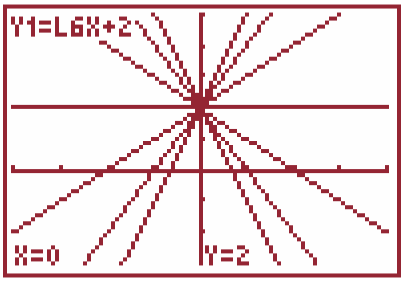
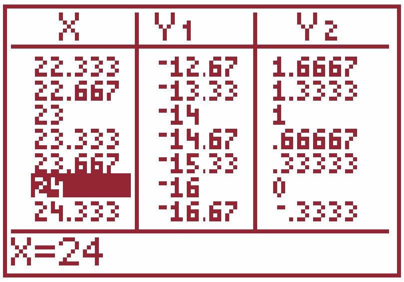
Cahiers T³ Europe
Vlaanderen nr. 6

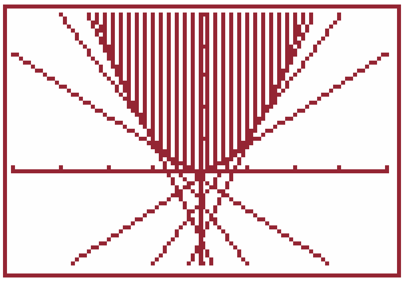
Ontwikkeling van het functiebegrip

in de tweede graad

Walter De Volder







KATHOLIEKE UNIVERSITEIT LEUVEN

Ontwikkeling van het functiebegrip

in de tweede graad

Walter De Volder

T³ EUROPE

ONTWIKKELING VAN HET FUNCTIEBEGRIP
IN DE TWEEDE GRAAD

Inhoud

1. REELE FUNCTIES

Eén van de leerplandoelstellingen i.v.m. reëele functies is:

"In betekenisvolle situaties die kunnen beschreven worden met een functie de samenhang aangeven tussen ***verwoording, het functie- voorschrift, een tabel en een grafiek"***

De ***verwoording*** is de (context)opgave van het probleem (het vraagstuk). De moeilijkste opdracht bestaat erin het *probleem te mathematiseren* door het om te zetten in de taal van de wiskunde (vergelijkingen, ongelijkheden, stelsels,…). Rekentoestellen en computers zijn daar nog niet aan toe.
Door het oplossen van vergelijkingen, ongelijkheden, stelsels,… kan het antwoord op het probleem gevonden worden.
Door *toepassing van ICT* kan men het antwoord ook vinden door gebruik te maken van ***tabellen*** en ***grafieken***.

We passen dit toe op het probleem dat als volgt ***verwoord*** wordt:

"Om op reis te gaan heeft Patricia de keuze tussen de HST-trein met een gemiddelde snelheid van 200 km/u en het vliegtuig met een gemiddelde snelheid van 700 km/u. Gaat ze met het vliegtuig, dan verliest ze één uur tijd bij vertrek en bij aankomst. De tijd om naar het station of het vliegveld te rijden is te verwaarlozen. Met welk vervoermiddel is Patricia het vlugst ter plaats, als ze van Brussel naar Marseille moet (1100 km)? Voor welke afstand zijn de tijden van trein en vliegtuig gelijk?"

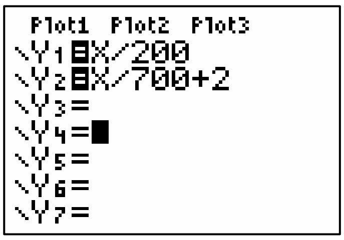
Het probleem mathematiseren komt neer op het opstellen van de ***functievoorschriften*** t(x) en v(x) die voor trein en vliegtuig de tijd (in u) uitdrukt in functie van de afstand x (in km) :

$$t(x) = x / 200 \quad \text{en} \quad v(x) = x / 700 + 2$$

Voor de eerste vraag volstaat het x te vervangen door 1100 in t(x) en v(x):
Zelfs door hoofdrekenen of schatten vindt men dat Patricia het vlugst ter bestemming zal zijn met het vliegtuig. Dit wordt indien nodig bevestigd door t(1100) en v(1100) uit te rekenen.
Voor de tweede vraag moet de vergelijking t(x) = v(x) worden opgelost. De oplossing is x = 560.

We pakken hetzelfde probleem aan d.m.v. ***grafieken***
Druk **Y=** Er verschijnt een lijst van functies *Y1, Y2, Y3, …*

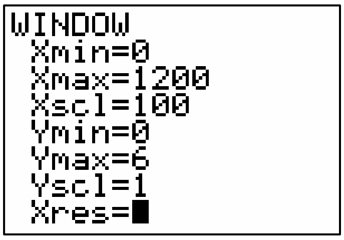
Typ achter *Y1* = het voorschrift **X / 200** en **ENTER**
Y2 = het voorschrift **X/ 700 + 2** en **ENTER**

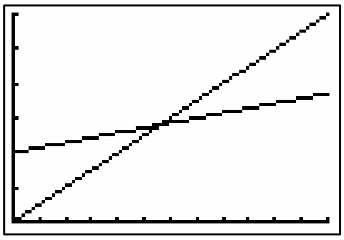


Bemerk dat de gelijkheidstekens van beide functies nu donker gekleurd zijn. Dit betekent dat de functies geactiveerd zijn (grafiek en tabel is mogelijk). Een functie kan gedeactiveerd worden door de cursor naar het gelijkheidsteken te brengen en ENTER te drukken. Op dezelfde manier maakt men van een niet-actieve een actieve functie.

GRAPH en de grafiek van beide functies wordt getekend. Het resultaat is waarschijnlijk niet denderend. Dit komt omdat het zichtbare venster niet goed ingesteld is.
WINDOW en kies nu
Xmin = **0** *Xmax* = **1200** *Xscl* = **100** *Ymin* = **0** *Ymax* = **6** *Yscl* = **1**

Goede waarden kunnen bepalen voor het zichtbaar venster is alleen mogelijk als men het probleem goed begrijpt en inschat. Een goed venster kiezen is van groot belang bij het werken met grafische rekentoestellen.



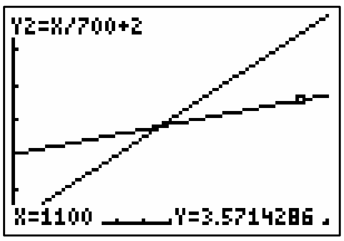


GRAPH en nu ontstaan wel twee duidelijke grafieken. De rechte door de oorsprong is de trein-grafiek, de andere rechte is de vliegtuig-grafiek.

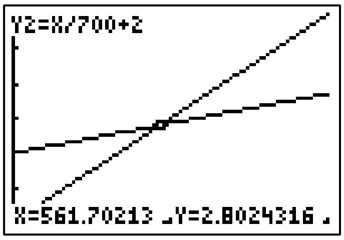
TRACE . Het knipperend vierkantje staat ongeveer in het snijpunt van beide rechten. Met ▸ loopt het vierkantje langs de trein-grafiek.

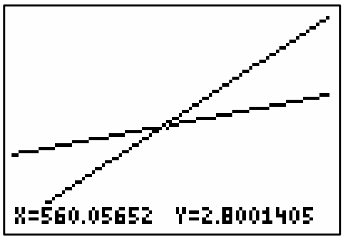
Houd ▸ ingedrukt tot je onder aan X= 1100 afleest (of een waarde dicht erbij) en lees de tijd of Y-waarde af (ongeveer 5,5 u)

Door ▾ komt het vierkantje op de vliegtuig-grafiek en de bijhorende tijd is ongeveer 3,6 u. De eerste vraag is opgelost, het vliegtuig vergt de minste tijd.
Men kan de gewenste X-waarde (hier 1100) ook intikken. Dan gaat het vierkantje onmiddellijk op de juiste plaats staan en de corresponderende Y-waarde wordt aangegeven.



Om de tweede vraag op te lossen moet men het vierkantje naar het snijpunt van de rechten brengen (het meetkundig equivalent van het oplossen van de vergelijking t(x) = v(x)). De bijhorende X-waarde ligt in de buurt van 560 km.





Er bestaan technieken om in te zoemen op een stuk van de grafiek om zo het snijpunt nauwkeuriger te kunnen bepalen. (o.a. met *2:Zoom In* na **ZOOM**; twee maal **ENTER** drukken)

Opmerking: Door **2nd CALC** ontrolt zich een menu;
Kies voor *5: intersect*.
Er wordt gevraagd naar de eerste en de tweede kromme en naar een schatting voor de abscis van het snijpunt.

Daarna geeft het toestel een numerieke waarde voor de coördinaten van het snijpunt.

Met hetzelfde CALC-menu kan men functiewaarden, nulpunten, extremen, afgeleiden en integralen berekenen van willekeurige functies.

Tenslotte pakken we het probleem aan met ***tabellen.***
2nd TBLSET   Er verschijnt een *TABLE SETUP* menu.
Vul achter   *TblStart=* of *TblMin=* de beginwaarde voor X in, hier **0**
Vul achter   *△Tbl =*   de stap in, hier **100**
Op de derde en vierde lijn moet de keuze keuze op *Auto* staan
2nd TABLE   Er verschijnt een tabel die voor X-waarden vanaf 0 en met stappen van 100 de overeenkomstige waarden geeft voor de functies Y1 en Y2.

TABLE SETUP
TblStart=0
△Tbl=100
Indpnt: Auto Ask
Depend: Auto Ask

X	Y1	Y2
900	4.5	3.2857
1000	5	3.4286
1100	5.5	3.5714
1200	6	3.7143
1300	6.5	3.8571
1400	7	4
1500	7.5	4.1429

X=1100

Stel vast dat voor X=1100 de trein-waarde 5,5 is en de vliegtuig-waarde 3,57. De eerste vraag is hiermee beantwoord.

Stel vast dat voor X=500 de trein vlugger is dan het vliegtuig en dat voor X= 600 het vliegtuig het vlugst is.

Nu gaan we inzoomen op de tabel.

2nd TBLSET
Invullen *TblStart* = **500** of *TblMin* = **500** (als het al niet zo is)
Δ*Tbl* = **10**
2nd TABLE

Nu staan alle tijden vermeld per 10 km. Stel vast dat voor X= 560 beide tijden gelijk zijn. Dit is het antwoord op de tweede vraag.

X	Y1	Y2
530	2.65	2.7571
540	2.7	2.7714
550	2.75	2.7857
560	2.8	2.8
570	2.85	2.8143
580	2.9	2.8286
590	2.95	2.8429

X=560

Indien nodig kan men nog verder inzoomen op de tabel.

OPGAVE

Carla heeft een auto met een benzinetank van 60 liter. Haar auto verbruikt 7 liter per 100 km. De auto van Patricia heeft een tank van 50 liter en verbruikt slechts 6 km per 100 km. Beide tanks zijn vol.

- Stel voor beide auto's het voorschrift op dat de inhoud van de tank uitdrukt (in liter) in functie van de afstand (in km).
- Maak een grafiek van beide functies op één tekening.
- Maak een tabel van beide functies.
- In beide auto's gaat een lichtje branden zodra er minder dan 5 liter benzine in de tank is. Bepaal (met grafiek en tabel) na hoeveel km dit het geval is.
- Na hoeveel km zijn de tanks leeg ? (met tabellen bepalen)
- Na hoeveel km bevatten beide tanks evenveel benzine (te bepalen door berekening en met de grafieken)

2. GRAFIEK VAN FAMILIES VAN FUNCTIES

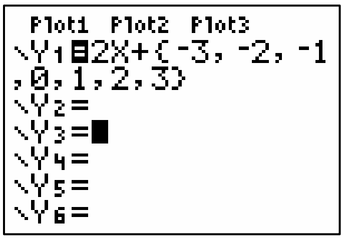
In de volgende voorschriften staat een parameter m. Voor elke waarde van m krijg je een ander voorschrift en een andere grafiek. Zo krijgen we dus families van functies en van grafieken. Teken met behulp van een grafische rekenmachine een zevental grafieken van elke familie, door m te laten veranderen van –3 tot 3 met stappen van 1. Bepaal daarna het gemeenschappelijk kenmerk van elke familie grafieken.

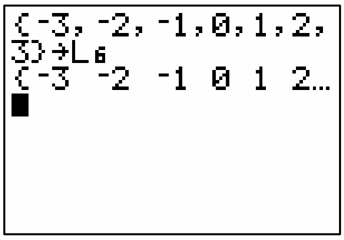
1. y = 2x + m 3. y = mx + (3m+3)

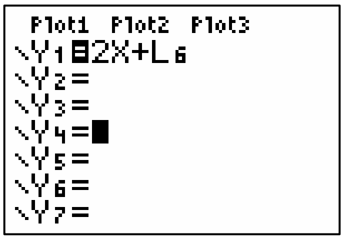
2. y = mx + 2 4. y = mx – m²/4

Men kan telkens de 7 functies in één keer inbrengen

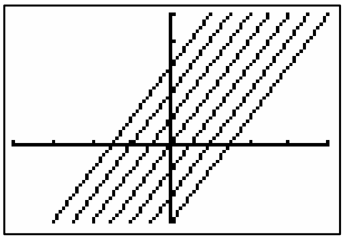
1. *Y*= **2X + { -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3}** of
Y= **2X + L6** na **intypen** van **{-3,-2,-1,0,1,2,3} STO ▶ 2nd L6**





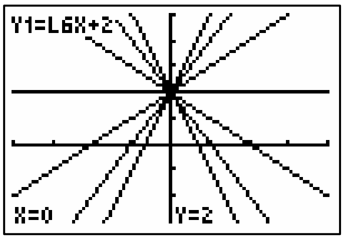


Door **GRAPH** komen 7 evenwijdige rechten op het scherm
Neem bv. als **WINDOW** : **-4, 4, 1, -3, 5, 1**



2. *Y*= **{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 }X + 2** of *Y*= **L6 X + 2**

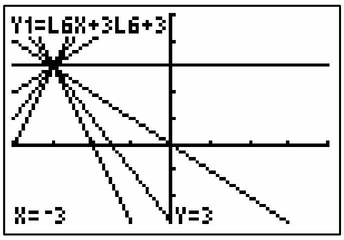
Door **GRAPH** komen 7 rechten door het punt (0,2) op het scherm



3. Y= **{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3}X + 3{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3} + 3**

of Y= **L6 X + 3 L6 + 3**

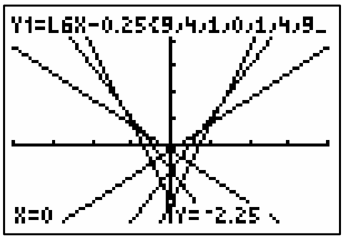
Door GRAPH komen 7 rechten door het punt (-3,3) op het scherm

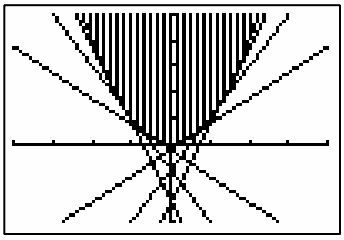


4. Y= **{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3}X – 0.25 {9, 4, 1, 0, 1 ,4 ,9}**

of Y= **L6 X – 0.25 {9, 4, 1, 0, 1, 4, 9}**

Door GRAPH komen 7 rechten op het scherm. Het zijn raaklijken aan de parabool y = x^2 in het punt met abscis m/2.





