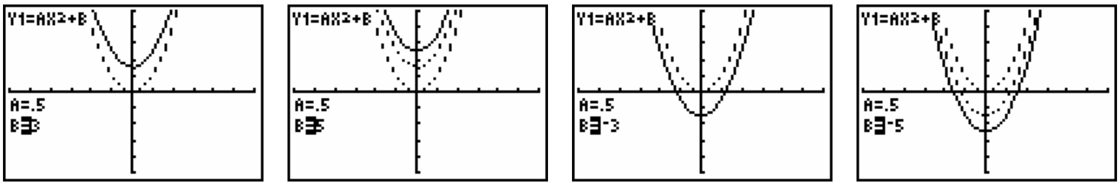


Merk op dat de grafiek van $f(x) = -x^2$ het spiegelbeeld is van $f(x) = x^2$ t.o.v. de x-as. Met de toetsen ◀ en ▶ bekomen we gelijkaardige grafieken ($A < 0$) als de grafiek van $f(x) = -x^2$ met een kleinere opening indien $A < -1$ en een grotere opening indien $-1 < A < 0$.



$f(x) = Ax^2 + B$

Herdefinieer de functie `Y1=AX²+B`, stel (`WINDOW` → `Settings`) `A=0.5` en `B=0` en plot de grafiek in `Zstandard`. Plaats met de ▼-toets de cursor bij de parameter `B` en verander de waarde van `B`.

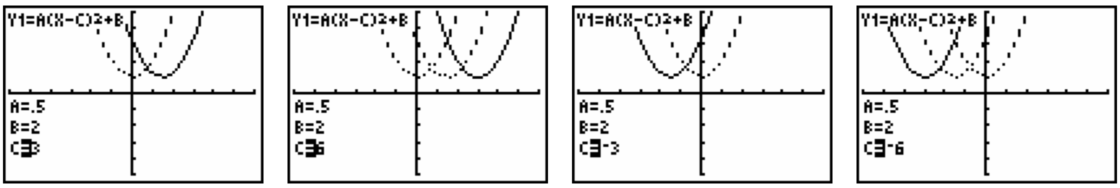


De grafiek van de functie $f(x) = Ax^2$ wordt over een afstand $|\,B\,|$, in verticale richting, verschoven. Indien $B > 0$ wordt de parabool naar boven verschoven en indien $B < 0$ naar beneden. Hierdoor is de top van de parabool behorende bij de functie $f(x) = Ax^2 + B$ gelijk aan $(0, B)$ maar de symetrieas blijft $x = 0$.

$f(x) = A(x - C)^2 + B$

Herdefinieer de functie `Y1=A(X−C)²+B`, stel (`WINDOW` → `Settings`) `A=0.5`, `B=2` en `C=0` en plot de grafiek in `Zstandard`.

Plaats met de ▼-toets de cursor bij de parameter `C` en verander de waarde van `C`.



De grafiek van de functie $f(x) = Ax^2 + B$ wordt over een afstand $|\,C\,|$, in horizontale richting, verschoven. Indien $C > 0$ wordt de parabool naar rechts verschoven en indien $C < 0$ naar links. Hierdoor is de top van de parabool behorende bij de functie $f(x) = A(x - C)^2 + B$ gelijk aan (C, B) en heeft de symmetrie-as als vergelijking $x = C$.

$f(x) = ax^2 + bx + c$

Uit het voorgaande en uit $f(x) = ax^2 + bx + c = a(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2}{4a} + c$ volgt dat de top van de grafiek van f gelijk is aan $\left(-\frac{b}{2a}, \frac{-b^2 + 4ac}{4a}\right)$ en de symmetrieas heeft als vergelijking $x = -\frac{b}{2a}$.

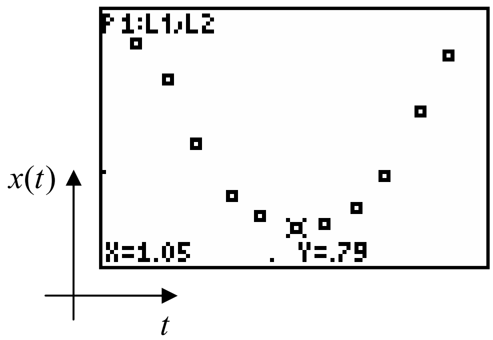
INTERMEZZO

- Indien de APP Transformation Graphing actief is, kan er slechts één functie geplot worden. Voor het afsluiten van Transformation Graphing selecteer opnieuw `Transfrm` en kies voor `Uninstall`. Het afsluiten van de applicatie Inequality Graphing (zie verder) verloopt op een gelijkaardige manier.
- Enkel de letters A, B, C en D kunnen gebruikt worden als parameters bij Transformation Graphing. Alle andere letters worden gebruikt als constanten, een variabele waarvan de waarde zich in het RAM-geheugen bevindt.

Klasactiviteit 4

De hieronder afgebeelde data horen bij een botsende bal. Daar deze beweging gebeurt in het zwaartekrachtveld is er een kwadratisch verband tussen tijd en afstand. Het model dat we hiervoor opstellen is van de vorm $x(t) = A(t - B)^2 + C$. Plaats de data in de lijsten L1 en L2.

