# Maxa en rektangels omkrets

I en halvcirkel med radien 4 dm är en rektangel inskriven. Vi har infört beteckningar i illustrationerna nedan. Teckna uttryck för rektangelns omkrets och bestäm det värde på *x* (rektangelns bas) respektive *v* som ger den största möjliga omkretsen. 2 metoder alltså. Ange också denna största omkrets.

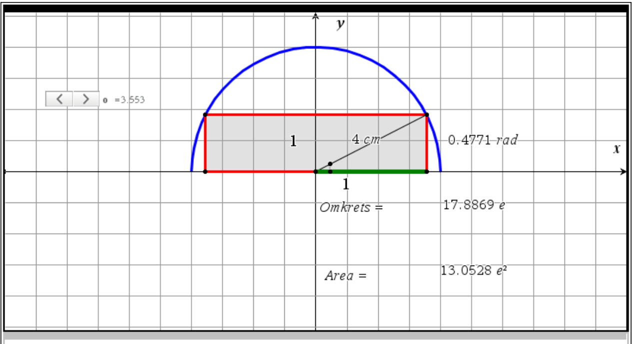
Övningen passar att genomföra i kurs 4.

a) Lös uppgiften grafiskt numeriskt

b) Lös uppgiften med hjälp av derivata.

c) Vad är bredd/höjd-förhållandet när omkretsen är maximal?

**Sid 2:** den funktion vi ritat för att plotta halvcirkeln är $\sqrt{4^2-x^2}$. Vi har infogat ett *skjutreglage* med vilket du i steg kan ändra längden på den grönmarkerade sträckan (*halva* basen). Samtidigt ser du beräkningar av omkrets, area och vinkel (i radianer). Du kan ändra inställningar för reglaget genom att högerklicka på det.




**Här har vi infogat ett skjutreglage med vilket du i steg kan ändra längden på den grönmarkerade sträckan (halva basen). Samtidigt ser du beräkningar av omkrets, area och vinkel (i radianer). Du kan ändra inställningar för reglaget genom att högerklicka på det.**

**Sid 3:** här härleder vi två olika uttryck för rektangelns omkrets. Vi använder CAS-funktionen hos TI-Nspire för att lösa ut *h* i ett uttryck.

Vi tecknar nu rektangelns omkrets på två sätt. Vi kallar basen i rektangeln för x.

1) Höjden i rektangeln kan uttryckas i basen x med Pythagoras sats. Vi kallar höjden för *h*.

$\text{solve}\left(4^2=\left(\frac{x}{2}\right)^2+h^2,h\right) \blacktriangleright h=\frac{\sqrt{64-x^2}}{2} \text{ and } x^2-64\le 0 \text{ or } h=\frac{-\sqrt{64-x^2}}{2} \text{ and } x^2-64\le 0$

Omkretsen (2x+2*h*) blir då $2\cdot x+2\cdot\frac{\sqrt{64-x^2}}{2} \blacktriangleright \sqrt{64-x^2}+2\cdot x$

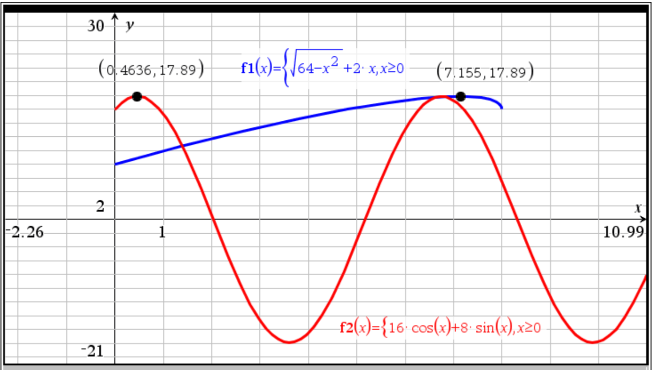
2) Vi använder enkel trigonometri. Titta på figuren.

sin *v* = *h*/4 ger *h* = 4·sin *v*, cos *v* = $\frac{\frac{x}{2}}{4}$ ger x = 8 cos *v*.

Omkretsen (2*h*+2x) blir då $8\cdot\sin(v)+16\cdot\cos(v)$

Vi ritar nu grafer av de två uttryck vi fått och beräknar maxvärdena grafiskt/numeriskt.

**Sid 4:** Här har vi nu ritat funktionerna för omkretsen och grafiskt/numeriskt beräknat maxvärdena. Observera att vi räknat i radianer för den trigonometriska funktionen.




Vi har här beräknat koordinaterna för funktionernas maxvärden. Lägg märke till att vi får samma närmevärde på omkretsen.

**Sid 5:** Vi visar här hur man stegvis löser ekvationerna man får när man sätter derivatan lika med noll. Observera att den trigonometriska metoden ger ett väldigt enkelt uttryck när man är ska beräkna vinkeln.

**Vi visar här hur man stegvis löser ekvationerna man får när man sätter derivatan lika med noll**

$\frac{d}{dx}\left(\sqrt{64-x^2}+2\cdot x\right) \blacktriangleright 2-\frac{x}{\sqrt{64-x^2}}$

Om vi sätter derivatan lika med noll får vi $2=\frac{x}{\sqrt{64-x^2}}$

Vi kvadrerar först båda leden: $4=\frac{x^2}{64-x^2}$

Vi får $4\cdot\left(64-x^2\right)=x^2$ som ger $256=5x^2$ med positiv lösning $x=\frac{16}{\sqrt{5}}$ (≈ 7,155)

$\frac{d}{dv}\left(8\cdot\sin(v)+16\cdot\cos(v)\right) \blacktriangleright 8\cdot\cos(v)-16\cdot\sin(v)$

Om vi sätter derivatan lika med noll får vi $8\cdot\cos(v)=16\cdot\sin(v)$ som kan förenklas till

$\tan v=\frac{1}{2}$ med lösningen $\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ (≈ 0,464 radianer eller 26,6 grader)

Jämför med maxvärdena i graferna på förra sidan.

**Sid 6:** På denna sida har vi nu med programmets CAS-funktioner direkt beräknat derivatans nollställen och sedan omkretsen. Vi får samma resultat med de två metoderna. Det viktiga i denna övning var ju att komma fram till de två uttrycken för omkretsen.

**På denna sida har vi nu med programmets CAS–funktioner direkt beräknat derivatans nollställen och sedan har vi beräknat omkretsen. Vi får samma resultat med de två metoderna.**

**Metod 1**

$\text{solve}\left(\frac{d}{dx}\left(\sqrt{64-x^2}+2\cdot x\right)=0,x\right) \blacktriangleright x=\frac{16\cdot\sqrt{5}}{5}$ ger omkretsen: $\mathbf{f1}\left(\frac{16\cdot\sqrt{5}}{5}\right) \blacktriangleright 8\cdot\sqrt{5}$

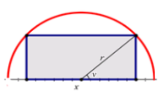
**Metod 2**

$\text{solve}\left(\frac{d}{dv}\left(8\cdot\sin(v)+16\cdot\cos(v)\right)=0,v\right) \blacktriangleright v=n2\cdot\pi+\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ ger ger omkretsen: $\mathbf{f2}\left(\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right) \blacktriangleright 8\cdot\sqrt{5}$

$8\cdot\sqrt{5} \blacktriangleright 17.8885$

Vi har ju tidigare definierat funktionerna f1 och f2 på sid 4.

Bredd/höjdförhållandet som det frågades om kan vi direkt beräkna till 4/1 eftersom vi vet att tan *v* =1/2. Se figur.




Att beräkna arean kan genomföras på liknande sätt!