Op die manier kan men eenvoudig de invloed nagaan van de verschillende parameters bij de studie van

rechten	y = ax +b
parabolen	y = a(x-p)² + q
sinusoïden	y = a sin[b(x-c)] + d

Parameterinvloeden kunnen ook eenvoudig worden bestudeerd met de Flash-applicatie "T*ransformation Graphing*". We verwijzen hiervoor naar

1) Het document van Koen Stulens op http://www.uhasselt.be/scholennetwerk/wiskunde/index.html → nascholingen→applicaties →transformation graphing

2) Het document van Hans Bekaert op www.t3vlaanderen.be →symposia →Oostende 2004→het gebruik van flashapplicaties in de wiskundeles.

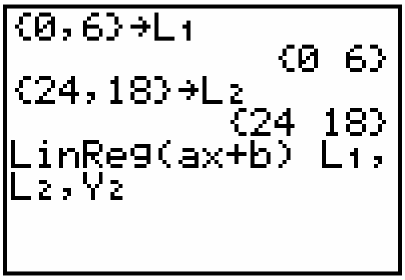
3. BRANDENDE KAARSEN

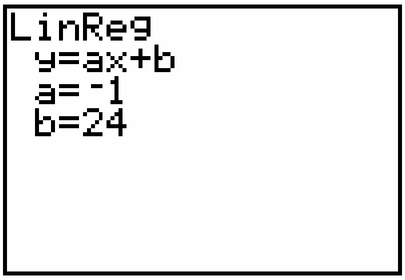
Twee kaarsen worden allebei om 18 uur aangestoken. Van de eerste kaars is na 4 uur branden nog 24 cm over en na 5 uur nog 22 cm. De tweede kaars is 24 cm lang en na 6 uur is er nog 18 cm van over.

1. Stel voor beide kaarsen een eerstegraadsfunctie op waarmee het opbranden kan beschreven worden. Doe de berekeningen zelf voor de eerste kaars en laat de GRM dat doen voor de tweede kaars. Stel t = 0 om 18 uur.

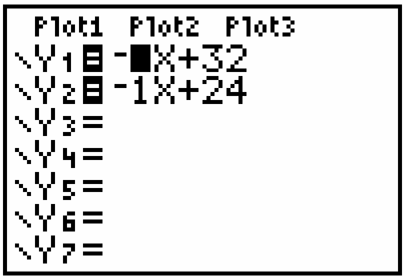
Eerste kaars: rico van de grafiek:
één punt van de grafiek is bijvoorbeeld (,)
vergelijking van de rechte: (y = - 2x + 32)

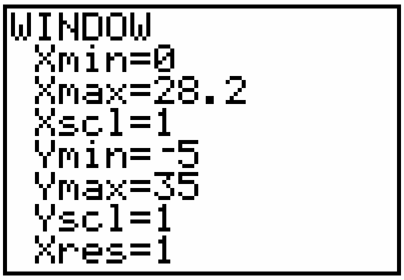
Tweede kaars: via lineaire regressie stellen we de vergelijking op van de rechte door de punten (0,24) en (6,18).

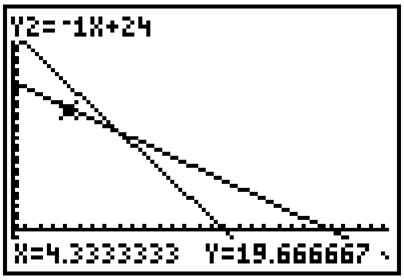


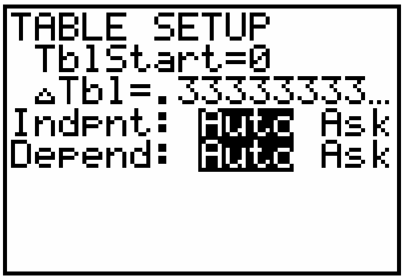


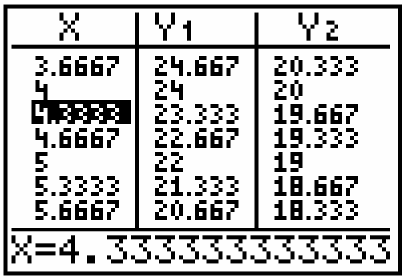
2. Stel via de grafiek vast hoe lang de tweede kaars zal zijn om 22.20 h. Stel via de tabel vast hoe lang de eerste kaars nog zal zijn op hetzelfde tijdstip.



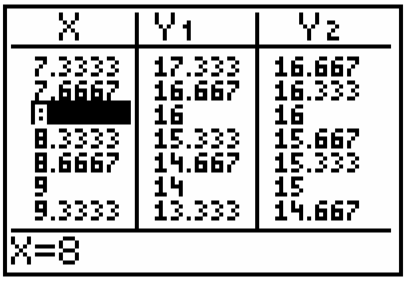






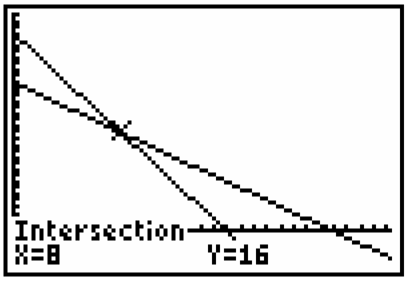


3. **Stel via de tabel vast na hoeveel tijd beide kaarsen even lang zullen zijn. Doe hetzelfde via de grafieken.**



X	Y1	Y2
7.3333	17.333	16.667
7.6667	16.667	16.333
8	16	16
8.3333	15.333	15.667
8.6667	14.667	15.333
9	14	15
9.3333	13.333	14.667

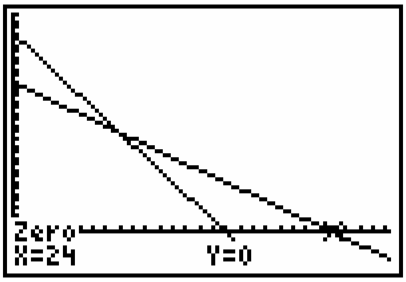
X=8

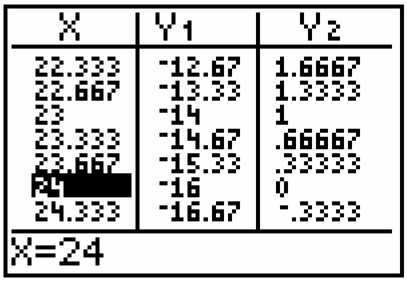


4. **Bereken zelf hoe lang de eerste kaars zal branden. Ga met de GRM na hoe lang de tweede kaars zal branden.**

Eerste kaars: = 0 (16 uur)

Tweede kaars:





X	Y1	Y2
22.333	⁻12.67	1.6667
22.667	⁻13.33	1.3333
23	⁻14	1
23.333	⁻14.67	.66667
23.667	⁻15.33	.33333
24	⁻16	0
24.333	⁻16.67	⁻.3333

X=24

5. **Schets de tijd-lengte grafiek van een kaars die kegelvormig is.**

4. HEIPAAL
(meetkundige rij; exponentiële groei)

Een heimachine slaat een paal van 1000 cm in de grond. Bij de eerste klap gaat de paal 200 cm in de grond. Bij elke volgende slag gaat de paal 20% minder verder de grond in dan bij de vorige slag. Schrijf een programma voor TI-83/84 Plus waardoor het inslaan van de paal gevisualiseerd wordt.

Het deel van de paal dat na n slagen boven de grond uitsteekt wordt gegeven door:

$$L_n = 1000 - 200(1 + 0.8 + 0.8^2 + 0.8^3 + \ldots + 0.8^{n-1})$$
$$= 1000 - 1000(1 - 0.8^{n}) = 1000[1 - (1 - 0.8^n)]$$

Programma HEIPAAL1 begint met een lijnstuk (paal) te tonen met lengte 1000. Met telkens een korte onderbreking wordt een korter lijnstuk geplot en zo wordt het inslaan van de paal gesimuleerd. WINDOW: [0, 16] x [-150,1100]; Xscl = 1; Yscl = 100.
De onderbrekingen worden bekomen door de instructie For(I, 0, 500, 1). Dit is een goede keuze voor de TI-83 Plus Silver. Voor tragere toestellen neemt men best een kleiner getal dan 500. Neem 300 voor TI-83 Plus.
Programma HEIPAAL2 doet hetzelfde en voegt er op het einde nog een grafiek aan toe waarin de paal in elk van haar standen wordt afgebeeld. Hier ziet men duidelijk de exponentiële afname. Via **2nd DRAW 3: Horizontal** kan men een verplaatsbare horizontale rechte aanbrengen en zo bij benadering aflezen hoe ver de paal na elke slag nog boven de grond uitsteekt (fig.1). De exacte waarden vindt men terug in L1 (fig.2).

HEIPAAL1

```
: ClrHome
: ClrDraw
: FnOff
: For(X, 0, 15, 1)
: 1000 (1 - (1 - .8 ^ X ) ) → L
: Line(8, 0, 8, L)
: For(I, 0, 500, 1)
: End
: ClrDraw
: End
```

HEIPAAL2

```
:ClrHome
:ClrDraw
:FnOff
:For(X, 1, 16, 1)
:1000 (1 - (1-.8^ (X-1))) → L1(X)
:Line(8, 0, 8, L1(X))
:For(I, 0, 500, 1)
:End
:ClrDraw
:End
:ClrDraw
:For(X, 1, 16, 1)
:Line(X, 0, X, L1(X))
:End
```

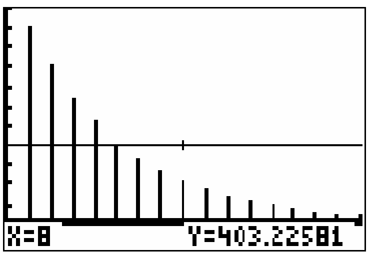


fig. 1

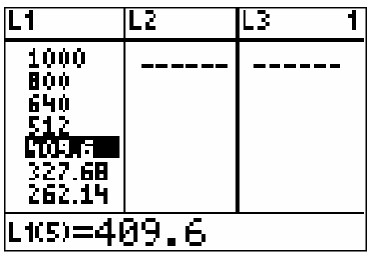


fig. 2

5. DE MEERWAARDE VAN ICT
(Met dank aan Luc Gheysens, vakbegeleider wiskunde)

Heel wat begrippen kan men op een visuele manier aanbrengen bij de leerlingen. In de eerste drie leerjaren heeft een leerkracht heel wat kansen om het functiebegrip te laten groeien bij de leerlingen.
ICT is hiervoor de geschikte partner.
Wat leerlingen hebben gezien (ingezien), beklijft beter.

Voorbeeld 1

Uit een leerboek van de eerste graad:
Sarah maakt een fietstocht. Als ze éénmaal haar trappers ronddraait, dan heeft ze 5 m afgelegd.
Vul de tabel verder aan :

aantal toeren (n)	0	50	100	200	…..	500
afstand s (in m)	…	…	….	….		…..

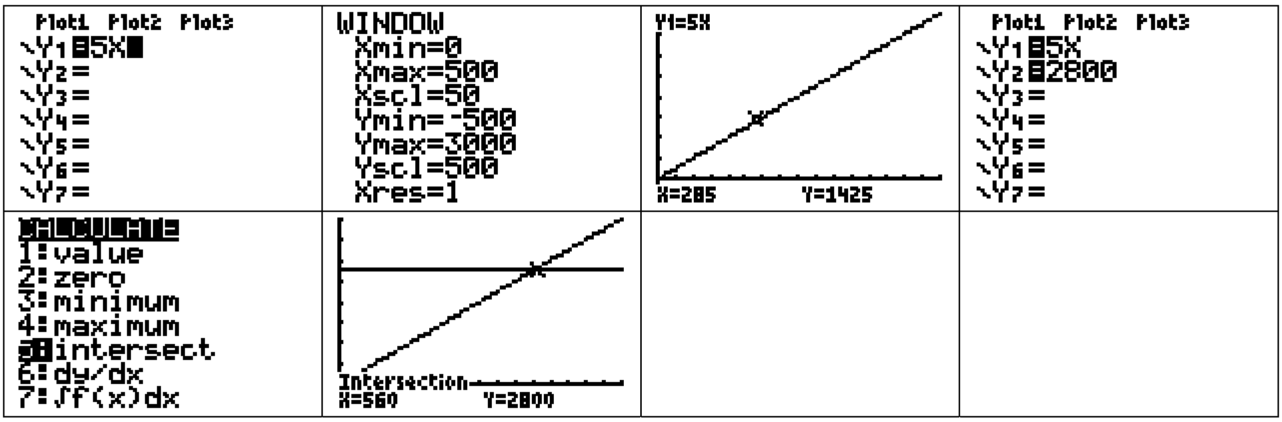
- Formule

Zoek de passende formule

afstand (in m) = 5 . aantal toeren *(woordformule)* of $s = 5.\ n$

- Grafiek

Teken een grafiek.
Lees op de grafiek af hoeveel meter Sarah heeft afgelegd als ze haar trappers 285 maal heeft rondgedraaid.
Lees op de grafiek af hoeveel maal Sarah de trappers rondgedraaid heeft als ze 2 800 m heeft afgelegd.



Voorbeeld 2

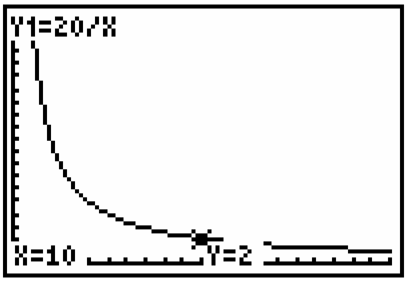
Van een reeks driehoeken is het maatgetal van de oppervlakte gelijk aan 10.
Noteer een formule die het verband aangeeft tussen basis en hoogte van deze driehoeken.
Kies een passende vensterinstelling en teken een grafiek van dit verband.
Zet de hoogte uit t.o.v. de basis.
Bereken de waarde(n) waarbij de basis gelijk is aan de hoogte en controleer op de grafiek.
Schets de grafiek in je werkschrift. Hoe verloopt de grafiek?

Oplossing:

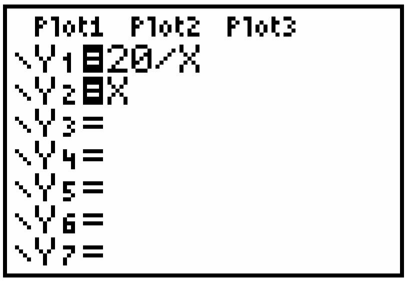
basis . hoogte = 20 $\Rightarrow$ hoogte = $\frac{20}{\text{basis}}$.