Tijd t	Afstand $x(t)$
0.67	1.46
0.75	1.33
0.82	1.09
0.9	0.91
0.97	0.83
1.05	0.79
1.12	0.8
1.2	0.86
1.27	0.98
1.35	1.21
1.42	1.42



(i) Bepaal een waarde voor B en C.

(ii) Bepaal de coëfficiënt A zodat de parabool volgens jou zo goed mogelijk aansluit bij de data.

(iii) Vergelijk de waarde van A met de gravitatieconstante $g = 9.81\frac{m}{s^2}$.

(iv) De parabool die het best aansluit bij bovenstaande data wordt wiskundig bepaald volgens het kleinste kwadraten criterium – het uitvoeren van een kwadratische regressie op de data met `[STAT]<CALC> 5:QuadReg L1,L2`.

Gebruik om het resultaat van de regressie automatisch als functie te bewaren `L1,L2,Y1` i.p.v. `L1,L2`.

Vergelijk dit kwadratisch model met het resultaat van (ii).

8. Lineair programmeren

We beschikken over € 3,6 voor een aankoop van appels en peren. De prijs van een appel bedraagt € 0,2 en van een peer € 0,3. Veronderstel dat een appel 4 gram vitamine C bevat en een peer 7 gram. Hoeveel appels en peren moeten we kopen om een zo maximaal mogelijke hoeveelheid aan vitamine C te hebben, rekening houdend dat er slechts 12 appels and 10 peren meer beschikbaar zijn in de winkel.

<u>Mathematiseren van het probleem</u>

Stel x het aantal appels en y het aantal peren.

Vanzelfsprekend moet er aan de volgende voorwaarde voldaan zijn: $x \geq 0$ en $y \geq 0$.

Het beschikbare budget, de prijs en het totale aantal appels en peren bepalen de volgende voorwaarden (in eurocent) voor x en y: $20x + 30y \leq 360$, $x \leq 12$ en $y \leq 10$.

De maximale oplossing van ons probleem bevindt zich tussen de punten (x, y) die aan de volgende voorwaarden voldoen: $\begin{cases} 20x + 30y \leq 360 \\ x \leq 12 \\ y \leq 10 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$

<u>Grafische voorstelling</u>

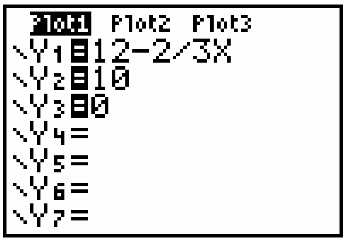
Voor het grafisch voorstellen van dit gebied plotten we de bovenstaande lineaire voorwaarden.

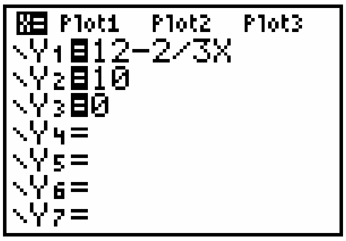
Hiervoor definiëren we eerst de functies: $Y_1 = 12 - \frac{2}{3}x$,

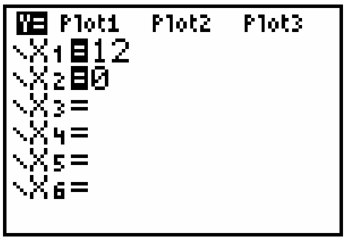
$Y_2 = 10$ en

$Y_3 = 0$.

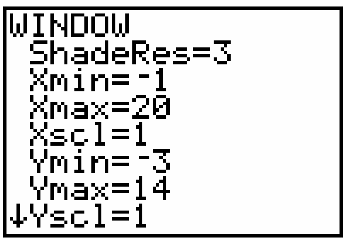
Om $X_1 = 12$ en $X_2 = 0$ te definiëren, starten we de applicatie Inequality Graphing (`Inequal`) en selecteren we `X=`.

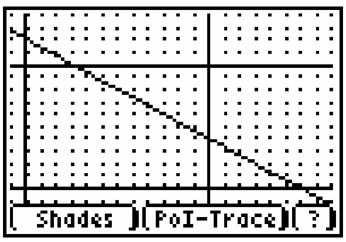


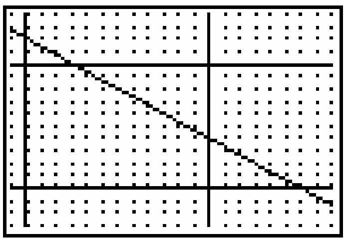




Deze definities resulteren in de volgende plot (druk achtereenvolgens `[TRACE]` en `[ClEAR]` om het menu onderaan te verwijderen). Indien nodig, zet eerst het rooster aan (`2nd[FORMAT] GridOn`).