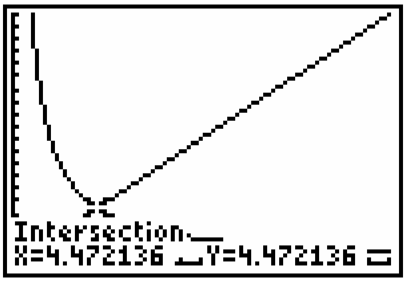
In machinetaal: y = $\frac{20}{x}$

Grafiek:



Basis = hoogte en basis . hoogte = 20 $\Rightarrow$ basis = $\sqrt{20}$
Controle op de grafiek:





Voorbeeld 3
OPLOSSINGEN VAN VERGELIJKINGEN EN ONGELIJKHEDEN

VERGELIJKINGEN VAN DE EERSTE GRAAD	EERSTEGRAADSFUNCTIES
Los op: 2 x + 5 = 0	Stel f(x) = 2 x + 5 Bepaal het **nulpunt** van f(x) Hoe? ➢ algebraïsch ➢ grafisch : grafiek tekenen; [CALC] [ZERO] ➢ in tabel

Los op: 2 x + 5 = 8 – 3x	Stel f(x) = 2x + 5 en g(x) = 8 – 3x Wanneer is **f(x) = g(x)**? Hoe? ➢ algebraïsch ➢ grafisch: grafieken tekenen; [CALC] [INTERSECT] ➢ in tabel (eventueel via invoeren van f(x) – g(x))
Los op: 2 x + 5 = 17	Stel f(x) = 2 x + 5 Voor welke **waarde van x** is f(x) = 17? Hoe? ➢ algebraïsch ➢ grafisch: grafiek tekenen + grafiek van y = 17; [CALC] [INTERSECT] ➢ in tabel

Voorbeeld 4

In 1995 hebben de U.S. National Institutes of Health en de American Health Foundation nieuwe richtlijnen uitgegeven die het ideale, gezonde lichaamsgewicht definiëren als een Body Mass Index (BMI) onder de 25.
In een studie bleek dat 59% van de Amerikanen boven deze norm zat.

$$BMI = \frac{lichaamsgewicht\ in\ kg}{kwadraat\ van\ \ lichaamslengte\ in\ m}.$$

Mannen	Vrouwen	Gezondheidsrisicofactor
minder dan 20,7	minder dan 19,1	Te laag. Hoe lager uw BMI, hoe groter het risico
20,7 tot 26,4	19,1 tot 25,8	Normaal, laagste risico
26,5 tot 27,8	25,9 tot 27,3	Enigszins te zwaar, enig risico
27,9 tot 31,1	27,4 tot 32,2	Overgewicht, riskant
31,2 tot 45,4	32,3 tot 44,8	Zwaar overgewicht, hoog risico
groter dan 45,4	groter dan 44,8	Morbide obesitas, zeer hoog risico

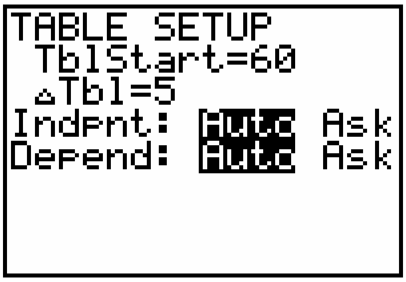
Probleem. *Hoe zal mijn BMI variëren als mijn gewicht verandert?*

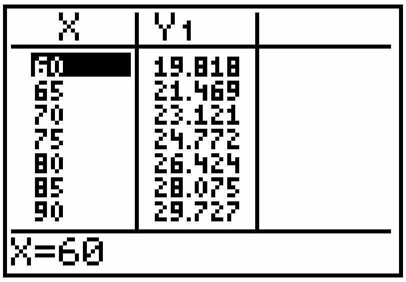
Oplossing (met behulp van een grafisch rekentoestel).

STAP 1. Stel het juiste functievoorschrift op : $y = \frac{x}{1{,}74^2}$

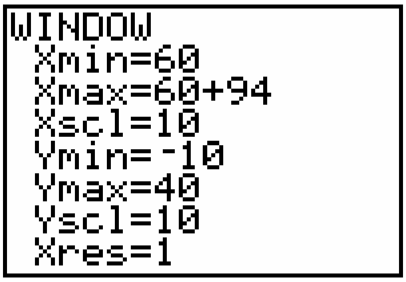
(bij een lichaamslengte van 1,74 m).

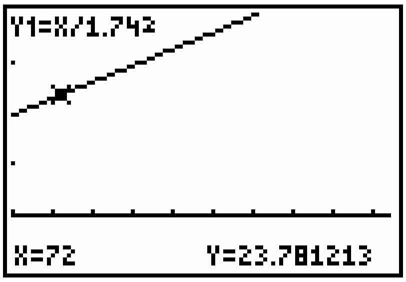
STAP 2. Stel een waardentabel op.

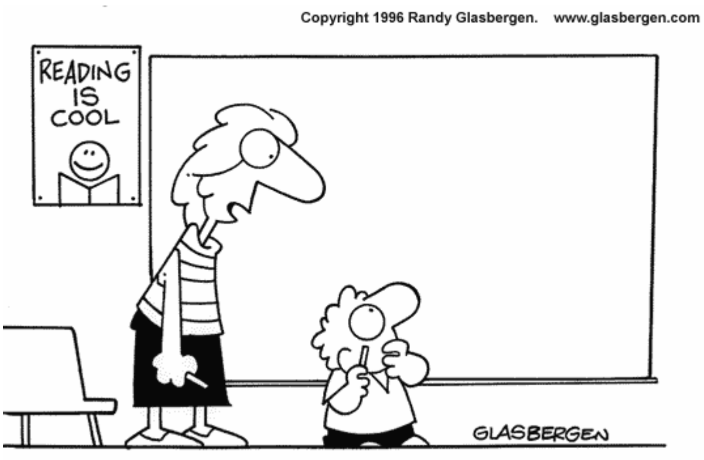




STAP 3. Schets een grafiek (in een passend venster).







Hier zijn geen ikoontjes om aan te klikken. Dit is een krijtbord!

6. MET DE FIETS, BROMMER of AUTO

Bart vertrekt per fiets voor een tocht van 150 km. Hij rijdt met een gemiddelde snelheid van 24 km/u. Een uur later rijdt Steven hem met de brommer achterna met een snelheid van 40 km/u. Nog een uur later volgt Carla dezelfde weg per auto met een snelheid van 60 km/u.

1. *Bij elke rit is de afgelegde weg s (in km) een functie van de tijd (in minuten). Stel die functies op. Maak een tabel en een grafiek van de drie functies op één tekening.*

2. *In welke volgorde steken ze elkaar voorbij? Bepaal de exacte tijdstippen.*
   Wanneer komen zij aan?

3. *Bepaal de volgorde van doorkomen aan de controleposten na 40 km en na 90 km.*
   In welke volgorde bevinden de drie zich na 90 min. en na 180 min.?

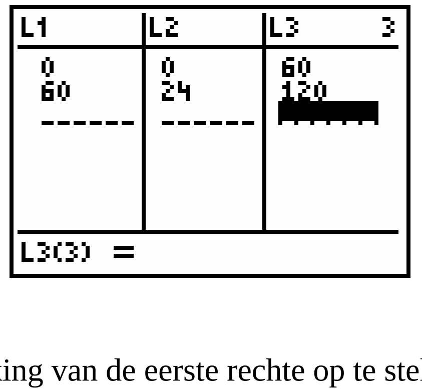
De s/t - grafieken van eenparige bewegingen zijn rechten. Het rekentoestel kan de vergelijking van een rechte door twee punten opstellen. Op het moment dat Bart vertrekt stellen we t = 0 en s = 0. Afstanden drukken we uit in km. en tijden in min.

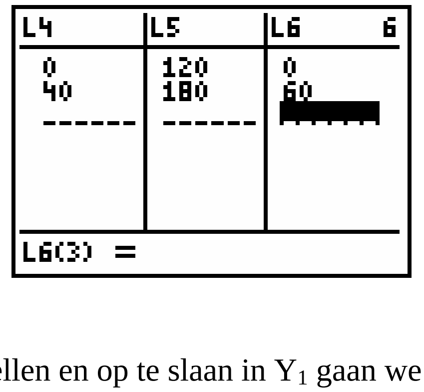
Tot de grafiek van de fietser behoren de punten: (0, 0) en (60, 24)
Tot de grafiek van de brommer behoren de punten: (60, 0) en (120, 40)
Tot de grafiek van de automobiliste behoren de punten: (120, 0) en (180, 60)

Breng de abscissen (ordinaten) van de punten van de eerste rechte in de lijsten L_1 (L_2).

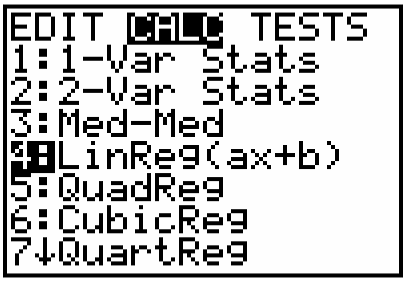
(MEM 4: ClrAllLists) (STAT 1:Edit) *de tweede rechte in de lijsten L_3 (L_4).*

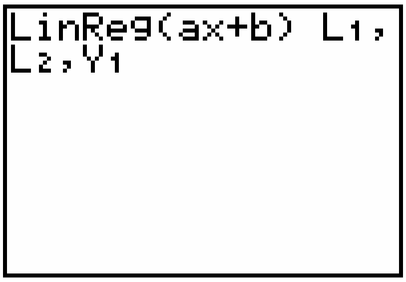
de derde rechte in de lijsten L_5 (L_6).

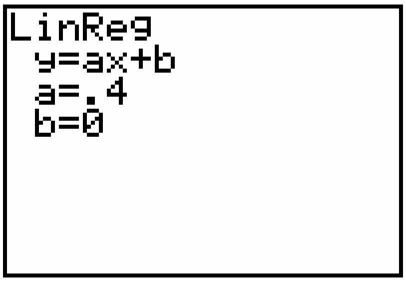




Om de vergelijking van de eerste rechte op te stellen en op te slaan in Y_1 gaan we als volgt te werk**: STAT CALC 4:LinReg(ax+b) ENTER en aanvullen met L_1, L_2, Y_1 en ENTER. (Let op: Y_1 via VARS Y-vars 1:Function 1:Y_1 en ENTER)**

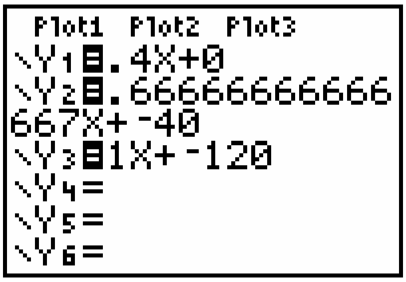


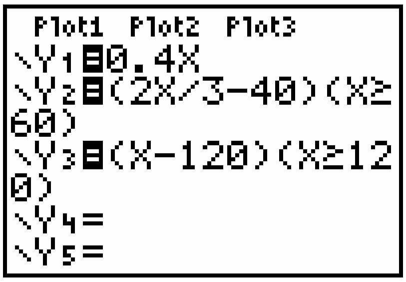




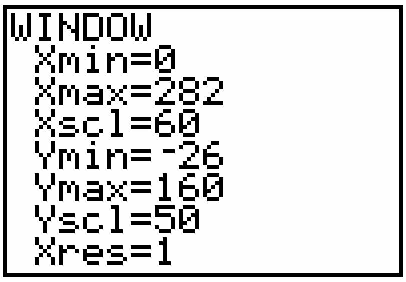
Druk Y= en stel vast dat de vergelijking van de rechte opgeslagen is in Y_1.
Bepaal analoog de vergelijking van de tweede rechte (uitgaande van L_3 en L_4) en breng die onder in Y_2. Breng analoog de vergelijking van de derde rechte in Y_3.

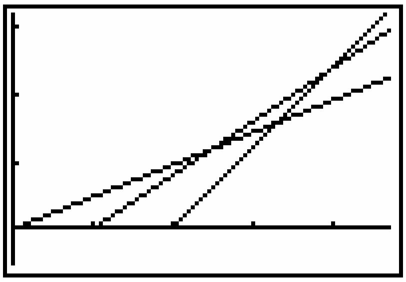
Het functiescherm (Y=) vindt je in het linkerscherm hieronder. Omdat Steven pas vertrekt op t = 60 en Carla op t = 120, herwerken we het functiescherm tot rechts hieronder.



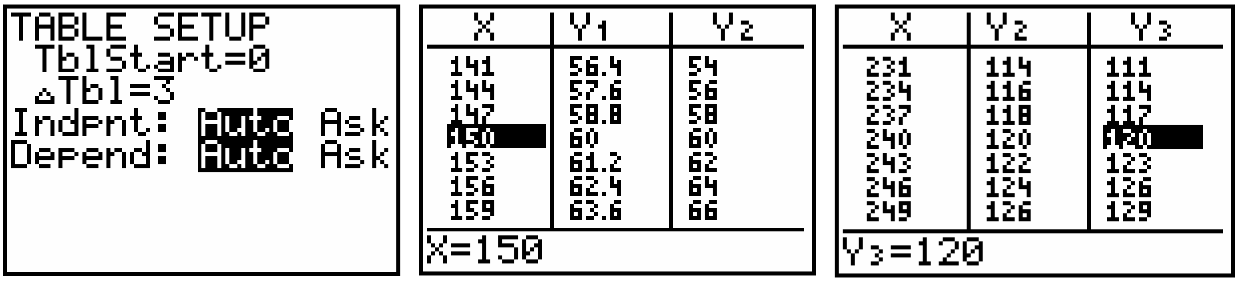


Vooraleer de grafieken in het display te brengen, denken we even na over het WINDOW. Als X_{max} - X_{min} = 94-voud bekomt men 'mooie' waarden voor de abscissen van de punten als men via TRACE een grafiek doorloopt. Hetzelfde geldt voor de ordinaten als Y_{max} - Y_{min} = 62-voud. ZOOM 4:Zdecimal is een voorbeeld van een venster dat aan deze 94 x 62 - regel voldoet. Daar is X_{max} - X_{min} = 9.4 en bij TRACE verspringt X per 0.1. Als X_{max} - X_{min} = 282 = 30 x 9.4 dan verspringt X per 3. Deze overweging brengt ons tot volgend **WINDOW**. Door **GRAPH** komen de drie grafieken in beeld.



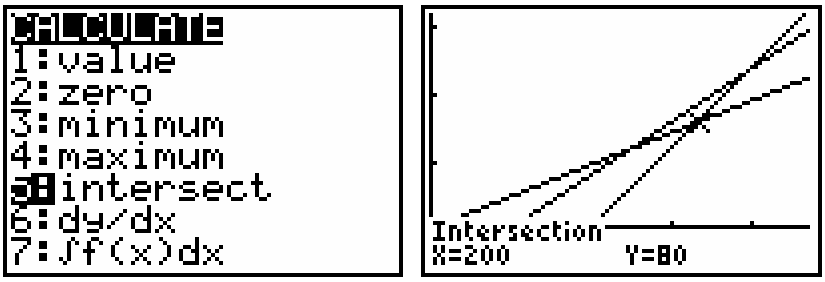


Stel een tabel in via **TBLSET**. Door **TABLE** ontstaat de tabel die men kan doorlopen.
In de twee volgende tabelschermpjes ontdekken we dat op het tijdstip t = 150 de brommer de fietser inhaalt aan km 60, en op tijdstip t = 240 de auto de brommer inhaalt aan km 120.

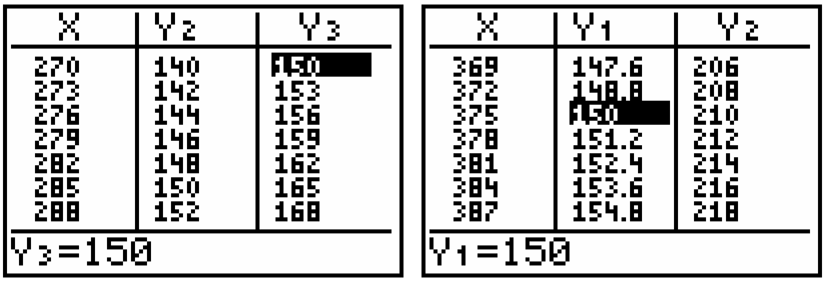


Keer nu terug naar de grafiek (**GRAPH**). Stel vast dat eerst de brommer de fietser inhaalt, daarna haalt de auto de fietser in en tenslotte steekt de auto de brommer voorbij. Met **TRACE** kan je ongeveer bepalen wanneer die inhaalmanoeuvres gebeuren.

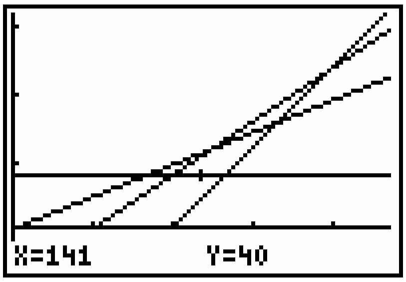
Om het tijdstip te bepalen waarop de auto de fietser inhaalt, voeren we **CALC 5:intersect** uit op de grafieken van de eerste en de derde functie. (Antwoord: op tijdstip t = 200 aan km 80)

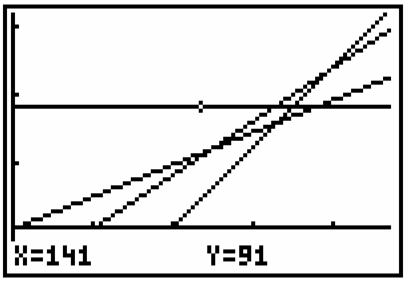


Wanneer elk van de drie aankomt (aan km 150 is dat) kan hier ook via de tabellen bepaald worden. De auto komt aan na 270 min, de brommer na 285 min en de fietser na 375 min.



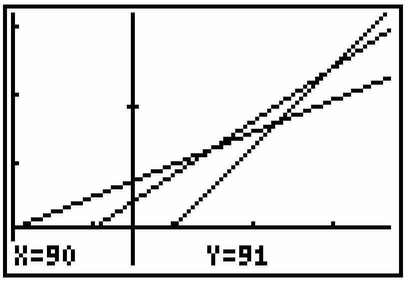
Om te bepalen in welke volgorde de drie passeren aan controleposten aan km 40 en km 90, brengen we een beweegbare horizontale rechte aan.
Door **GRAPH** eerst de grafieken weer in beeld brengen. Door **DRAW 3: Horizontal** wordt een horizontale rechte bijgetekend die men met de pijltjestoetsen ▲ en ▼ op en neer kan bewegen.

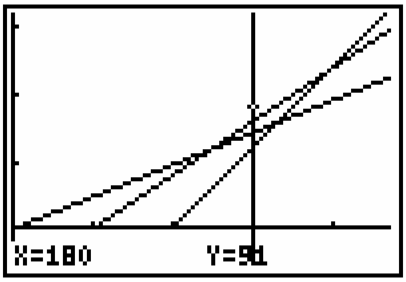




Aan km 40 is de volgorde van doorkomen: fietser, brommer, auto
Aan km 90 is de volgorde van doorkomen: brommer, auto, fietser.

Om de situatie te bepalen op willekeurige tijdstippen brengen we een beweegbare verticale rechte aan: **DRAW 4:Vertical**. (met ◀ en ▶ kan je de verticale verplaatsen)



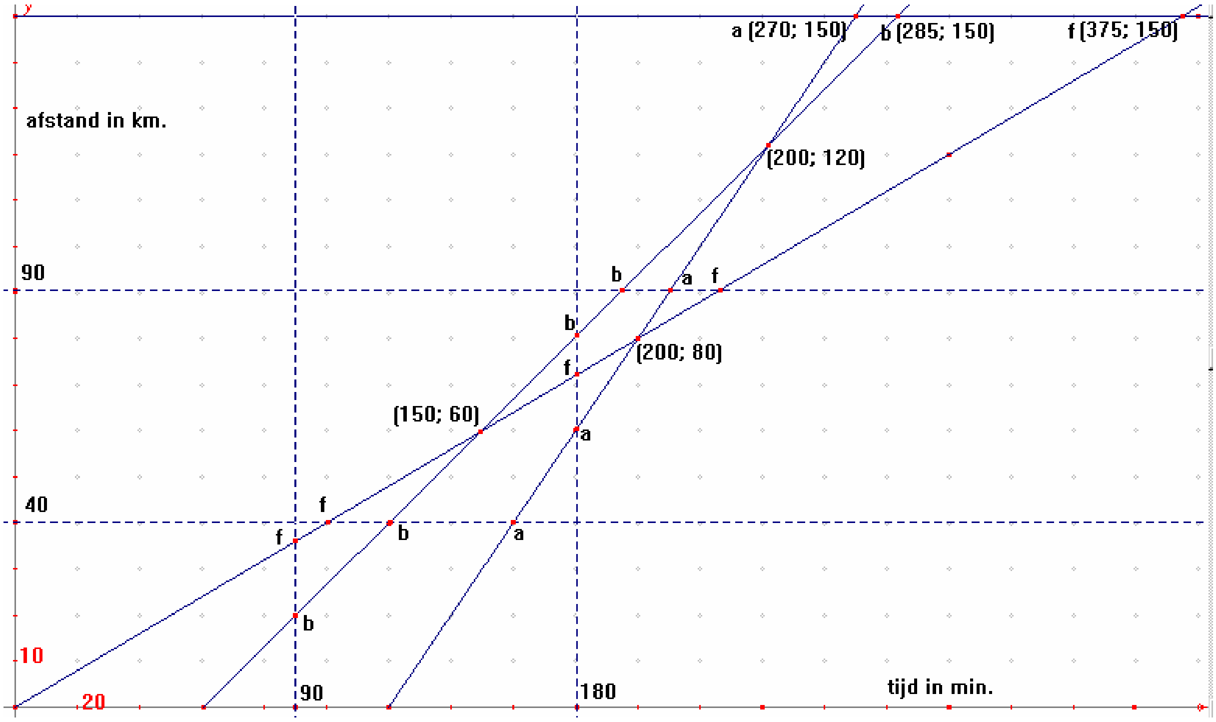


Na 90 minuten ligt de fietser voor op de brommer; de auto is nog niet vertrokken.
Na 180 minuten ligt de brommer voor op de fietser; de fietser ligt voor op de auto.

Noot

Het is wellicht aangewezen de ingebrachte functies weg te schrijven naar een GDB (grafic data base, grafisch gegevensbestand). Dit gebeurt via **DRAW STO 3:StoreGDB**. Door StoreGDB aan te vullen tot **StoreGDB1** en **ENTER** worden de functies en het ingestelde WINDOW weggeschreven naar GDB1. Er zijn 10 GDB's beschikbaar: van 0 tot 9. Door **RecallGDB1** kan men de functies terug oproepen.

Grafische oplossingsmethode (figuur met Cabri)



Algebraïsche oplossingsmethode

Bewegingsvergelijking van de fiets y = 0.4 x
(rechte door 2 punten) brommer y = ✍ x - 40
auto y = x - 120

De brommer haalt de fiets in als 0.4 x = ✍ x - 40 (Opl. x = 150)
De auto haalt de fiets in als 0.4 x = x - 120 (Opl. x = 200)
De auto haalt de brommer in als ✍ x - 40 = x - 120 (Opl. x = 240)

De fiets komt voorbij aan km 40 (90) als 0.4 x = 40 (90) (Opl. x = 100 (225))
De brommer komt voorbij aan km 40 (90) als ✍ x - 40 = 40 (90) (Opl. x = 120 (195)
)
De auto komt voorbij aan km 40 (90) als x - 120 = 40 (90) (Opl. x = 160 (210))

De fietser komt aan als 0.4 x = 150 (Opl. x = 375)
De brommer komt aan als ✍ x - 40 = 150 (Opl. x = 285)
De auto komt aan als x - 120 = 150 (Opl. x = 270)

7. KOSTEN- EN OMZETFUNCTIES

Een bedrijf produceert x beeldschermen per week.

De kostenfunctie k(x) (in 25 euro) wordt gegeven door het meervoudig voorschrift:

$$k_1(x) = -x^2 + 30x + 80 \qquad \text{voor} \quad x \in [0,15]$$
$$k_2(x) = 1.75x^2 - 52.5x + 698.75 \qquad \text{voor} \quad x \in]15,30]$$

De omzetfunctie o(x) (in 25 euro) wordt gegeven door $o(x) = 25x$

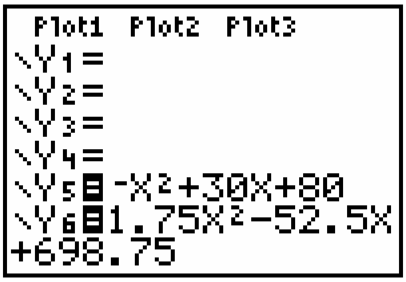
4. *Bepaal het break-even punt (het productiecijfer waarbij er noch winst noch verlies is) vanuit de grafiek en vanuit de tabel van k(x) en o(x)*

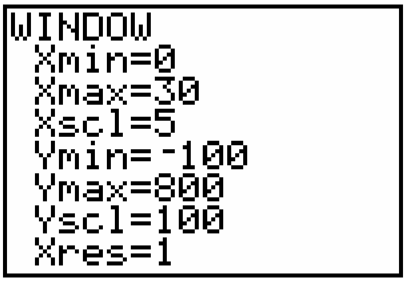
5. *Voer een winstfunctie w(x) in. Voor welke productie is de winst en het verlies maximaal?*

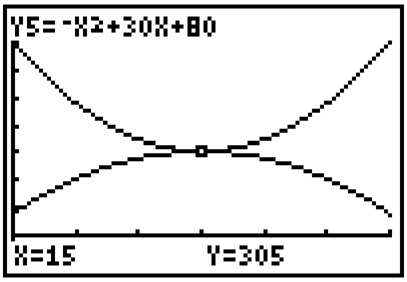
6. *Stel een functie op voor de winsttoename $\triangle w(x)$ als $\triangle x = 1$*
   Bepaal via de tabel voor $\triangle w(x)$ wanneer de winsttoename maximaal is. Verklaar dit vanuit de grafieken van k(x) en o(x). Constateer dat naar het einde toe de winst sterk afneemt. Verklaar dit vanuit de grafieken voor k(x) en o(x).

We construeren eerst de grafiek van de beide onderdelen van de kostenfunctie k(x).

Breng de functie $k_1(x)$ in Y_5 en $k_2(x)$ in Y_6.
Kies het WINDOW zoals in onderstaande schermafdruk.
Laat de grafieken van Y_5 en Y_6 in beeld komen.





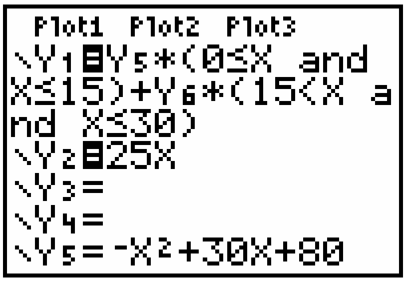


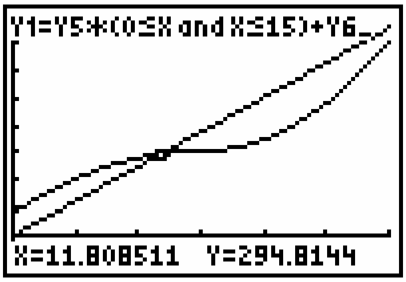
De grafieken laten ons vermoeden dat beide parabolen dezelfde top hebben.
Controleer (formule -b/2a) dat de abscis van beide toppen 15 is.
Reken na met het rekentoestel dat $Y_5(15) = Y_6(15) = 305$.
(VARS Y-VARS 1:Function 5: Y_5 , aanvullen tot $Y_5(15)$ en ENTER)

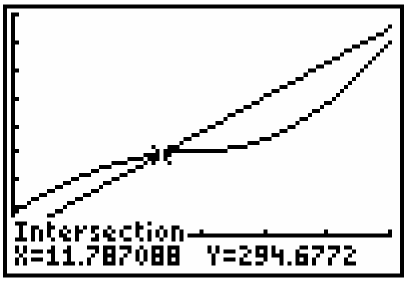
We brengen de kostenfunctie k(x) in onder Y_1 en de omzetfunctie o(x) onder Y_2.
(hoe dit moet voor Y_1 leer je in de les)

Deactiveer Y_5 en Y_6 en laat de grafieken van kosten- en omzetfunctie in beeld komen. Bepaal (via TRACE) het break-even punt, d.w.z. het productiecijfer waarvoor er noch winst noch verlies is. **(Het situeert zich tussen 11 en 12)**

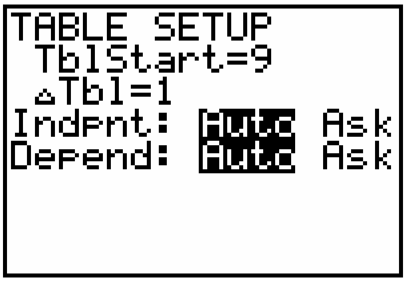
Bepaal het snijpunt exact. **(Via CALC 5: intersect)**

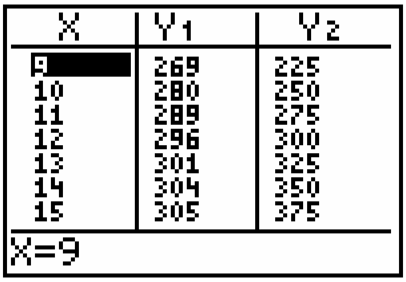




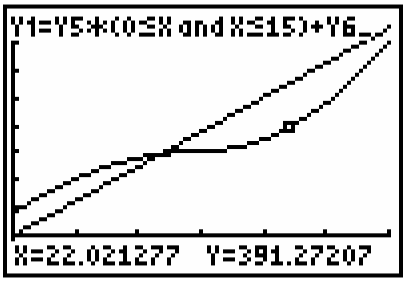


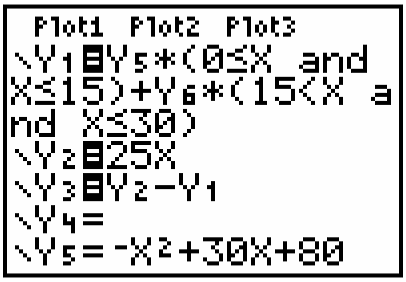
Stel een tabel op voor x gaande van 1 tot 30.
Leid ook hieruit af dat het break-even punt tussen 11 en 12 ligt.

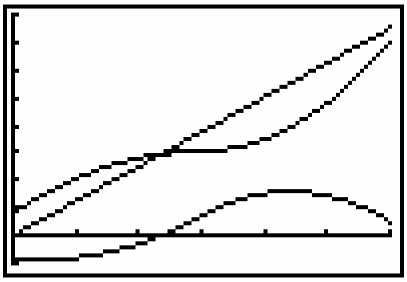




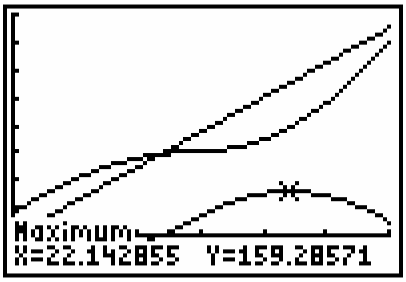
Doorloop met TRACE de kostenfunctie. Schat voor welke productie de winst maximaal is.
Breng de winstfunctie w(x) = o(x) - k(x) = Y_2 - Y_1 in onder Y_3.
Breng de grafieken van kosten, omzet en winst in beeld.