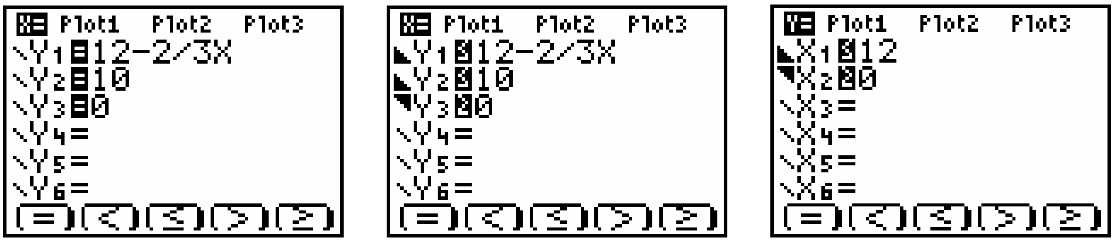




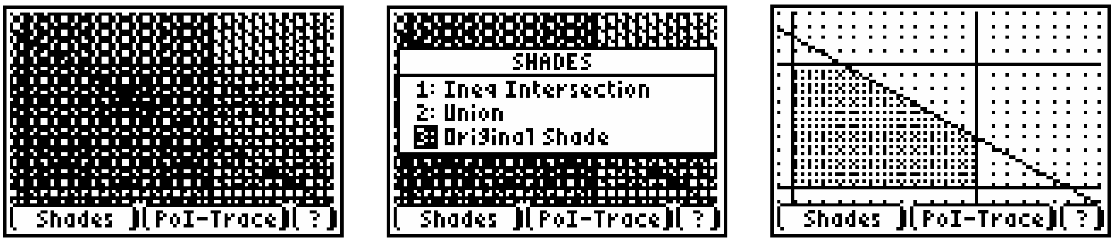


Alle punten in dit gesloten gebied voldoen aan bovenstaande voorwaarden voor x en y.

Het is mogelijk om dit gebied gebied te arceren. Hiervoor veranderen we de gelijkheidstekens als volgt. Plaats de cursor op het gelijkheidsteken en druk vervolgens F2 ([ALPHA] [WINDOW]) of F3 ([ALPHA] [ZOOM]) of ... F6 ([ALPHA] [GRAPH]).

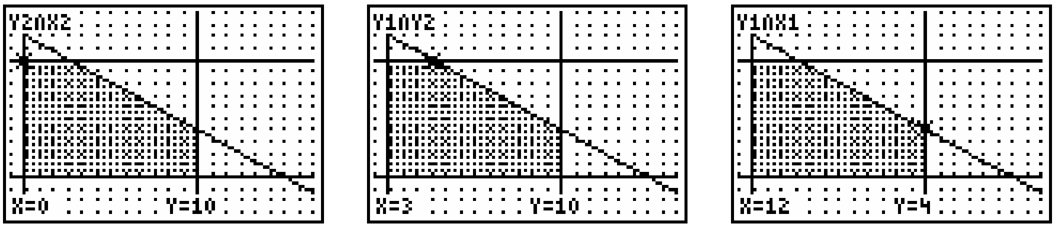


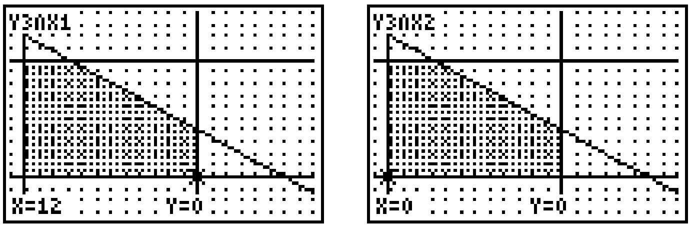
Druk [GRAPH], vervolgens Shades en selecteer 1:Ineq Intersection.



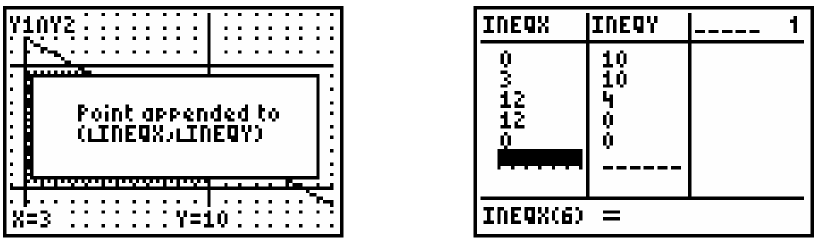
Met de optie PoI−Trace kunnen de hoekpunten van het gebied bepaald worden.

◀ ▶ = verander 2^e functie ▲ ▼ = verander 1^e functie



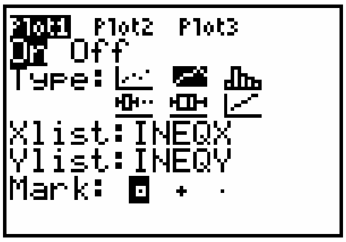


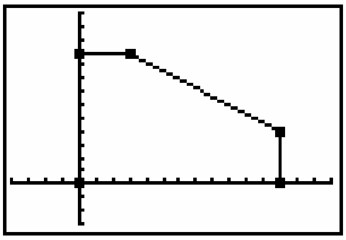
Druk [STO ▶] om een geselecteerd hoekpunt te bewaren. De coördinaten van het hoekpunt worden toegevoegd aan de lijsten INEQX en INEQY.