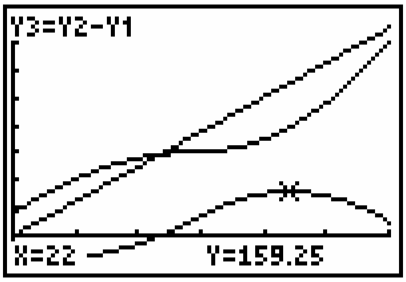


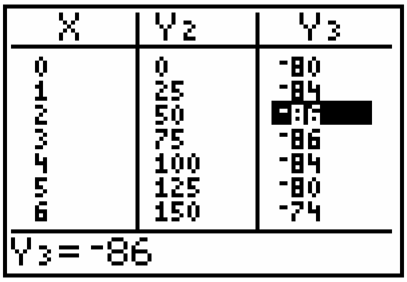




Bepaal via CALC 4: maximum, de waarde van x waarvoor w(x) maximaal is. ***(22.142858)***
Bepaal de winst voor x = 22 en x= 23: 1) via TRACE door de waarden 22 en 23 in te typen; 2) door Y_3(22) en Y_3(23) te berekenen. ***(159.25 en 158)***
Bepaal via de tabel voor Y_3 voor welke productie het verlies maximaal is.
(voor x=2 en x=3 is het verlies maximaal w(x) = - 86)

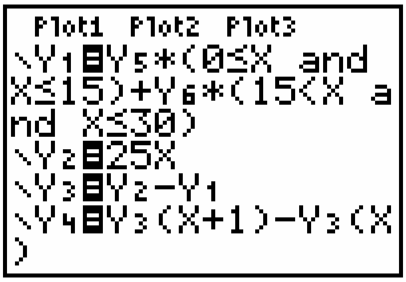


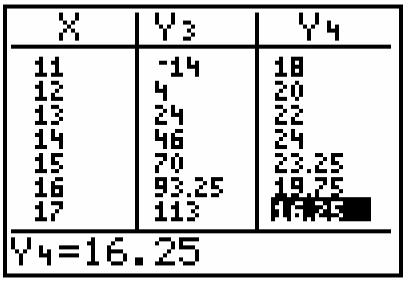


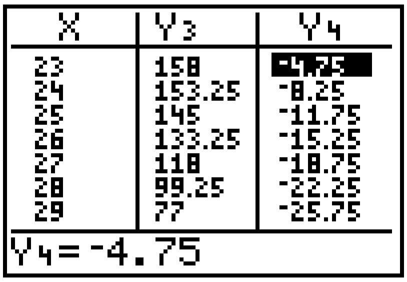


In Y_4 voeren we de functie $\triangle w(x)$ in die weergeeft hoe de winst verandert als de productie met 1 toeneemt: $Y_4 = Y_3 (X + 1) - Y_3 (X)$.
Vb. : $Y_4(14) = Y_3(15) - Y_3(14)$, dus de winsttoename als de productie van 14 naar 15 gaat.

Stel vast via de tabel van $\triangle w(x)$ dat de winsttoename maximaal is bij overgang van 14 naar 15 eenheden en nog aanzienlijk is voor x = 13 en x = 15.
(in de omgeving van 14 vertoont de kostenfunctie een kleine helling of nog de kosten nemen traag toe, terwijl de omzetfunctie constant stijgt)
Stel vast dat naar het einde toe de winst sterk afneemt.
(de kostenfunctie is naar het einde toe steiler dan de omzetfunctie of nog de kosten stijgen sneller dan de omzet)





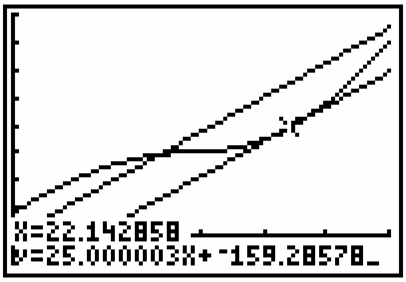


Aanvulling

We hebben gevonden dat de winst maximaal is voor "x = 22.142858".

Breng de grafieken van kosten en omzet in beeld (deactiveer eerst Y_3 en Y_4).
Construeer de raaklijn aan de kostenkromme in het punt 22.142858
(via DRAW 5:Tangent en stel X=22.142858)
Lees de richtingscoëfficiënt van de raaklijn af ***(25).***
Dit getal is precies gelijk aan de prijs van de producten. Daar stijgen de kosten en de omzet even snel.

In de economie leert men: *"De verkoper maximaliseert zijn winst als de marktprijs van zijn producten gelijk is aan de marginale kosten."*
(marginale kost = afgeleide van kostenfunctie = helling van de raaklijn aan grafiek k(x))



Tabel met kosten, omzet, winst en winsttoename voor een productie van 0 tot 30

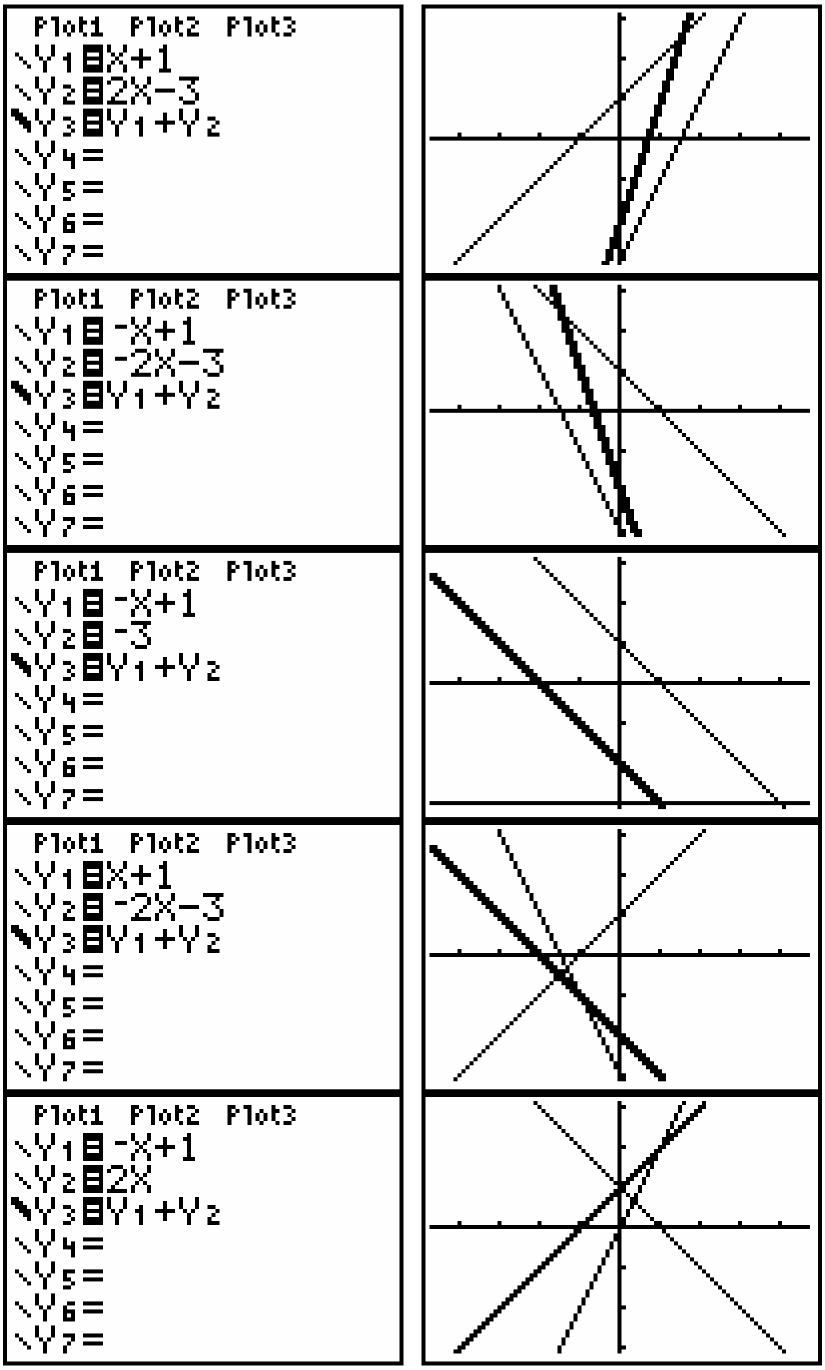
productie x	**kosten k(x) : Y_1**	**omzet o(x): Y_2**	**winst w(x): Y_3**	**$\triangle$w(x): Y_4**
0	80	0	-80	-4
1	109	25	-84	-2
2	136	50	-86	0
3	161	75	-86	2
4	184	100	-84	4
5	205	125	-80	6
6	224	150	-74	8
7	241	175	-66	10
8	256	200	-56	12
9	269	225	-44	14
10	280	250	-30	16
11	289	275	-14	18
12	296	300	4	20
13	301	325	24	22
14	304	350	46	**24**
15	305	375	70	23.25
16	306.75	400	93.25	19.75
17	312	425	113	16.25
18	320.75	450	129.25	12.75
19	333	475	142	9.25
20	348.75	500	151.25	5.75
21	368	525	157	2.25
22	390.75	550	**159.25**	-1.25
23	417	575	158	-4.75
24	446.75	600	153.25	-8.25
25	480	625	145	-11.75
26	516.75	650	133.25	-15.25
27	557	675	118	-18.75
28	600.75	700	99.25	-22.25
29	648	725	77	-25.75
30	698.75	750	51.25	

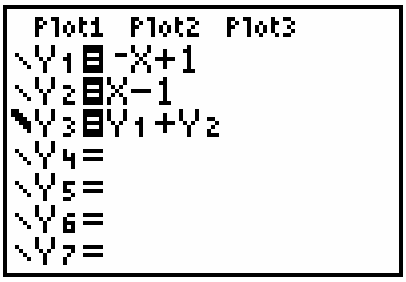
8. SOM- en PRODUCTGRAFIEK van twee RECHTEN

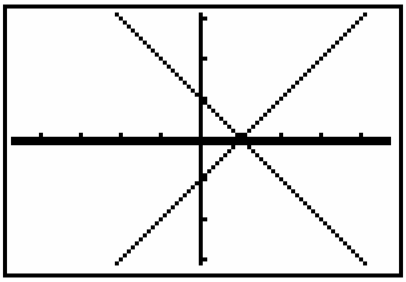
<u>SOMGRAFIEK</u>

Breng onder Y_1 en Y_2 de vergelijking van een rechte in. Stel $Y_3 = Y_1 + Y_2$.
Construeer de drie grafieken.
Onderzoek verschillende gevallen: stijgende, dalende en horizontale rechten.
Formuleer besluiten en verklaar die algebraïsch.

(Onderstaande figuren zijn getekend in het venster ZDecimal)





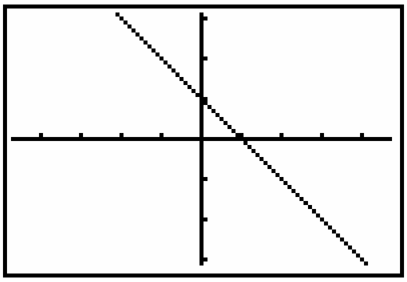
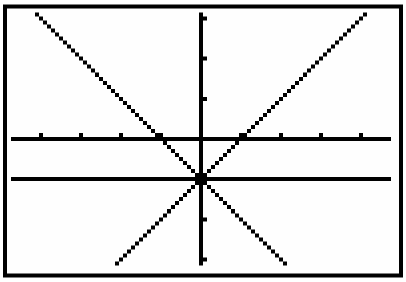
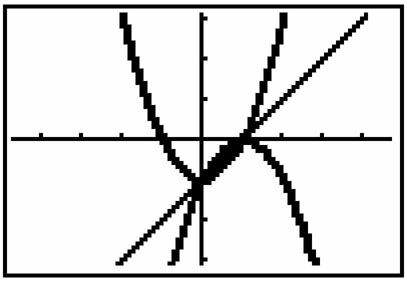


Besluiten:
De somgrafiek van twee rechten is altijd een rechte.
De somgrafiek van twee stijgende (dalende) rechten is een stijgende (dalende) rechte.
De somgrafiek van een rechte en een horizontale rechte is een rechte, evenwijdig met de eerste rechte.
De somgrafiek van een stijgende en een dalende rechte is een stijgende, dalende of horizontale rechte, naargelang de absolute waarde van de rico van de stijgende rechte groter is dan, kleiner dan of gelijk aan de absolute waarde van de rico van de dalende rechte.

De besluiten zijn algebraïsch gemakkelijk te verklaren als men bedenkt dat de rico van de somgrafiek van twee rechten gelijk is aan de som van de rico's van beide rechten. Het volstaat de regels voor het optellen van twee gehele getallen toe te passen.

PRODUCTGRAFIEK

Stel $Y_1 = -X + 1$, $Y_2 = \{-1,0,2\}X - 1$ *en* $Y_3 = Y_1 \times Y_2$
Construeer de grafieken in drie afzonderlijke schermpjes.
Welke figuren vind je als productgrafieken? Verklaar.

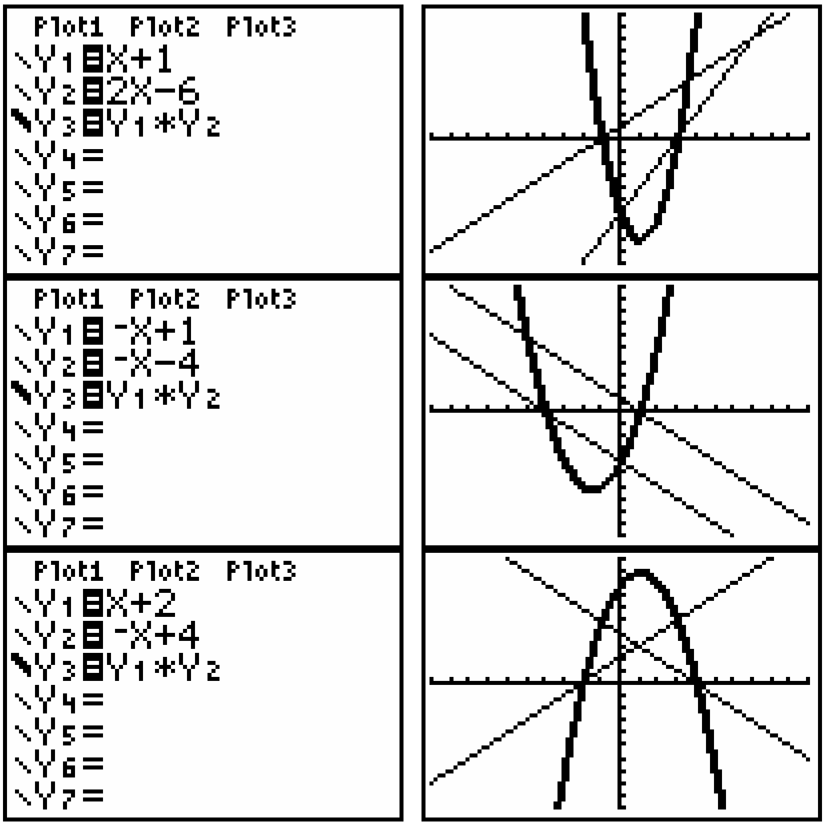
De productgrafiek van twee rechten is een parabool of een rechte. Het is een rechte als minstens een van beide rechten een horizontale is.