Met deze lijsten is het mogelijk om het gebied nog te plotten na het afsluiten van Inequality Graphing en zelfs na het verwijderen van de gedefinieerde functies.

Voor de volgende grafiek is het rooster (`2nd[FORMAT] GridOff`) uitgezet.





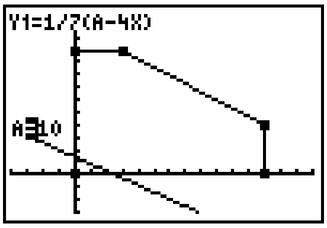
<u>Oplossen van het probleem</u>

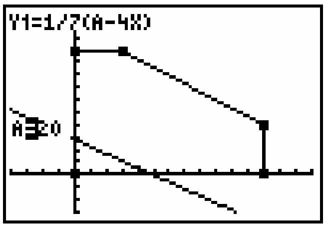
Om ons probleem op te lossen moeten we op zoek naar de maximale waarde voor $4x+7y$ in het zonet bepaalde gebied.

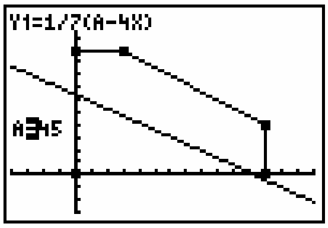
Om dit grafisch te onderzoeken, definiëren we de parameter A als volgt: $A=4x+7y$.

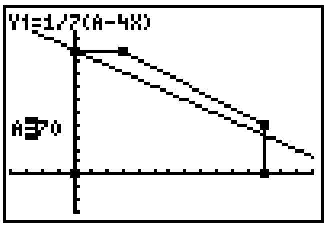
Met A definiëren we de functie $\mathrm{Y1} = \frac{1}{7}(A - 4x)$.

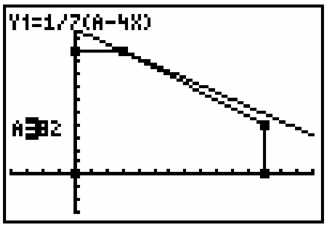
Start de applicatie Transformation Graphing (sluit hiervoor eerst Inequality Graphing) en bestudeer de waarden van A in het gesloten gebied.

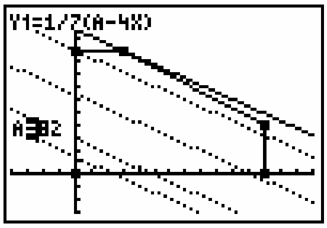






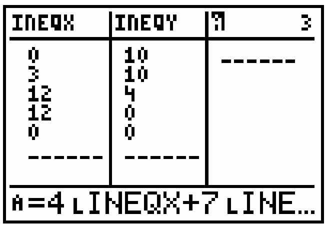


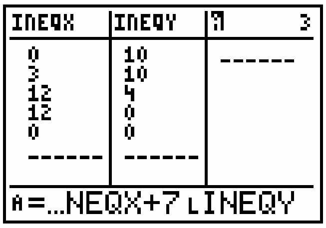


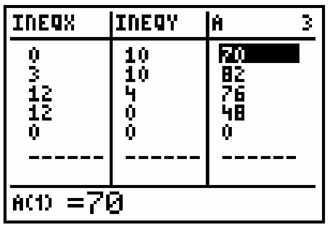


`2nd[FORMAT]- TrailOn`

Het bestuderen van de veranderingen van de parameter A leert ons dat de maximale waarde voor A zal aangenomen worden in een hoekpunt. We berekenen deze waarden in de `STAT`-editor.





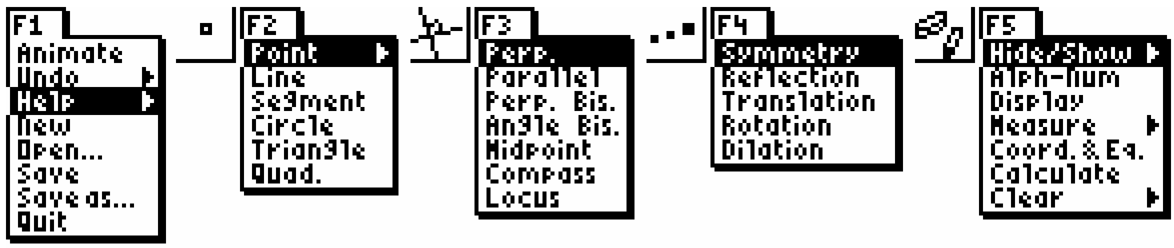


<u>Besluit</u>: We bekomen een maximum aan vitamine C indien we 3 appels en 10 peren aankopen.