Door de graad van de productfunctie te bepalen is dit besluit eenvoudig algebraïsch te verklaren.

<u>In het vervolg werken we uitsluitend met twee niet-horizontale rechten.</u> De productgrafiek is dan altijd een parabool.

Ga uit van twee stijgende rechten. Wat voor soort parabool is de productgrafiek? Verklaar.
Analoog voor twee dalende rechten.
Analoog voor een stijgende en een dalende rechte.
Wat is de productgrafiek van twee evenwijdige rechten?

(Onderstaande figuren zijn getekend in het venster ZStandard)



Besluiten:
De productgrafiek van twee stijgende (dalende) rechten is een dalparabool.
De productgrafiek van een stijgend en een dalende rechte is een bergparabool.

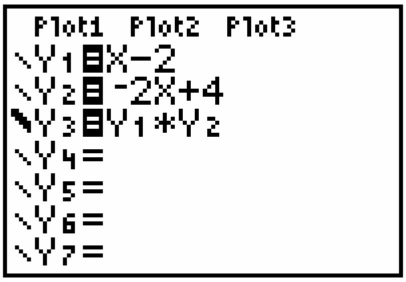
De algebraïsche verklaring van deze besluiten ligt in het feit dat de coëfficiënt van x^2 in de productfunctie gelijk is aan het product van de rico's van beide rechten.

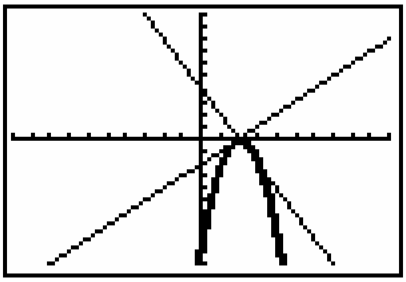
Stel vast dat de productparabool de x-as snijdt in de punten waar de rechten de x-as snijden.
Hieruit leiden we de vergelijking af van parabolen die de x-as snijden in x_1 en x_2.

Elke rechte die de x-as snijdt in x_1 heeft als vgl. $y = k_1(x - x_1)$ met $k_1 \neq 0$
Elke rechte die de x-as snijdt in x_2 heeft als vgl. $y = k_2(x - x_2)$ met $k_2 \neq 0$
De productparabool heeft dus als vergelijking $y = k_1.k_2(x - x_1)(x - x_2)$

Parabolen die de x-as snijden in x_1 en x_2 hebben als vgl. $y = a(x - x_1)(x - x_2)$ met $a \neq 0$.

Wat is er speciaal aan de productparabool van twee rechten die de x-as in eenzelfde punt snijden?





Hieruit leiden we de vergelijking af van parabolen die de x-as raken in x_1.

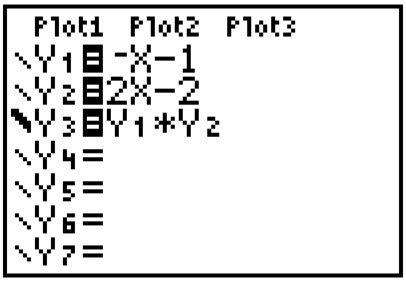
De eerste rechte die de x-as snijdt in x_1 heeft als vgl. $y = k_1(x - x_1)$ met $k_1 \neq 0$.
De tweede rechte die de x-as snijdt in x_1 heeft als vgl. $y = k_2(x - x_1)$ met $k_2 \neq 0$.
De productparabool heeft dus als vergelijking $y = k_1.k_2(x - x_1)^2$

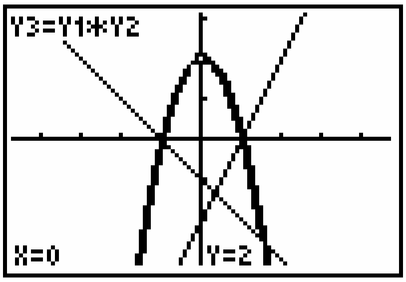
Parabolen die de X-as raken in x_1 hebben als vergelijking: $y = a(x - x_1)^2$ met $a \neq 0$.

Parabolen met vergelijking $y = a(x - x_1)^2$ hebben het punt $T(x_1,0)$ als top. Verschuift men die parabolen vertikaal over y_1 dan wordt de top $T(x_1,y_1)$ en de vergelijking $y = a(x-x_1)^2 + y_1$.

Parabolen met $T(x_1,y_1)$ als top hebben als vergelijking: $y = a(x-x_1)^2 + y_1$ met $a \neq 0$.

In welk punt snijdt de productparabool de y-as?





De productparabool snijdt de y-as in het "product van de snijpunten van de rechten met de y-as". Inderdaad: $(ax + \mathbf{b}).(cx + \mathbf{d}) = acx^2 + (ad + bc)x + \mathbf{bd}$.

Oefeningen

1. Is de somgrafiek s van twee niet horizontale evenwijdige rechten l en m evenwijdig met die rechten? Wat vermoed je over de snijpunten met de x-as van de rechten l, m en s? Bewijs dit vermoeden algebraïsch.

2. Geef de vergelijkingen van drie parabolen die de x-as snijden in -2 en 4. Teken de grafieken in één scherm.
   Stel de vergelijking van de drie parabolen op in de vorm $y = ax^2 + bx + c$.
   Wat kan je besluiten over de coëfficiënten a, b en c van de vergelijkingen van twee parabolen, die de x-as in dezelfde twee punten snijden?

3. Geef de vergelijkingen van drie parabolen die de x-as raken in het punt (-2,0). Teken de grafieken in één scherm.

4. Kan de productparabool van twee rechten een parabool zijn die de x-as niet snijdt?

5. De vergelijking van een parabool die punten gemeen heeft met de x-as kan onder twee vormen gegeven worden: $y = a(x - x_1)(x - x_2)$ en $y = ax^2 + bx + c$.
   De soort parabool (berg of dal) kan je uit beide vormen even vlot aflezen. Verklaar.
   In welke vorm zie je het best het snijpunt met de y-as?
   In welke vorm zie je het best de snijpunten met de x-as?

6. Is volgende uitspraak waar of vals? "De top van een parabool die de x-as snijdt, ligt op de middelloodlijn van het lijnstuk dat de twee snijpunten verbindt".

7. Een voetballer schopt een bal weg. De bal bereikt een maximale hoogte van 4 m. en valt 20 m. verder op de grond. Vind de paraboolbaan van de bal.
   (Kies als xy-vlak het vlak van de paraboolbaan, de x-as ligt op de aarde en de oorsprong op de plaats waar de bal wordt weggetrapt).

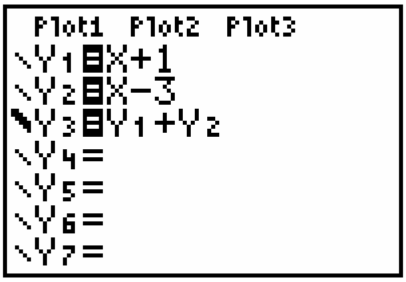
8. *p*: $y = ax^2 + bx + c$.
   De coördinaat van de top is (-1,5) en *p* bevat het punt met coördinaat (1,2)
   Bepaal a, b en c.

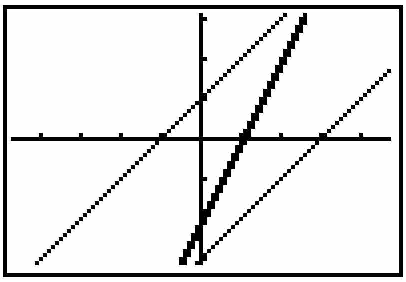
9. Bepaal twee rechten met als productparabool:
   $y = -3(x - 2)^2$
   $y = 2x^2 + 5x + 2$
   Geef meerdere oplossingen.

10. Bepaal twee rechten waarvan de productparabool de x-as snijdt in -1 en 3 en de y-as in 6.
    Geef meerdere oplossingen.

Oplossingen van de oefeningen.

Oefening 1

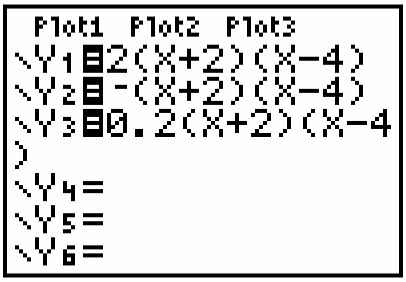


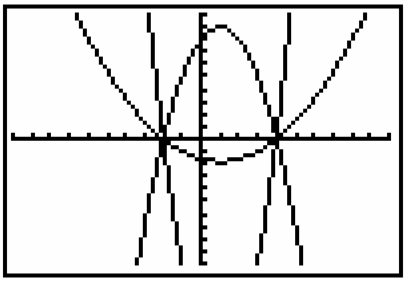


Als l: y = ax + b en m: y = ax + c dan is s: y = 2ax + (b+c).
De rico van de somrechte s is het dubbel van die van l en m. De rechte s loopt dus niet evenwijdig met l en m.
Het snijpunt van s met de x-as is het midden van de snijpunten van l en m met de x-as.
Inderdaad, het snijpunt van s met de x-as heeft als abscis -(b+c)/(2a) = 🗁 (-b/a + -c/a). Dit is het midden van de punten met abscissen -b/a en -c/a.

Oefening 2

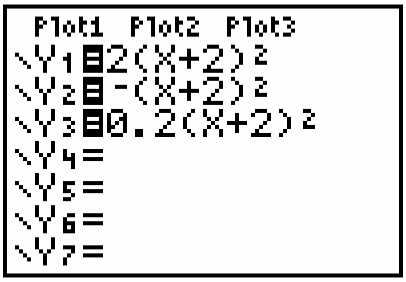
y = 2(x + 2)(x - 4) = $2x^2$ - 4x - 16
y = -(x + 2)(x - 4) = - x^2 + 2x + 8
y = 0.2(x + 2)(x - 4) = $0.2x^2$ - 0.4x - 1.6

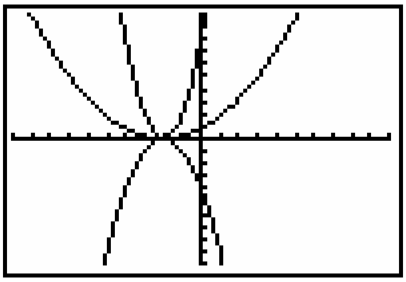




De coëfficiënten van de vergelijkingen van twee parabolen (in de vorm y = ax^2 + bx +c), die de x-as in dezelfde twee punten snijden, zijn evenredig.

Oefening3





Oefening 4

Nee, want twee rechten die een productparabool voortbrengen snijden de x-as en de productparabool gaat door die snijpunten.

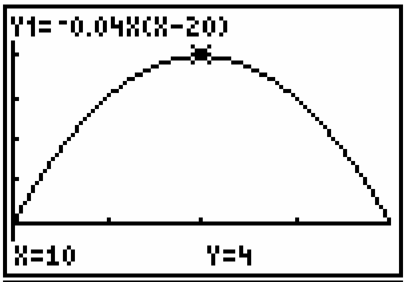
Oefening 5

De soort parabool (berg of dal) wordt bepaald door a
In de tweede vorm. Het snijpunt met de y-as is (0,c).
In de eerste vorm. De snijpunten met de x-as zijn $(x_1,0)$ en $(x_2,0)$

Oefening 6

De uitspraak is waar.

Oefening 7



Omdat de parabool de x-as snijdt in 0 en 20 is de vergelijking van de vorm $y = a\,x(x - 20)$.
Omdat (10,4) een punt is van de parabool moet: $4 = a \cdot 10 \cdot (-10)$, waaruit $a = -0.04$.
De baan die de bal volgt heeft dus als vergelijking: $y = -0.04\,x\,(x - 20) = -0.04\,x^2 + 0.8\,x$.

Men kan de vergelijking van de parabool ook vinden met de TI-83 door een kwadratische regressie toe te passen op de punten (0,0), (20,0) en (10,4).

Oefening 8

Omwille van de top (-1,5) heeft de parabool een vergelijking van de vorm $y = a(x+1)^2 + 5$.
De parabool gaat door het punt (1,2) en dus moet $2 = a(1+1)^2 + 5$, waaruit $a = -0.75$.
De vergelijking is dus $y = -0.75(x+1)^2 + 5$ of $y = \mathbf{-0.75}x^2\ \mathbf{-1.5}x + \mathbf{4.25}$

Oefening 9

$y = -3(x - 2)^2$ is de productparabool van

$y = x - 2$ en $y = -3(x - 2)$
$y = 2(x - 2)$ en $y = -1.5(x - 2)$
y = ☆3(x - 2) en y = -☆3(x - 2)

$y = 2x^2 + 5x + 2$ is de productparabool van

$y = 2x + 1$ en $y = x + 2$
$y = 4x + 2$ en $y = 0.5x + 1$
$y = x + 0.5$ en $y = 2x + 4$

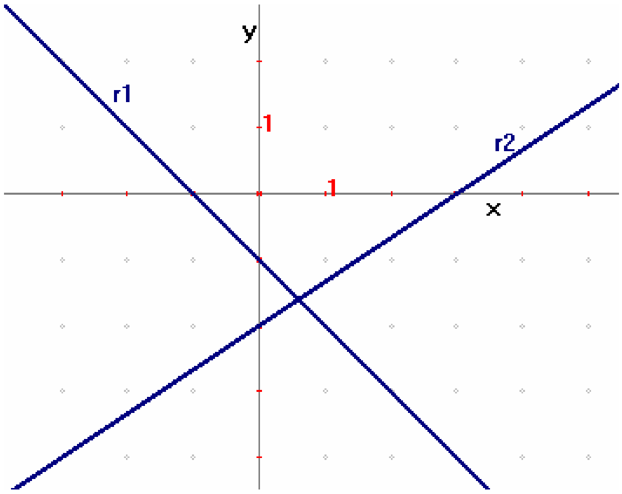
Oefening 10

Oplossingen zijn o.a. de rechten:

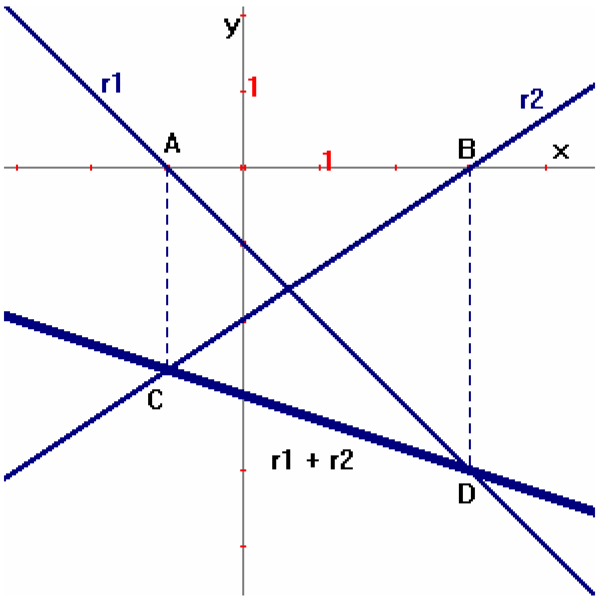
$y = -2(x + 1)$ en $y = x - 3$
$y = x + 1$ en $y = -2x + 6$
$y = 2(x + 1)$ en $y = -x + 3$

MEETKUNDIGE CONSTRUCTIES

Construeer de som- en productgrafiek van de rechten r1 en r2



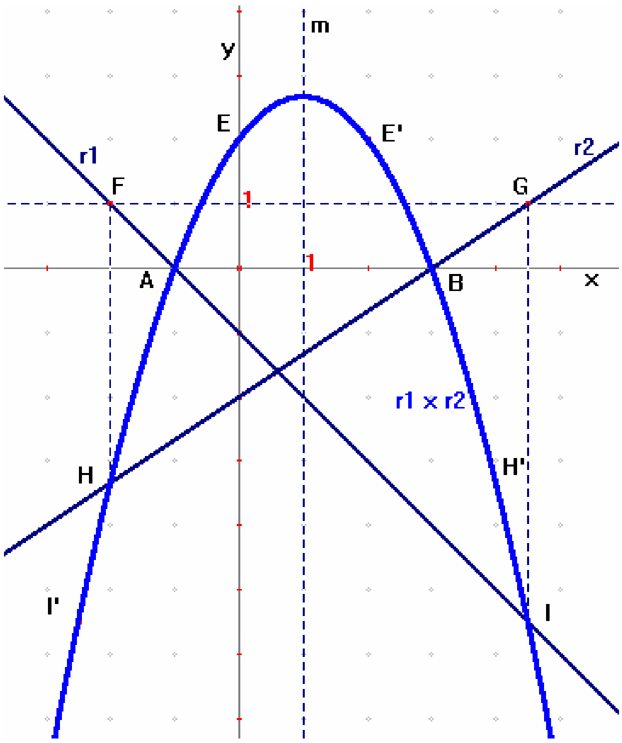
Somgrafiek



Zij A en B de snijpunten van r1 en r2 met de x-as. Zij C en D de snijpunten van r2 en r1 met rechten die door A en B gaan en evenwijdig zijn met de y-as.