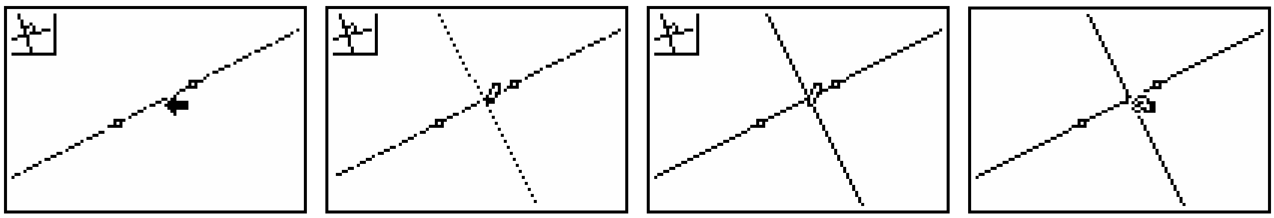
9. Speciale lijnen in een driehoek

Cabri™ Junior is de versie van Cabri voor de TI-84 Plus. De naam Junior laat een beperking vermoeden, maar het is zeer goed bruikbaar in de dagelijkse klassituatie. Bovendien is het mogelijk figuren uit te wisselen tussen Cabri Junior en Cabri Geometry™ Plus.

De volgende functies zijn beschikbaar in Cabri Junior.



Bij het tekenen van figuren en het maken van constructies is het zeer zinvol te kijken naar de vorm van de cursor. Het is niet zoals bij de PC-versie dat er boodschappen verschijnen. Deze boodschappen zitten verscholen in de lay-out van de cursor. Ook heeft ieder commando een bijhorend pictogram, hetgeen getoond wordt in de linkerbovenhoek van het scherm. Enkel als de pointer, , actief is, staat er geen pictogram.



Cabri Junior is een uitstekende tool om leerlingen zelf meetkundige eigenschappen en relaties te laten ontdekken en onderzoeken.

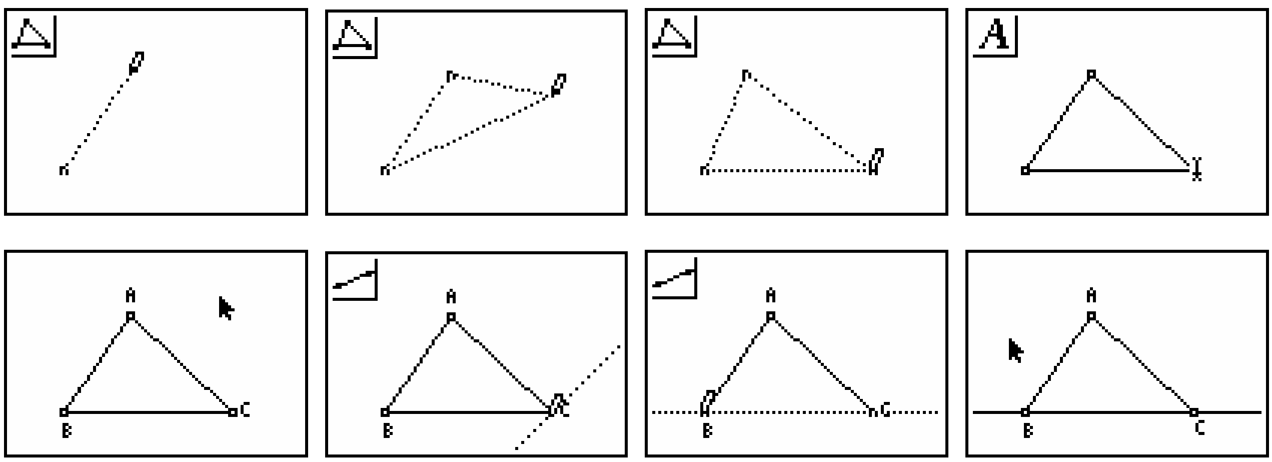
[2nd] = Verwisselen van keuzes in dialoogvensters

[CLEAR] = Activeren van de pointer

[ALPHA] = Verslepen van objecten (pointer actief)

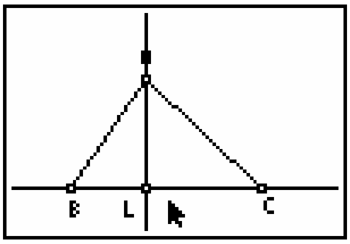
<u>Een voorbeeld</u>

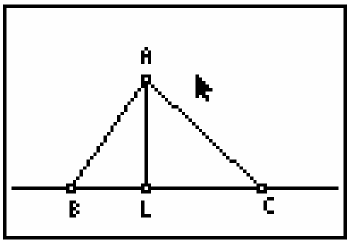
Teken een driehoek ΔABC (F2 Triangle) en een rechte (F2 Line) door de hoekpunten B en C. Het benoemen van de hoekpunten gebeurt via F5 Alph-Num.



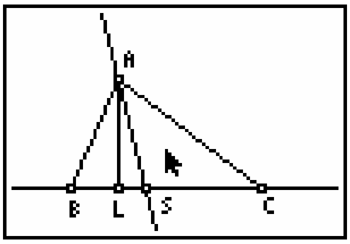
Construeer de volgende lijnstukken.

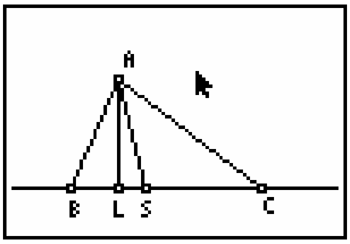
(i) Bepaal de loodlijn, de hoogtelijn, vanuit A op de rechte BC en noem het snijpunt L. Verberg de loodlijn en construeer het lijnstuk [AL] (`F2 Segment`).



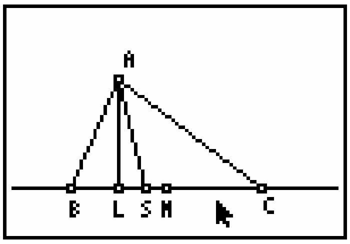


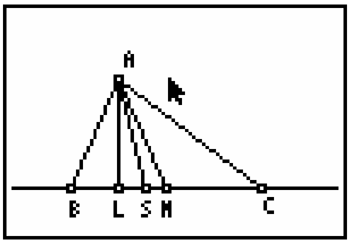
(ii) Bepaal de bissectrice (`F3 Perp. Bis.`) van de hoek ∠BAC en bepaal het snijpunt S van de bissectrice met de rechte BC. Verberg de bissectrice en teken het lijnstuk [AS].





(iii) Bepaal het middelpunt M van het lijnstuk [BC] (F2 MIDPOINT en selecteer achtereenvolgens de punten B en C) en teken het lijnstuk [AM]. De rechte AM noemt men de zwaartelijn van △ABC.





<u>OPDRACHT 1</u>

Wat merk je op i.v.m. de ligging van de hoogtelijn, de zwaartelijn en de bissectrice t.o.v. elkaar?

Is deze volgorde steeds het geval?

Kan één van deze lijnen buiten de driehoek vallen of samenvallen met een zijde van de driehoek?

Vallen bovenstaande segmenten ooit samen? Zo ja, in welk geval?

<u>OPDRACHT 2</u>

Construeer de driehoeken △AMB en △AMC en bepaal de oppervlakte van beide driehoeken.

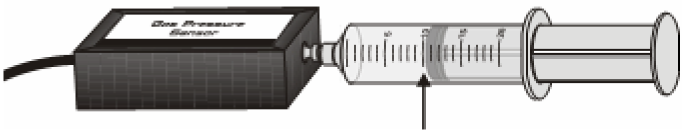
Conclusie? Verklaar!

10. Meten met de TI-84 Plus

Met de applicatie EasyData™ van Vernier (www.vernier.com/easy) kan de USB-poort gebruikt worden om metingen uit te voeren. Op deze manier wordt de TI-84 Plus een interdisciplinaire tools voor exacte wetenschappen en wiskunde.

We illustreren deze werkwijze met de wet van Boyle. Deze wet werd voor het eerst ontdekt in 1662 door de Ier Robert Boyle (1627-1691) en verklaart het verband tussen druk en volume van een gas in een gesloten ruimte bij een constante temperatuur. Het gas, bestaande uit trillende moleculen, oefent een druk uit op de wanden. Verkleinen we de ruimte dan vergroot de concentratie van de moleculen met als gevolg meer botsingen waardoor de druk toeneemt.

Hiervoor sluiten we de Gas Pressure Sensor (een meetbereik van 0 tot 210 kPa) van Vernier aan op de TI-84 Plus gebruikmakend van de EasyLink™. Het gas dat we gebruiken is lucht en als gesloten ruimte nemen we een spuit bevestigd op een druksensor. We zoeken het verband tussen de druk en het volume van het opgesloten gas.



VOORBEREIDING

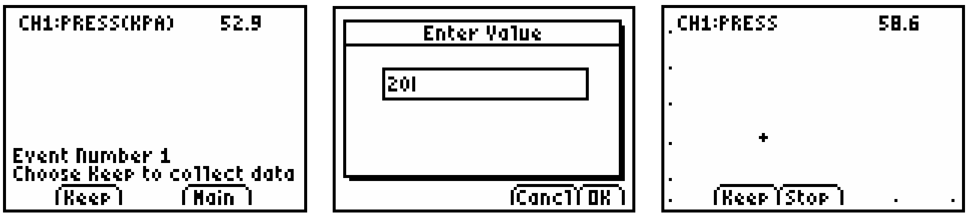
(i) Trek de meetspuit, los van de sensor, uit tot 10 ml en bevestig de spuit op de sensor met een lichte halve draai.

(ii) Start `EasyData`. Automatisch wordt de sensor gedetecteerd en de luchtdruk weergegeven (102 kPa). Kies, indien nodig, als meetmode via `Setup` voor `3:Events with Entry`.