De punten A en B zijn neutrale elementen bij de optelling van rechten d.w.z. A + C = C en B + D = D. De somrechte van r1 en r2 is dus de rechte CD.

Productgrafiek



Zij A en B de snijpunten van r1 en r2 met de x-as; F en G de snijpunten van r1 en r2 met de rechte y = 1. H en I zijn de snijpunten van r2 en r1 met rechten door F en G en evenwijdig met de y-as.

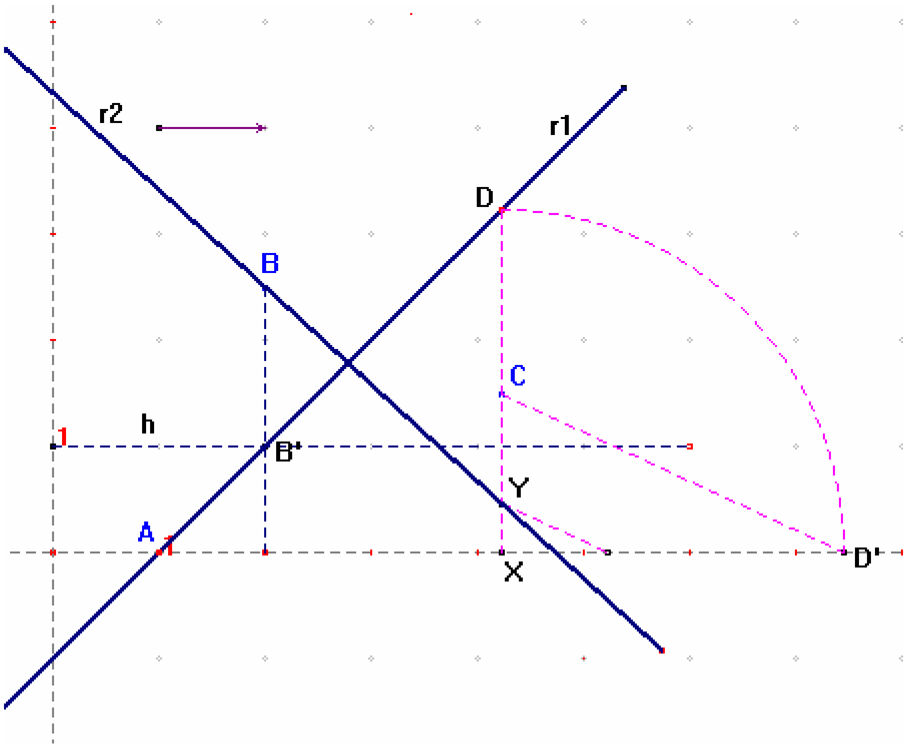
De punten A en B zijn opslorpende elementen bij het vermenigvuldigen van de rechten r1 en r2 d.w.z. A en B behoren tot de productparabool. De as van de parabool is de middelloodlijn m van [AB].
Door het product te maken van de snijpunten van de y-as met de rechten r1 en r2 ontstaat het punt E van de productgrafiek.
De punten F en G zijn neutrale elementen bij de vermenigvuldiging van r1 en r2 d.w.z.
F x H = H en G x I = I.
Door de punten E, H en I te spiegelen t.o.v. de rechte m ontstaan nog drie punten E', H' en I' van de productparabool. We beschikken nu over 8 punten van de parabool, meer dan voldoende om (met Cabri) de parabool te tekenen.

De constructie van de top, het brandpunt en de richtlijn van de parabool wordt verder behandeld.

CONSTRUCTIE VAN EEN PARABOOL DOOR DRIE PUNTEN A, B, C

Een parabool waarvan de as evenwijdig is met de y-as, is bepaald door drie niet-collineaire punten A, B, C. Als drie dergelijke punten gegeven zijn moet het dus mogelijk zijn de parabool te construeren. Het probleem kan als opgelost beschouwd worden als men er in slaagt het brandpunt en de richtlijn van de parabool te construeren.

1. Het probleem kan opgelost worden door eerst **twee rechten te construeren waarvan het product gelijk is aan de gevraagde parabool.** Het komt er dus op aan twee rechten te construeren waarvan de productgrafiek door de punten A, B en C gaat.



(fig. 1)

Breng een assenstelsel aan waarvan de x-as door A gaat.
Construeer de horizontal rechte h: y =1. B' is de projectie van B op h.

Als eerste rechte r1 nemen we de rechte AB'.
Als tweede rechte r2 nemen we een rechte door B. Ga na dat A en B tot de productgrafiek behoren. Opdat C een punt van de productparabool zou zijn, moet een tweede punt Y van r2 voldoen aan |XC| = |XD|.|XY| of aan |XC| .1 = |XD|.|XY| of aan |XD| / 1 = | XC| / |XY|.

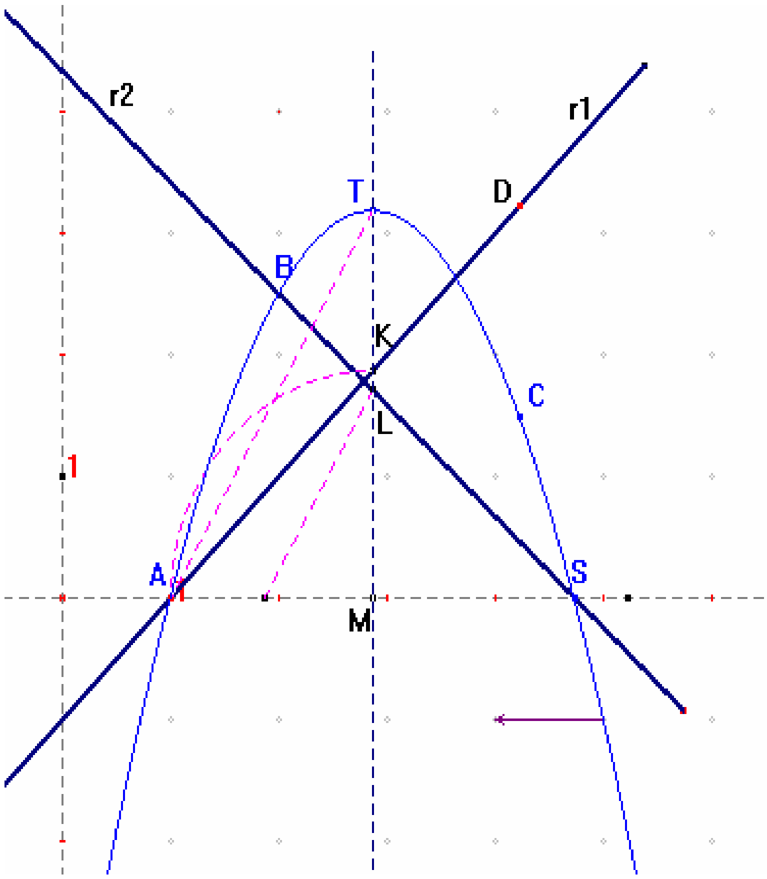
|XY| is dus de vierde evenredige tot |XD| , 1 en |XC|.

Die constructie is uitgevoerd in fig. 1

2. Op zoek naar de top van de parabool.

De snijpunten van de parabool met de x-as zijn de snijpunten A en S van de rechten r1 en r2 met de x-as. De as van de parabool is de middelloodlijn van [AS].

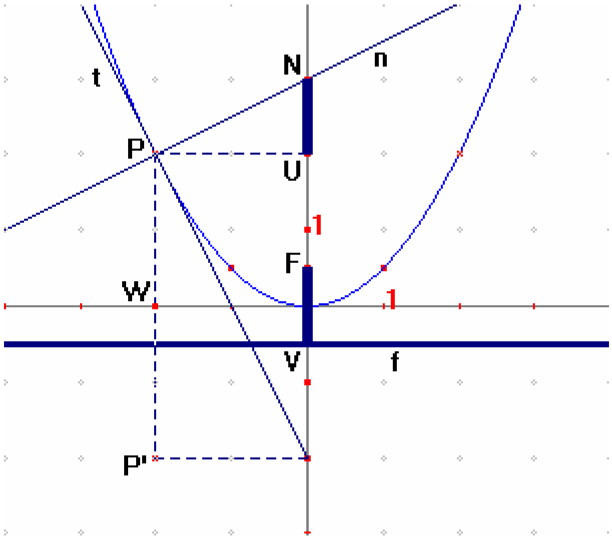
De top T van de parabool moet voldoen aan |MT| = |ML|.|MK| of nog 1 / |ML| = |MK| / |MT|.
|MT| is dus vierde evenredige tot 1, |ML| en |MK|.
Die constructie is uitgevoerd in fig.2



(fig. 2)

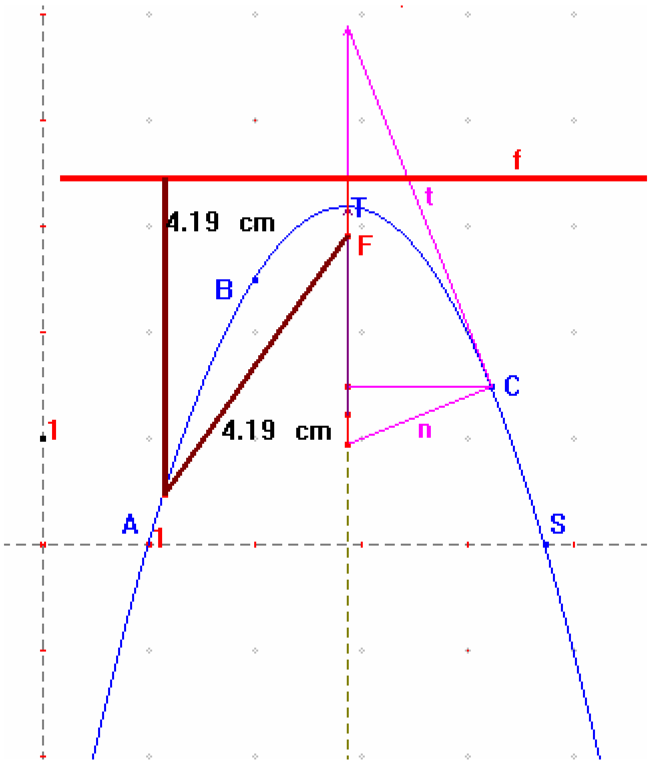
3. Uitgaande van de elementen van de parabool die nu al gekend zijn, kunnen het brandpunt en de richtlijn bepaald worden. In fig.3 brengen we eerst **een paar gekende eigenschappen van de parabool** in herinnering.

Bij een parabool is de subnormaal (|NU|) constant en gelijk aan de afstand |FV| van brandpunt tot richtlijn
Om de raaklijn in een punt P van de parabool te construeren werd gebruik gemaakt van de eigenschap dat W het midden is van [PP']



(fig. 3)

4. De twee eigenschappen die hierboven werden aangehaald worden in fig. 4 toegepast om **het brandpunt F en de richtlijn f van de parabool door A, B en C te construeren.**



(fig. 4)

In CABRI kan men de parabool door de vijf gekende punten A, B, T, C en S tekenen. Als proef kan worden nagegaan dat de afstanden van een willekeurig punt van de parabool, tot F en f gelijk zijn. Door dat punt langs de parabool te slepen ziet men dat die twee afstanden telkens gelijk zijn.

9. WISKUNDIGE EN LOGISCHE TESTEN MET DE TI-83/84 PLUS, TOEGEPAST OP SIMULATIES VAN KANSEXPERIMENTEN

§1. Wiskundige en logische testen

Men gooit 10 maal met twee dobbelstenen. De resultaten op de eerste (tweede) steen zijn opgenomen in de lijsten L1 en L2:

L1 = {1, 5, 4, 1, 5, 1, 1, 6, 2, 2}
L2 = {1, 5, 5, 6, 1, 4, 5, 5, 2, 5}

Door L1 = L2 komt er {1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0}

Er komt dus 1 als de overeenkomstige elementen in L1 en L2 gelijk zijn, 0 in het andere geval.

Door sum (Ans) komt er 3.

Beide stappen kan men in één keer zetten:

sum (L1 = L2) geeft 3.

3 is het antwoord op de vraag: in hoeveel gevallen is het aantal ogen op beide stenen gelijk?

Analoog krijgt men het antwoord op de vraag: **in hoeveel gevallen is het aantal ogen op de eerste steen groter dan dat op de tweede steen door sum (L1 > L2)** nl. 2

Analoog krijgt men het antwoord op de vraag: **in hoeveel gevallen is het aantal ogen op de eerste steen minstens 3 door: sum (L1 ≥ 3)** nl. 4

Analoog krijgt men het antwoord op de vraag: **in hoeveel gevallen bekomt men op minstens één steen een 5 door : sum (L1 = 5 or L2 = 5)** nl. 6

Analoog krijgt men het antwoord op de vraag**: in hoeveel gevallen bekomt men op juist één steen een 5 door : sum (L1 = 5 xor L2 = 5)** nl. 5

Analoog krijgt men het antwoord op de vraag: **in hoeveel gevallen bekomt men een 5 op beide dobbelstenen door sum (L1 = 5 and L2 = 5)** nl. 1

Analoog krijgt men het antwoord op de vraag: **in hoeveel gevallen is de som van de ogen op beide stenen gelijk aan 7 door sum (L1 + L2 = 7)** nl. 2

Analoog krijgt men het antwoord op de vraag: **in hoeveel gevallen is de som van de ogen op beide stenen hoogstens 6 door sum (L1 + L2 ≤ 6)** nl. 5

§2. Simulatie van het gooien met drie dobbelstenen.