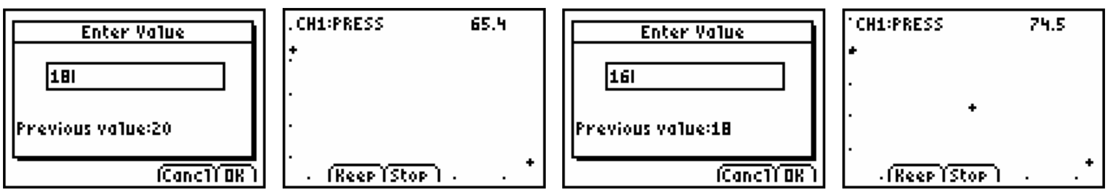
METING

(i) Druk `Start` en trek de spuit uit tot 20 ml.

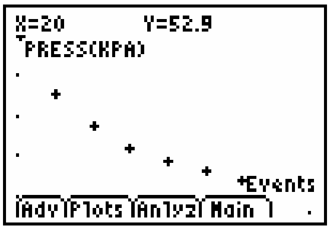
(ii) Bewaar de druk bij 20 ml door `Keep` te drukken. Vul in het scherm dat verschijnt het corresponderende volume 20 in. Bevestig met `OK`. Merk op dat het bewaarde datapunt automatisch geplot wordt.



(iii) Voer analoge metingen uit voor 18 ml, 16 ml, 14 ml, 12 ml, 10 ml, 8 ml, en 6 ml.



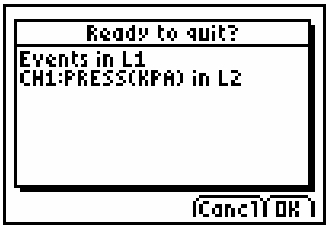
(iv) Stop de meting met `Stop`. Automatisch wordt een grafiek met de datapunten geplot.



ANALYSE

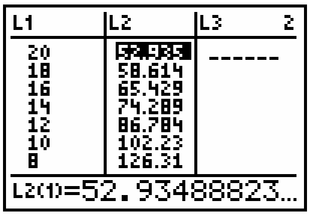
De datapunten kunnen beperkt geanalyseerd worden met EasyData maar ook met de basisfunctionaliteit van de TI-84 Plus.

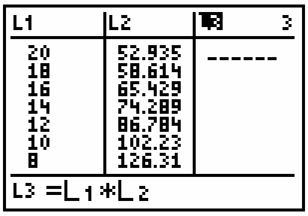
(i) Ga terug naar het hoofdscherm, `Main`, en sluit EasyData met `Quit`. De data worden automatisch bewaard in de lijsten `L1` en `L2`.

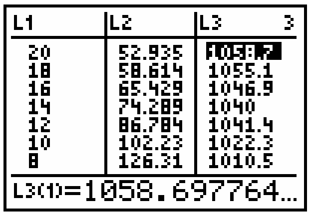


(ii) Open de lijsten in de `STAT`-editor. Merk je een relatie op tussen deze twee grootheden?

Definieer `L3` als `L1`·`L2`. Wat stel je vast voor de berekende waarden in kolom `L3`?

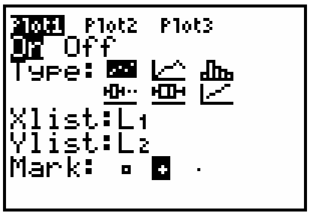


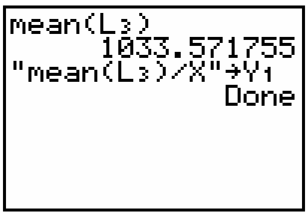


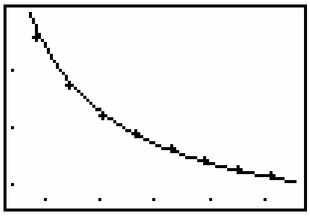


Welke evenredigheid bestaat er tussen de druk en het volume?

(iii) Maak een scatterplot die de druk uitzet i.f.v. van het volume. Bepaal een functievoorschrift dat goed aansluit bij deze datapunten. Gebruik hiervoor het antwoord op vraag (ii) en
`L3` = `L1`·`L2`.

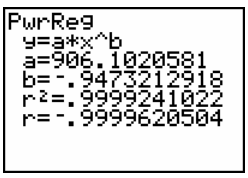


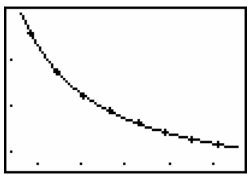




(iv) Voorspel met behulp van het in (iii) opgestelde model het volume dat nodig is voor een druk van 150 kPa. Controleer met de druksensor.

(v) Voor het opstellen van een model kunnen we ook een Power-regressie uitvoeren met de TI-84 plus.