We willen de kans bepalen om bij het gooien van drie dobbelstenen, minstens 12 als som te bekomen.

Bij het gooien met drie dobbelstenen zijn er 6 x 6 x 6 = 216 mogelijke uitkomsten. Eén uitkomst is bv. (5,3,6). Met wat geduld en aandacht kan men uit een boomdiagram volgende tabel opstellen. In de eerste rij staan de mogelijke sommen van de ogen op de drie stenen, in de tweede rij de theoretische absolute frequenties. In 81 gevallen is de som van de ogen minstens 12. De theoretische kans is dus 81/216 = 0.375.

3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
1	3	6	10	15	21	25	27	27	25	21	15	10	6	3	1

In de beschrijvende statistiek leert men de kenmerkende getallen berekenen:
gemiddelde: 10.5 standaardafwijking: 2.96 mediaan: 10.5 Q1: 8 Q3: 13

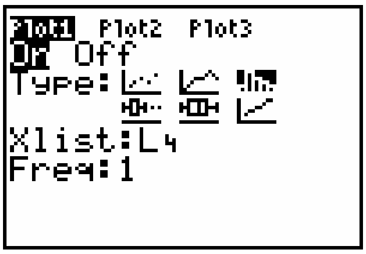
De TI 83 laat toe dit kansexperiment te simuleren. We doen dit voor 200 worpen.

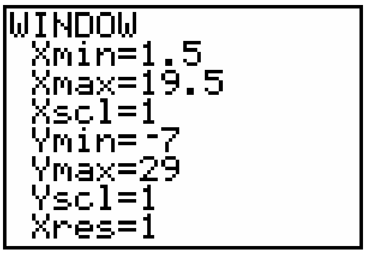
randInt(1, 6, 200)→ L1 (via MATH PRB 5:)
randInt(1, 6, 200)→ L2 (200 worpen van tweede steen opslaan in lijst 2)
randInt(1, 6, 200)→ L3
L1 + L2 + L3 → L4 (de sommen van de ogen opslaan in lijst 4)
sum(L4 ≥ 12) (aantal gevallen waarbij de som minstens 12 is)
Ans/200 (experimentele kans op minstens 12).

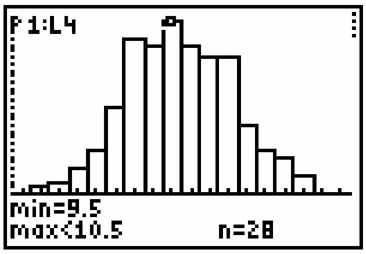
Praktisch: breng volgende instructies in het basisscherm en druk herhaaldelijk ENTER
randInt(1,6,200) + randInt(1,6,200) + randInt(1,6,200) → L4 : sum(L4 ≥ 12) / 200

Als ik dit experiment 5 keer uitvoerde (dus 1000 worpen) dan waren de uitkomsten:
0.37 0.32 0.405 0.38 0.385. Het gemiddelde hiervan is: 0.372. Deze experimentele kans is een goede benadering voor de theoretische kans, 0.375. Hoe meer worpen men simuleert, hoe beter de experimentele kans de theoretische kans zal benaderen (**wet van de grote getallen**).
In §3 vindt u een programma voor dit probleem.

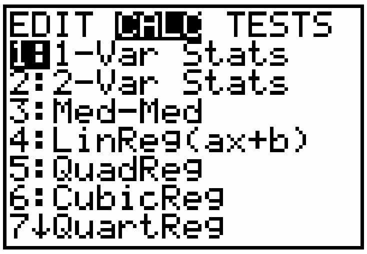
Het histogram van deze 200 worpen vindt men via STAT PLOT. Kies Plot 1 en volgende instellingen. Via TRACE kan men het histogram doorlopen.

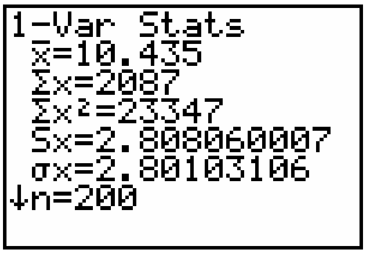






De kenmerkende centrum- en spreidingsmaten voor dit kansexperiment vindt men via STAT CALC 1-Var Stats, aangevuld met L4.





De drie behandelde problemen: het bepalen van de experimentele kans, het construeren van het histogram en het bepalen van de centrum- en spreidingsmaten, kunnen met het programma in §3 opgelost worden.

§3. Programma DOBBEL3.

```
: ClrHome
: FnOff
: PlotsOff
: ClrAllLists
: Input "AANTAL WORPEN ?", N
: Input "MIN. SOM ?", S
: randInt(1, 6, N) → L1
: randInt(1, 6, N) → L2
: randInt(1, 6, N) → L3
: L1 + L2 + L3 → L4
: sum(L4 ≥ S) → A
: A/N → P
: ClrHome
: Disp "AANTAL≥ S", A
: Disp "EXP. KANS" , P
: Output(8,4,"DRUK ENTER")
: Pause
: For(I, 1, 18)
: sum(L4 = I) → L5(I)
: End
: max (L5) → Y
: 1.5 → Xmin: 19.5 → Xmax : 1 → Xscl
: - Y/4 → Ymin:  Y+1 → Ymax: 1 → Yscl
: Plot1 (Histogram, L4, 1)
: DispGraph
: Trace
: ClrHome
: 1-Var Stats L4
```

Om het programma te hernemen, druk ENTER; om het te verlaten, druk CLEAR.

Oefening: Schrijf een programma dat de experimentele kans berekent (bij het gooien met drie dobbelstenen), op een som die minimaal S en maximaal T is.
Op wat komt dat neer voor T = 18, voor S = 3 ?

§4. "Kop of munt"

Als je drie normale muntstukken opgooit, wat is dan de kans dat je juist 2 keer munt gooit?

Andere formulering (als we aannemen dat de kans op een jongen en de kans op een meisje even groot zijn): wat is de kans dat een gezin met drie kinderen precies 2 meisjes telt?

Mogelijke uitkomsten: **kkk kkm kmk mkk kmm mkm mmk mmm**. In drie van de acht gevallen gooit men juist 2 keer munt. De gevraagde kans is dus 3/8 = 0.375.
Deze methode is uitbreidbaar voor 4 worpen, 5 worpen, … maar het optekenen van alle mogelijke uitkomsten wordt steeds omslachtiger.

In de derde graad zal men je zeggen dat het hier gaat om een binomiale kansverdeling. De formule hiervoor is niet echt moeilijker voor 4,5,… worpen dan voor 3 worpen.

Ook hier kunnen we de gevraagde kans experimenteel benaderen.

Laat "1" overeenstemmen met munt (meisje) en "0" met kop (jongen).
We simuleren: 200 keer gooien met drie muntstukken (200 gezinnen met drie kinderen)

Het simuleren van het resultaat op het eerste, tweede, derde muntstuk:

randInt(0,1,200) → L1 randInt(0,1,200) → L2 randInt(0,1,200) → L3

L1 + L2 + L3 → L4 definieert een lijst L4 met het aantal keren munt voor elk van de 200 worpen.

sum(L4 = 2) geeft het aantal worpen met juist twee keren munt; Ans/200 geeft de experimentele kans op juist twee keren munt.

Praktisch: breng volgende instructies in het basisscherm en druk herhaaldelijk ENTER
randInt(0,1,200) + randInt(0,1,200) + randInt(0,1,200) → L4: sum(L4 = 2) / 200

Als ik dit experiment 5 keer uitvoerde (dus 1000 worpen) dan waren de uitkomsten:
0.39 0.34 0.425 0.335 0.36. Het gemiddelde hiervan is 0.37. Deze experimentele kanswaarde is een goede benadering voor de theoretische kanswaarde 0.375.

Bemerk dat voor 4,5,… worpen er weinig moet veranderd worden aan de instructies.

Probeer het eens voor: de kans om bij 5 worpen juist 2 keer munt te gooien. De theoretische kans is 10/32 = 0.3125.

BIJLAGE 1 : GDB OP DE TI-83/84 PLUS

Stel dat je één of meerdere functies hebt ingebracht in het Y= -scherm en dat je WINDOW-instellingen hebt gekozen om een goede grafiek te tekenen. Je kan dit alles bewaren in een GDB.

Een GDB (grafic data base = grafisch gegevensbestand) bevat elementen die eigen zijn aan een specifieke grafiek en waarmee de grafiek dus ook kan getekend worden. In een GDB worden o.a. volgende elementen opgeslagen: de functies in het actuele Y= -scherm met hun selectiestatus (aan, uit) en de venstervariabelen (WINDOW). Men kan maximaal tien GDB's opslaan en weer oproepen: van GDB 0 tot GDB 9.

Werkwijze om een GDB op te slaan.

1. Druk **2nd DRAW** en ga met ▸ naar de derde optie *STO.*
2. **Kies** in het menu optie *3: Store GDB* en **ENTER**
   Op het scherm komt *Store GDB* met daarachter de cursor
   Typ daar een nummer van 0 tot 9 , bv. 5
3. Druk **ENTER** en het actuele gegevensbestand wordt weggeschreven naar GDB 5

Werkwijze om een GDB te openen

1. Druk **2nd DRAW** en ga met ▸ naar de derde optie *STO*
2. **Kies** in het menu optie *4: Recall GDB* en **ENTER**
   Op het scherm komt *Recall GDB* met daarachter de cursor
   Typ daar een nummer van 0 tot 9, bv. 5
3. Druk **ENTER** en het gegevensbestand GDB 5 wordt opgeroepen (en vervangt het actuele gegevensbestand).

Opm. * <u>De grafiek wordt niet automatisch getekend als je een GDB oproept</u>.
Daarvoor moet nog GRAPH gedrukt worden.
* Wanneer men een GDB oproept worden alle bestaande Y= -functies (die niet tot de GDB behoren) gewist.

Verwijderen van een GDB

1. Druk **2nd MEM** , **kies** optie *2: Mem Mgmt/Del* en **ENTER**
2. **Kies** in het menu optie *9: GDB* en **ENTER**
3. Met de pijltjestoetsen ▾ en ▴ het merkteken ▸ naast het gewenste GDB plaatsen en **DEL** drukken.

Opm. Men kan een bestaande GDB overschrijven d.w.z. een nieuwe inhoud geven zonder dat het vooraf gewist werd.

Een tekening (histogram, boxplot, grafiek,…) kan men analoog wegschrijven en weer oproepen via 2nd DRAW STO optie 1: Store Pic en optie 2: Recall Pic.

BIJLAGE 2: GEGEVENS VERZENDEN TUSSEN TWEE TI-83/84 PLUS

Verbind de twee toestellen met de verbindingskabel

Gegevens selecteren voor verzending.

- Druk **2nd LINK** op het verzendende toestel
- **Kies** in het *SEND*-menu het type gegevens dat je wil verzenden (bv. *3: Prgm…*) en **ENTER**
- In het *SELECT*-menu de ▸ **verplaatsen** naar de programma's die je wil verzenden en telkens **ENTER** drukken om het programma te selecteren (er komt ■ naast een geselecteerd programma). Door nog eens ENTER wordt weer gedeselecteerd.

Het ontvangende toestel klaar maken voor ontvangst

- Druk **2nd LINK** op het ontvangende toestel.
- **Kies** met ▸ de optie *RECEIVE* en **ENTER**
  Op het scherm komt *Waiting*

Het verzenden zelf

- **Druk** op het verzendende toestel ▸ om *TRANSMIT* op te roepen
- Druk **ENTER** en de verzending gaat door.

Opmerkingen.

1. Wanneer tijdens de overdracht van gegevens de namen van de variabelen gelijk zijn (bv. je wilt een programma met naam VKV verzenden naar een toestel dat reeds een programma met diezelfde naam bevat) dan verschijnt op het scherm van het ontvangende toestel een menu DuplicateName. Via:

   - 1: Rename kan je andere naam geven in het ontvangende toestel aan het programma.
   - 2: *Overwrite* worden de gegevens in het ontvangende toestel overschreven.
   - 3*: Omit* wordt de variabele (hier het programma VKV, niet verzonden)
   - 4: *Quit* wordt de variabele niet verzonden en het ontvangende toestel verlaat de ontvangmodus

2. Bij het versturen van gegevens van een TI-83 naar een TI-83(Plus) kunnen normaal geen problemen ontstaan. Heel uitzonderlijk kunnen problemen ontstaan bij verzenden van TI-83-84 Plus naar TI-83. (zie handleiding).

3. Door in het verzendende toestel in het SEND-menu de optie *Back Up* te kiezen wordt de volledige inhoud van het geheugen van het zendende toestel geselecteerd. Op de manier zoals hierboven beschreven wordt die inhoud naar het ontvangende toestel verstuurd en is de geheugeninhoud van beide toestellen identiek. Er wordt wel nog gevraagd of de back up effectief mag doorgaan (1:Continu) of niet (2: Quit)

Achterkant Cahier:

Dit cahier behandelt de ontwikkeling van het functiebegrip in de tweede graad, er is tevens een hoofdstuk over simulaties van kansexperimenten.

Concrete voorbeelden en oefeningen worden gebundeld in een aantal hoofdstukken, waarbij het gebruik van de TI-83/84 Plus aan bod komt.

Walter De Volder is ere-vakbegeleider wiskunde in het Bisdom Brugge en was vroeger leraar wiskunde aan de derde graad in het Sint-Jozefcollege te Tielt.

Met zijn rijke carrière van 37 jaar leraar wiskunde heeft Walter de periode van wiskunde zonder en met ICT meegemaakt. Dit voel je ook in de verschillende onderwerpen die Walter behandelt in dit cahier. Hij illustreert duidelijk de meerwaarde van het grafisch rekentoestel in het wiskundeonderwijs, via het redeneren met grafieken en tabellen, zonder echter het algebraïsche rekenwerk te vergeten. Op die wijze komen de verschillende aspecten van het functiebegrip aan bod.

Dit cahier behandelt de ontwikkeling van het functiebegrip in de tweede graad samen met een hoofdstuk over simulaties van kansexperimenten.

Concrete voorbeelden en oefeningen worden gebundeld in een aantal hoofdstukken, waarbij het gebruik van de TI-83/84 Plus aan bod komt.

WALTER DE VOLDER is ere-vakbegeleider wiskunde in het Bisdom Brugge en was vroeger leraar wiskunde, derde graad, aan het Sint-Jozefcollege te Tielt.

Met zijn rijke carrière van 37 jaar leraar wiskunde heeft Walter de periode van wiskunde zonder en met ICT meegemaakt. Dit voel je ook in de verschillende onderwerpen die Walter behandelt in dit cahier. Hij illustreert duidelijk de meerwaarde van de grafische rekenmachine in het wiskundeonderwijs, via het redeneren met grafieken en tabellen, zonder echter het algebraïsche rekenwerk te vergeten. Op die wijze komen de verschillende aspecten van het functiebegrip aan bod.

© 2004   Deze cahier is bedoeld als lesmateriaal, mag hiervoor vrij gekopieerd worden
en kan gedownload worden via de website **www.t3vlaanderen.be**.

TEXAS INSTRUMENTS