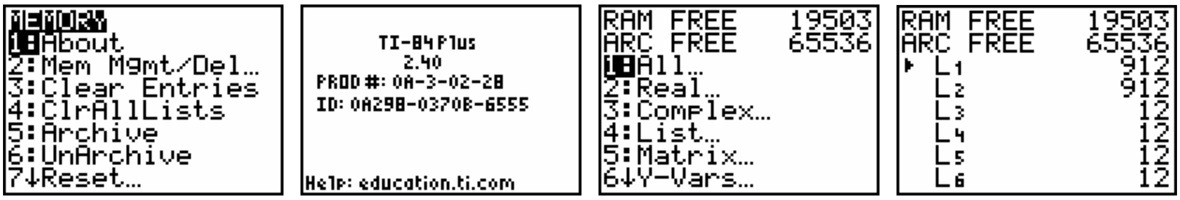


OM AF TE SLUITEN

Het geheugen van de TI-84 Plus

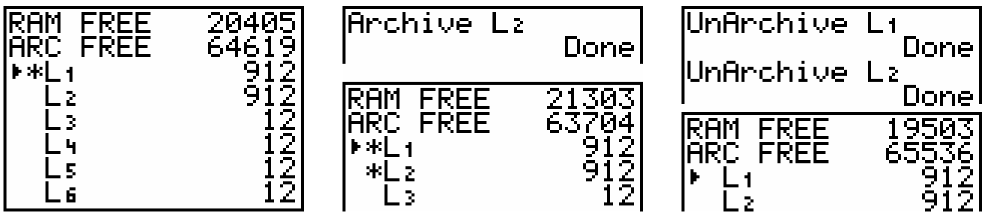
Het geheugen van de TI-84 Plus is opgedeeld in twee delen: het werkgeheugen (`RAM`) en het archiefgeheugen (`ARC`). Het `MEM`-menu biedt tal van functies om het geheugen te beheren.

`2nd[MEM] 1:About` toont o.a. het ID-nummer (niet wijzigbaar) van de rekenmachine. Met `2nd[MEM] 2:Mem Mgmt/Del` kan de inhoud van het geheugen en het beschikbare geheugen bekeken worden.

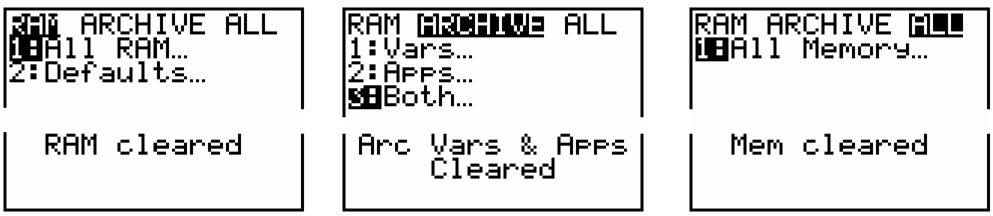


Ruwweg kan gezegd worden dat variabelen zoals functies, lijsten, matrices, programma's, ... standaard in het RAM-geheugen geplaatst worden en applicaties en applicatievariabelen, zoals Cabri Junior figuren, in het archiefgeheugen.

Een variabele in het RAM-geheugen kan in het archiefgeheugen geplaats worden door het eerst te selecteren via `2nd[MEM] 2:Mem Mgmt/Del` en op `[ENTER]` te drukken. Merk op dat voor de variabele een * wordt geplaatst om aan te geven dat de variabele gearchiveerd is (`[DEL]` i.p.v. `[ENTER]` verwijdert de variabele uit het geheugen). Het archiveren kan ook met het commando `2nd[MEM] 5:Archive`.



Met `2nd[MEM] 7:Reset` kunnen apart zowel het RAM-geheugen als het archiefgeheugen gereset worden maar ook tegelijk (`ALL`). Het RAM-geheugen kan opnieuw ingesteld worden volgens de fabriekinstellingen (`Defaults`).



Voor een volledig geresette TI-84 Plus en een TI-84 Plus Silver Edition is het volgende geheugen beschikbaar.

TI-84 Plus

RAM	24 KB
ARC	480 KB

TI-84 Plus Silver Edition

RAM	24 KB
ARC	1,5 MB

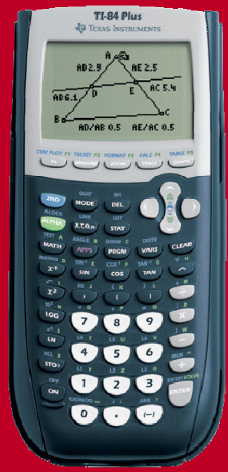
Vooraleer een rekenmachine te resetten kan een backup ervan bewaard worden via de software TI Connect™. TI Connect kan o.a. gratis gedownload worden via www.education.ti.com.

De bedoeling van dit boekje is het aanbieden van een introductie op het gebruik van de TI-84 Plus en de inzetbaarheid in de klas.

De belangrijkste mogelijkheden worden behandeld aan de hand van wiskundige voorbeelden zonder al te veel de nadruk te leggen op de knoppenhistorie.

Daarnaast worden een aantal problemen behandeld om de verschillende benaderingsmethoden voor het oplossen van deze problemen met de TI-84 Plus te tonen.

Ook wordt de werking van enkele applicaties voor de TI-84 Plus getoond, weer met concrete voorbeelden:
Probability Simulation, Transformation Graphing, Inequality Graphing, Cabri™ Junior en EasyData™



Koen Stulens is educational consultant voor Texas Instruments, T^3-instructeur in Vlaanderen en verbonden aan het departement Wiskunde-Natuurkunde-Informatica aan de Universiteit Hasselt (België).

www.education.ti.com/belgie

www.education.ti.com/nederland